

# 유한용량을 갖는 조립/분해 생산시스템의 산출을 근사적 방법 Throughput Approximation Method for Assembly/Disassembly Production Systems with Finite Buffer

백천현 · 김호균 · 조형수  
동의대학교 기계산업시스템공학부

## Abstract

본 연구에서는 유한용량을 갖는 조립/분해 생산시스템의 산출분석을 위한 근사적 방법을 제시한다. 유한용량을 갖는 조립/분해 생산시스템은 상태공간이 매우 크기 때문에 효율적으로 분석하기가 어렵다. 따라서 근사적 방법에서는 조립/분해 생산시스템을 비교적 작은 규모의 상태공간을 갖도록 단순 조립/분해 시스템과 단일 직렬시스템을 갖는 각각의 부분시스템으로 분해한다. 각 부분시스템은 2차 모멘트가 고려된 PH/PH/1/C 시스템으로 기술되고 수리적 방법에 의해 분석되어진다. 실험결과를 시뮬레이션과 비교되고, 제시된 근사적 방법이 효과적이라는 것을 보여준다.

## 1. 서론

조립/분해(assembly/disassembly) 생산시스템은 이론적으로 마코브체인을 이용하여 분석할 수 있으나, 조립 및 분해노드 수가 많으면 상태공간이 기하 급수적으로 증가하여 효과적인 분석이 곤란한 단점이 있다. 따라서 이러한 복잡한 시스템에 대해서는 정확한 해를 구하기 어렵기 때문에 대부분의 연구에서는 근사적 해를 구하기 위한 근사기법의 개발에 치중되어 왔다. 이러한 근사기법 중 가장 널리 이용되고 있는 방법이 분해법(decomposition method)으로써, 이는 원 시스템을 단순 조립/분해 시스템과 단일 직렬시스템을 갖는 각각의 부분시스템으로 분해한 후 이러한 부분시스템에 대한 분석을 통하여 원 시스템에 대한 성능 척도를 추정하는 방법이다.

문헌에서 소개된 유한용량을 갖는 조립/분해 생산시스템에 대한 근사적 해법들을 살펴보면, Nelson과 Tantawi(1988)는 비례 근사법(scaling approximation)이라고 불리는 새로운 근사적 기법을 소개하고, 이를 2개 이상의 서버들로 되어 있는 균질(homogeneous)의 조립/분해 대기행렬시스템을 분석하는데 적용하였다. Liu와 Perros(1991)는  $k$ 개의 조립/분해 노드를 갖는 폐쇄형 대기행렬시스템을 분석하기 위한 조립과 분해에 기초를 둔 근사기법을 소개하였는데, 이것은 평균 반응시간과 시스템 처리율에 있어서 아주 양호한 결과치를 보여주었다. 이후 Altiok와 Perros(1996)는 하나의 노드가 병렬로 된  $n$ 개의 노드들과 연결되어 있는 분해스테이션과  $n$ 개의 병렬노드들이 하나의 노드와 연

결되어 있는 조립스테이션을 수정된 대기용량과 수정된 도착과정을 갖는 개별시스템으로 분해하는 기법을 제시하였다. Asadathorn과 Chao(1999)는 유한용량을 갖는 조립/분해 생산시스템을 조립 및 분해서버와 연결된 버퍼공간에 서비스율이 무한대인 가상의 서버를 대체함으로써 버퍼용량 1을 갖는 조립 및 분해스테이션과 단일 직렬시스템들로 분해하는 방법을 제시하였다. 이는 조립/분해 생산시스템을 비교적 작은 규모의 상태공간을 갖도록 함으로써 분석을 용이하게 하였다. 그러나 조립 및 분해스테이션에서의 노드수가 많아질수록 그 정확도는 상당히 많이 떨어지고 있다.

본 연구에서는 전술한 Asadathorn과 Chao(1999)의 분해방법을 채택하고, 조립 및 분해스테이션의 노드수가 많아질수록 정확도가 떨어지는 것을 보완하기 위해 분해된 각각의 부분시스템을 2차 모멘트가 고려된 PH/PH/1/C 시스템으로 기술하고 수리적 방법에 의해 분석한다. 이로써 원 시스템인 유한용량을 갖는 조립/분해 생산시스템에 대한 산출을 도출하기 위한 알고리즘을 제시한다.

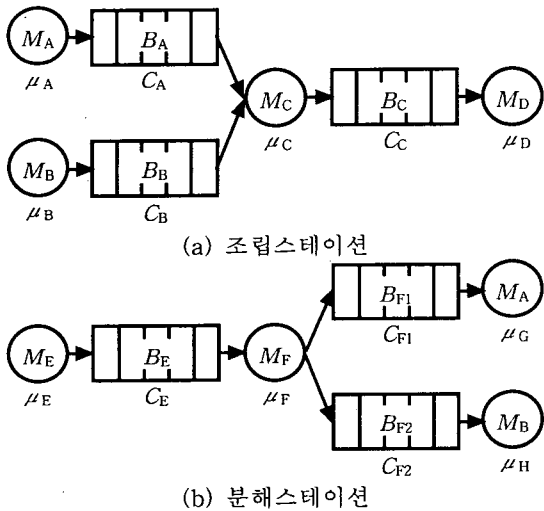
먼저, 다음 절에서 유한용량을 갖는 조립/분해 생산시스템에 대한 모형을 설명한다. 3절에서는 분해법을 이용한 원 시스템의 분해방법을 소개하고, 1차 및 2차 모멘트가 고려된 시스템의 근사해법을 제시한다.

## 2. 모형 설명

유한용량을 갖는 조립/분해 생산시스템은 <그림 1>과 같이 조립스테이션과 분해스테이션 그리

고 일반적인 직렬노드들로 구성되어 있다. 시스템에서의 부품흐름의 예는 조립스테이션의 경우, <그림 1>의 (a)와 같이 기계  $M_A$ 와 기계  $M_B$ 는 두 가지 형태의 부품, 즉 A와 B를 각각 생산하여 버퍼  $B_A$ 와  $B_B$ 에 저장한다. 조립기계인 기계  $M_C$ 는 버퍼  $B_A$ 와  $B_B$  모두에 적어도 하나 이상의 부품이 있을 때에만 서비스를 시작할 수 있다. 조립된 제품은 버퍼  $B_C$ 에 저장되어 다시 기계  $M_D$ 에서 서비스를 받고 완성품으로 시스템을 빠져나가게 된다. <그림 1>의 (b)의 분해스테이션인 경우, 분해기계  $M_F$ 는 두 하위버퍼  $B_{F1}$ 와  $B_{F2}$  모두에 적어도 하나 이상의 공간이 있어야만 부품을 저장시킬 수 있는 것을 제외하고는 부품흐름이 조립스테이션의 경우와 동일하다. 따라서 조립스테이션과 분해스테이션의 알고리즘 구현상의 차이가 없으므로 전개의 편의상 조립스테이션만을 중심으로 설명하기로 한다.

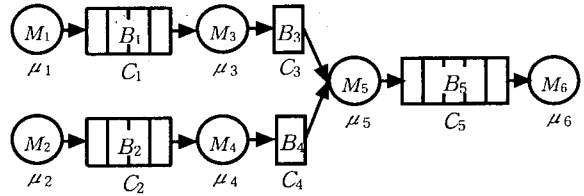
각 기계  $M_i$ 에서의 서비스 시간은 서비스율  $\mu_i$ 를 갖는 지수분포를 따르며 ( $i=A, B, C, D$ ), 서비스 제공순서 원칙은 선입선출(FIFO) 원칙을 따른다고 가정한다. 버퍼  $B_i$ 의 저장용량은 하위기계의 작업공간을 포함하여  $C_i$ 이다. 만약 기계  $M_i$ 가 서비스를 마치고 하부버퍼로 부품을 저장하려고 할 때, 버퍼  $B_i$ 가 가득 찬 경우, 서버  $M_i$ 는 봉쇄(blocking)된다. 그러나 기계  $M_D$ 는 하위버퍼의 저장용량이 무한하다고 가정하여 봉쇄가 존재하지 않으며, 유사하게 기계  $M_A$ 와  $M_B$ 는 결핍(starvation)되지 않는다고 가정한다.



<그림 1> 조립/분해 생산시스템 모형

분석의 용이성을 위해 <그림 1> (a)의 조립스테이션을 <그림 2>와 같이 조립기계와 연결된 버퍼의 맨 앞에 있는 버퍼공간 중에서 하나를 분리시키고, 그 사이에 서비스율이 무한대인 가상의 기계를 삽입하게 되면, 이는 버퍼용량 1을 갖는 별도의 조립스테이션으로 간주할 수 있게 된다. 그러나 실제로 부품이 버퍼공간과 무한대의 서비스율을 갖는 가상의 기계를 이동하는 데는 어떤 시간도 소요되지 않으므로, 이러한 변환은 원 시스템의 성능특성에 아무런 영향을 주지 않는다. 그러면 버퍼  $B_1$ 과  $B_2$ 는 원 시스템의 버퍼용량에서 각각 하나씩의 버퍼용량이 줄어든  $C_A-1$ 과  $C_B-1$ 이 되고, 이를 각각  $C_1$ 과  $C_2$ 라 한다. 그리고 버퍼  $B_3$ 과  $B_4$ 의 버퍼용량은 각각 1이 되며 이를  $C_3$ 과  $C_4$ 라 한다. 또한

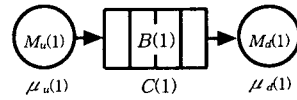
버퍼  $B_5$ 의 용량은  $C_C$ 가 되며 이를  $C_5$ 라 한다.



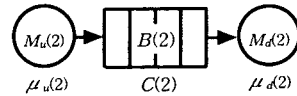
<그림 2> 변형된 조립스테이션

### 3. 분해법을 이용한 근사해법

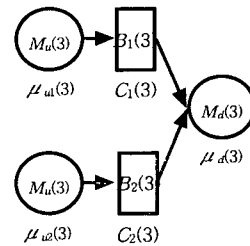
분해법은 원 시스템을 유한한 버퍼용량을 갖는 독립된 부분시스템으로 분해하고, 각 시스템의 도착과정, 서비스과정 및 버퍼용량을 특성화하여 원 시스템에서의 행태에 가깝게 근사시키는 방법이다.



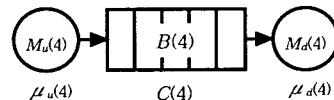
부분시스템 T(1)



부분시스템 T(2)



부분시스템 T(3)



부분시스템 T(4)

<그림 3> 분해된 4개의 부분시스템들

#### 3.1 분해

변형된 조립스테이션을 원 시스템이라 하면, 원 시스템은 <그림 3>과 같이 4개의 부분시스템  $T(i)$ 으로 분해될 수 있다. 각 부분시스템  $T(i)$ 는 중간버퍼  $B(i)$ 를 중심으로 상위기계(upstream machine)  $M_{u(i)}$ 와 하위기계(downstream machine)  $M_{d(i)}$ 로 구성되는데, 단 조립이 일어나는 부분시스템  $T(3)$ 는 각각의 버퍼용량이 1인 두 개의 버퍼  $B_1(3)$ 과  $B_2(3)$ , 그리고 서비스율이  $\infty$ 인 각 버퍼의 상위기계  $M_{u1}(3)$ 와  $M_{u2}(3)$ , 조립이 일어나는 하위기계  $M_{d(3)}$ 로 구성된다. 이때 하위기계  $M_{d(3)}$ 는

상위버퍼인  $B_1(3)$ 과  $B_2(3)$  모두에 반드시 부품이 존재할 때에만 서비스를 실시할 수 있다.

분해된 부분시스템  $T(i)$ 는 버퍼  $B(i)$ 에서의 부품 흐름이 원 시스템의 버퍼  $B_i$ 에서의 부품 흐름과 근사하도록 모형화하게 된다. 각 부분시스템에서 상위기계  $M_u(i)$ 는 결코 결핍되지 않으며, 하위기계  $M_d(i)$ 는 결코 봉쇄되지 않는다.

### 3.2 분석 알고리즘

분석에 앞서 다음과 같은 기호를 정의한다.

- $P_j^b(i)$  : 부분시스템  $T(i)$ 에서 상위기계  $j$ 의 봉쇄확률,
- $P^s(i)$  : 부분시스템  $T(i)$ 에서 하위기계의 결핍확률,
- $t_{u_j}^b(i)$  : 부분시스템  $T(i)$ 에서 상위기계  $j$ 의 봉쇄시간,
- $t_{d_j}^s(i)$  : 부분시스템  $T(i)$ 에서 하위기계의 결핍시간,
- $t_{ij}(i)$  : 부분시스템  $T(i)$ 에서 상위기계  $j$ 의 평균 서비스시간,
- $t_d(i)$  : 부분시스템  $T(i)$ 에서 하위기계의 평균 서비스시간,
- $\sigma_{u_j}^2(i)$  : 부분시스템  $T(i)$ 에서 상위기계  $j$ 의 서비스시간의 분산,
- $\sigma_d^2(i)$  : 부분시스템  $T(i)$ 에서 하위기계의 서비스시간의 분산.

먼저 각 부분시스템에서의 상위기계 혹은 하위기계의 서비스과정은 원 시스템에서의 부품 흐름 행태를 반영하기 위하여 각각 다음과 같이 수정된 서비스시간의 평균과 분산을 갖는다.

#### 부분시스템 $T(1)$

$$\begin{aligned} t_u(1) &= t_1 \\ t_d(1) &= t_3 + E[t_{u1}^b(3)] \\ \sigma_u^2(1) &= t_1^2 \\ \sigma_d^2(1) &= t_3^2 + V[t_{u1}^b(3)] \end{aligned}$$

#### 부분시스템 $T(2)$

$$\begin{aligned} t_u(2) &= t_2 \\ t_d(2) &= t_4 + E[t_{u1}^b(3)] \\ \sigma_u^2(2) &= t_2^2 \\ \sigma_d^2(2) &= t_4^2 + V[t_{u1}^b(3)] \end{aligned}$$

#### 부분시스템 $T(3)$

$$\begin{aligned} t_{u1}(3) &= t_3 + E[t_d^s(1)] \\ t_{u2}(3) &= t_4 + E[t_d^s(2)] \\ t_d(3) &= t_5 + E[t_u^b(4)] \\ \sigma_{u1}^2(3) &= t_3^2 + V[t_d^s(1)] \\ \sigma_{u2}^2(3) &= t_4^2 + V[t_d^s(2)] \\ \sigma_d^2(3) &= t_5^2 + V[t_u^b(4)] \end{aligned}$$

#### 부분시스템 $T(4)$

$$t_u(4) = t_5 + E[t_d^s(3)]$$

$$\begin{aligned} t_d(4) &= t_6 \\ \sigma_u^2(2) &= t_2^2 + V[t_d^s(3)] \\ \sigma_d^2(4) &= t_6^2 \end{aligned}$$

위와 같이 부분시스템  $T(i)$ 에서의 상위기계 및 하위기계의 서비스시간에 대한 평균과 분산이 주어지면, 이를 이용하여 부분시스템  $T(i)$ 의 서비스과정을 2단계를 갖는 PH(phase-type)형태로 변환하고, 이를 PH/PH/1/ $C_i+1$ 로서 부분시스템  $T(i)$ 을 분석하여 안정상태확률 및 봉쇄확률 그리고 결핍확률을 구할 수 있게 된다. 이때 PH형태로의 변환방법은 Marie(1980)와 김호균 등(1999)에 의해 사용되었던 방법과 동일한 방법을 사용하였다.

부분시스템  $T(i)$ 에서의 상위기계  $M_u(i)$ 와 하위기계  $M_d(i)$ 의 서비스과정이 각각 2단계를 갖는 PH형태로 변환되어지면, 부분시스템  $T(i)$  상태를  $(\alpha_1, \alpha_2, n)$ 으로 정의하며 특별히 조립기계를 갖는 부분시스템  $T(3)$ 의 상태는  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, n_1, n_2)$ 로 정의할 수 있다. 이때  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 는 각각 세 가지 상태 즉 0, 1 그리고 2를 가질 수 있다.  $\alpha_j$  ( $j=1, 2, 3$ )의 상태 1과 상태 2는 각각의 단계에서 서비스 받고 있는 상태를 나타내며, 버퍼  $B(i)$ 가 가득 차 있거나 또는 비어 있어서 각 서버가 대기하고 있는 상태를 0이라 한다. 그리고  $n=0, 1, \dots, C(i)+1, n_1=n_2=0, 1, 1^+$ 로서,  $n \leq C(i)$ 인 상태에서  $n$ 은 버퍼내의 고객의 수가 되고,  $n=C(i)+1$ 과  $n_1=1^+$  혹은  $n_2=1^+$  상태는 버퍼  $B(i)$ 가 가득 차서 각 상위기계가 봉쇄된 것을 뜻한다.

$i=1, 2, 4$ 에 대해서 앞서 정의된 상태  $(\alpha_1, \alpha_2, n)$ 의 안정상태확률을  $p_i(\alpha_1, \alpha_2, n)$ 라 하고, 상태  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, n_1, n_2)$ 의 안정상태확률을  $p_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, n_1, n_2)$ 라 정의하면 각 부분시스템의 상태를 전이율행렬  $Q$ 로 나타내어 안정상태확률을 구할 수 있게 된다. 그러면 각 부분시스템의 안정상태확률을 이용하여 다음과 같은 봉쇄확률과 결핍확률을 구할 수 있다.

$$P^b(i) = \sum_{\alpha_2=0}^2 p_i(0, \alpha_2, C(i)+1), \quad i=1, 2, 4$$

$$\begin{aligned} P^b(3) &= P_1^b(3) + P_2^b(3) + P_{12}^b(3) \\ &= \sum_{\alpha_2=0}^2 \sum_{\alpha_3=0}^2 \sum_{n_2=0}^1 p_i(0, \alpha_2, \alpha_3, 1^+, n_2) \\ &\quad + \sum_{\alpha_1=0}^2 \sum_{\alpha_3=0}^2 \sum_{n_1=0}^1 p_i(\alpha_1, 0, \alpha_3, n_1, 1^+) \\ &\quad + \sum_{\alpha_3=0}^2 p_i(0, 0, \alpha_3, 1^+, 1^+). \end{aligned}$$

$$P^s(i) = \sum_{\alpha_1=0}^2 p_i(\alpha_1, 0, 0), \quad i=1, 2, 4$$

$$\begin{aligned} P^s(3) &= P_1^s(3) + P_2^s(3) + P_{12}^s(3) \\ &= \sum_{\alpha_1=0}^2 \sum_{\alpha_2=0}^2 p_i(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0, 1) \\ &\quad + \sum_{\alpha_1=0}^2 \sum_{\alpha_2=0}^2 p_i(\alpha_1, \alpha_2, 0, 1, 0) \\ &\quad + \sum_{\alpha_1=0}^2 \sum_{\alpha_2=0}^2 p_i(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

각 부분시스템에서의 봉쇄확률 및 결핍확률이 계산되면 평균 봉쇄시간과 분산을 다음과 같이 구

할 수 있다.

부분시스템 T(1)

$$E[t_u^s(1)] = P^s(1)t_u(1)$$

$$V[t_u^s(1)] = P^s(1)t_u^2(1) + P^s(1)(1 - P^s(1))t_u^2(1)$$

부분시스템 T(2)

$$E[t_d^s(2)] = P^s(2)t_u(2)$$

$$V[t_d^s(2)] = P^s(2)t_u^2(2) + P^s(2)(1 - P^s(2))t_u^2(2)$$

부분시스템 T(3)

$$E[t_{u1}^b(3)] = P_2^s(3)(t_{i2}(3) + t_d(3)) + P_{12}^s(3)t_d(3)$$

$$V[t_{u1}^b(3)] = P_2^s(3)(t_{i2}^2(3) + t_d^2(3)) + P_{12}^s(3)t_d^2(3) + P_2^s(3)(1 - P_2^s(3))(t_{i2}^2(3) + t_d^2(3))^2 + P_{12}^s(3)(1 - P_{12}^s(3))t_d^2(3)$$

$$E[t_{i2}^b(3)] = P_1^s(3)(t_{u1}(3) + t_d(3)) + P_{12}^s(3)t_d(3)$$

$$V[t_{i2}^b(3)] = P_1^s(3)(t_{u1}^2(3) + t_d^2(3)) + P_{12}^s(3)t_d^2(3) + P_1^s(3)(1 - P_1^s(3))(t_{u1}^2(3) + t_d^2(3))^2 + P_{12}^s(3)(1 - P_{12}^s(3))t_d^2(3)$$

$$E[t_d^s(3)] = P_1^b(3)t_{i2}(3) + P_2^b(3)t_{u1}(3) + P_{12}^b(3)[t_{u1}(3) + t_{i2}(3) - (t_{u1}(3)t_{i2}(3))/(t_{u1}(3) + t_{i2}(3))]$$

$$V[t_d^s(3)] = P_1^b(3)t_{i2}^2(3) + P_2^b(3)t_{u1}^2(3) + P_{12}^b(3)[t_{u1}(3) + t_{i2}(3) - (t_{u1}(3)t_{i2}(3))/(t_{u1}(3) + t_{i2}(3))]^2 + P_1^b(3)(1 - P_1^b(3))t_{i2}^2(3) + P_2^b(3)(1 - P_2^b(3))t_{u1}^2(3) + P_{12}^b(3)(1 - P_{12}^b(3))[t_{u1}(3) + t_{i2}(3) - (t_{u1}(3)t_{i2}(3))/(t_{u1}(3) + t_{i2}(3))]^2$$

부분시스템 T(4)

$$E[t_u^b(4)] = P^b(4)t_d(4)$$

$$V[t_u^b(4)] = P^b(4)t_d^2(4) + P^b(4)(1 - P^b(4))t_d^2(4)$$

알고리즘은 두 개의 단계로 구성되어 있다. 첫 번째 단계에서는 전진방향으로 각 부분시스템들을 분석하여 상위기계  $M_u(i)$ 의 서비스시간을 구하는 단계이고, 두 번째 단계에서는 후진방향으로 각 부분시스템들을 분석하여 하위기계  $M_d(i)$ 의 서비스시간을 구하는 단계이다. 이러한 과정은 상위 및 하위기계의 서비스시간이 수렴될 때까지 반복하게 된다. 이상의 과정들을 정리한 알고리즘은 다음과 같다.

알고리즘

초기화.

각 매개변수의 초기값을 다음과 같이 설정한다.

$$\mu_u(1) = \mu_1, \mu_u(2) = \mu_2, \sigma_u^2(1) = \mu_u^2(1), \sigma_u^2(1) = \mu_u^2(1),$$

$$\mu_d(1) = \mu_3 = \infty, \mu_d(2) = \mu_4 = \infty, \sigma_d^2(1) = \sigma_d^2(2) = 0,$$

$$\mu_d(3) = \mu_5, \mu_d(4) = \mu_6, \sigma_d^2(3) = \mu_d^2(3), \sigma_d^2(4) = \mu_d^2(4).$$

단계 I.  $i=1, 2, \dots, 4$ 에 대해서

1 :  $\mu_w(i)$  및  $\sigma_w^2(i)$ 을 이용하여 PH형태로 변환한다.

2 : 부분시스템  $T(i)$ 를 분석하여 안정상태확률, 분해확률 및 결핍확률을 구한다.

3 :  $\mu_w(i+1)$  및  $\sigma_w^2(i+1)$ 을 계산한다( $j=1, 2$ ).

단계 II.  $i=4, 3, \dots, 1$ 에 대해서

1 :  $\mu_d(i)$  및  $\sigma_d^2(i)$ 을 이용하여 PH형태로 변환한다.

2 : 부분시스템  $T(i)$ 를 분석하여 안정상태확률, 분해확률 및 결핍확률을 구한다.

3 :  $\mu_d(i-1)$  및  $\sigma_d^2(i-1)$ 을 계산한다.

각 매개변수들이 수렴할 때까지 단계 I 과 단계 II를 반복 수행한다. 각 매개변수들을 참조할 때에는 가장 최근에 생성된 값을 사용한다.

**4. 결론**

본 연구에서는 유한용량을 갖는 조립/분해 생산시스템의 산출을 분석을 위한 근사적 방법을 제시하였다. 분석은 대부분의 근사 알고리즘들이 채택하고 있는 분해법을 이용하였으며, 원 시스템의 분해시 가상의 기계를 삽입하여 분석시 고려되어야 할 상태공간을 크게 축소시켰다. 분해된 각 부분시스템의 분석은 1차 모멘트만을 이용하는 기존의 방법과는 달리 1차 및 2차 모멘트를 동시에 고려하여 분석의 정확도를 높였다.

추후 본 연구는 조립 및 분해 노드의 수를 확장하고, 불완전한 기계를 갖는 조립/분해 생산시스템에 대한 연구도 이루어져야 하겠다.

**참고문헌**

[1] 김호균, 백천현, 조형수(1999), 불완전한 기계 및 랜덤가공시간을 갖는 폐쇄형 생산시스템의 성능분석에 관한 연구, *대한산업공학회지*, 25(2), 240-253.

[2] Altiock, T. and Perros, H. G.(1996), Open network of queues with blocking: Split and merge configuration, *IIE Transactions*, 18, 251-261.

[3] Asadathorn, N. and Chao, X.(1999), A decomposition approximation for assembly-disassembly queueing networks with finite buffer and blocking, *Annals of Operations Research*, 87, 247-261.

[4] Liu, Y. C. and Perros, H.G.(1991), A decomposition procedure for the analysis of closed fork/join queueing system, *IEEE Transactions on Computers*, 40(3), 365-370.

[5] Marie, R.(1980), Calculation equilibrium probabilities for  $\lambda(n)/C_w/1/N$  queues, *Proceedings of Performance 80 International Symposium on Computer Performance Modeling*, May, 28-30.

[6] Nelson, R. and Tantawi, A. N.(1988), Approximate analysis of fork/join synchronization in parallel queues, *IEEE Transactions on Computers*, 37(6), 739-743.