

손실함수를 고려한 주기적 검사정책을 갖는 열화시스템의 최적교체정책

이창훈, 박종훈*

서울대학교 산업공학과

Abstract

Replacement policy of a degradation of system is investigated by incorporating the loss function defined by the deviation of the value of quality characteristic from its target value, which determines the loss cost. Two cost minimization problems are formulated : 1)determination of an optimal inspection period given the state for the replacement and 2)determination of an optimal state for replacement under fixed inspection period.

Simulation analysis is performed to observe the variation of total cost with respect to the variation of the parameters of loss function, inspection cost, respectively. As a result, parameters of loss function are seen to be the most sensitive to the total cost. On the contrary, inspection cost is observed to be insensitive.

1.서론

열화시스템은 열화가 진행 될수록 시스템의 기능이나 상태가 초기의 최적인 상태를 유지하기 힘들어져 고장이 발생할 확률이 커 질뿐만 아니라 수행하는 작업능력 역시 떨어지게 된다. 그에 따라 시스템의 유지 및 보수를 위한 비용과 시스템의 작업수행을 통하여 얻을 수 있는 제품이나 서비스 또는 정보 등 작업결과물의 품질이 저하되어 발생하는 손실비용이 증가하게 되고 따라서 시스템이 어느 정도 이상 열화가 진행되면 유지나 보수를 위한 비용과 작업결과물의 품질에 따른 손실비용이 아주 커져 시스템을 교체해 주어 초기의 최적상태로 만들어 주는 것이 더 경제적이게 된다. 그러므로 열화에 의해 발생하는 비용과 시스템을 교체에 하면서 발생하는 비용을 상호 고려하여 총 비용이 최소화 되는 교체정책이 필요하게 된다.

기존의 열화시스템의 교체정책에 관한 연구들은 열화 된 상태에서 시스템 자체의 고장에 의한 손실이나 시스템의 유지, 보수에 관한 비용만을 고려하여 교체정책을 제시하였을 뿐 작업능력의 저하에 의한 손실(loss), 즉 작업결과물의 품질에 의한 손실은 고려하지 않았다. 그러나 시스템의 작업수행 결과로 얻어지는 제품이나 서비스 또는 정보들은 생산됨으로써 끝나는 것이 아니라 소비자나 기타 다른 사용자들에게 사용되어 지면서 다시 새로운 가치(value)를 생산하게 된다. 그러므로 열화에 의해 품질이 저하된 결과들이 생산되어 사용되어 지면서 발생하게 되는 손실도 비용으로 고려하여 시스템의 교체정책을 결정하여야 한다. 따라서 본 연

구는 열화에 의한 작업결과물의 저하가 커다란 손실을 발생시키거나 품질의 가치가 커서 중요한 요소로 고려되는 시스템의 교체정책을 제시하고 시스템이 교체정책을 결정할 때 고려되는 요소들과의 관계를 살펴보아 품질의 중요성을 고려한 보수정책을 설계하도록 하는데 그 목적이 있다.

2.모형설명

2.1 가정

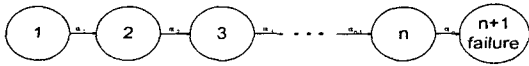
- ① 시스템의 상태는 생산되는 제품의 특성치에 의해서 정의된다.
- ② 각 상태에서 다음 상태로 전이되는 전이율(transition rate)은 상수값(constant)을 갖는다.
- ③ 열화상태는 일정 주기마다 행하여지는 검사에 의해서만 알 수 있다
- ④ 시스템 분석시 단위시간(unit time)은 제품 1개를 생산하는데 소요되는 시간이다.
- ⑤ 시스템의 상태는 교체에 의해서만 상태1로 향한다.
- ⑥ 상태 i 에서 생산되는 제품의 특성치는 평균이 μ_i 분산이 σ_i^2 인 정규분포를 따른다.

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} dx.$$

2.2 열화시스템

최초 시스템이 작동을 시작한 후 여러 원인들

에 의하여 시스템의 상태는 최초의 상태보다 점점 저하되고 시스템의 상태가 저하됨에 따라 시스템이 수행하는 작업을 위한 기능들 역시 초기의 상태보다 저하되게 된다. 따라서 시스템은 열화가 진행될수록 작업수행능력이 저하 될 뿐 아니라 시스템 자체의 열화속도도 가속되게 된다. 그러다 어느 순간이 되면 공구에 의하여 생산되는 가공품의 품질은 기준치를 넘어가는 불량품을 생산하게 되는 고장(failure)의 상태가 된다. 따라서 시스템이 생산하는 작업결과에 따라 state를 1에서부터 n 까지 정의할 수 있게된다. state1은 시스템의 상태가 아주 양호해 목적인 작업을 정확히 수행할 수 있는 상태이고 state2, state3으로 상태의 숫자가 증가하면 시스템의 상태가 점점 저하되는 것을 의미한다. state2부터 n 까지는 시스템이 생산하는 작업결과가 허용하는 한계치(limit-level)를 만족하기는 하지만 그 이전의 state보다는 품질이 떨어지는 결과를 생산해 내는 상태를 의미하고 state $n+1$ 은 시스템이 작동을 하여 작업을 수행하기는 하지만 그 작업의 결과가 허용하는 한계치를 벗어나는 불량품을 생산하는 상태, 즉 고장상태를 의미한다. 이상의 상황을 그림1에서 표현하였다.



[그림 1] 열화시스템의 확률모형

2.3 손실함수

시스템의 작업수행을 통해 결과로 얻어지는 제품이나 서비스 또는 정보들은 소비자나 기타 다른 사용자나 시스템에서 사용되어 목적하는 기능을 수행하고 기능의 수행정도에 따라 새로운 가치를 발생시킨다. 이때 생산된 제품의 품질이 허용치를 만족하는 양품이라 하더라도 제품의 품질 수준에 따라 발생하는 가치에는 차이가 발생하게 되고 그에 따라 시스템의 평가가 이루어지고 판단되어진다. 특히 품질이 상당히 중요하게 고려되어지는 제품에 있어서는 더더욱 그렇다.

따라서 허용치를 만족하는 양품이라 하더라도 정확한 목표치에 얼마나 접근하였느냐에 따라 품질의 수준이 차이가 발생하고 그 차이가 손실로 인식될 수 있다.

그래서 일반적으로 시스템의 작업결과에 지정된 목표치(target value)가 있을 때 작업결과에 측정치가 y 이고 목표치가 m 인 경우 손실함수는 $L(y) = k(y-m)^2$ 로 정의하여 사용하고 제품이나 작업결과에 따른 손실의 크기는 각각의 경우에 따라 전문가의 의견이나 현장담당자에 의하여 상수 k 를 조정함으로써 결정할 수 있다.

3. 시스템의 열화진행

3.1 열화진행의 확률적 과정

가정②에 의해서 각 상태에서의 전이시간 즉 어떠한 시스템의 상태에 시스템이 머무르는 시간은 $f_x(t) = a_i e^{-a_i t}$ 와 같은 모수 a_i 를 갖는 지수분포를 따른다.

또한 시스템의 상태를 알 수 있는 검사는 T 시간마다 행하여지므로 열화의 진행 정도는 시간 T 에 대하여 확률적으로 변환다. 따라서 상태 i 에서 작동된 시스템이 T 시간 후 상태 j 에 있을 확률 $P_{i,j}(T)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

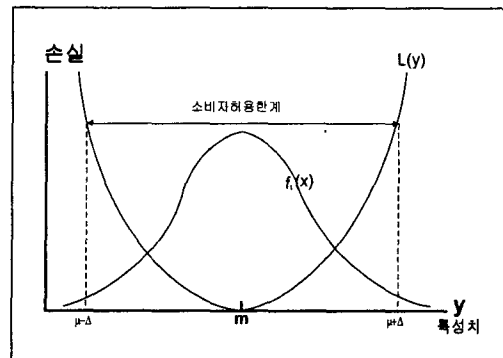
$$P_{i,j}(T) = P(x_i + \dots + x_{j-1} < T) - P(x_i + \dots + x_j < T)$$

$$= \sum_{k=i}^{j-1} C_{k,j-1} (1 - e^{-a_k T}) - \sum_{k=i}^j C_{k,j} (1 - e^{-a_k T})$$

단, $C_{i,n} = \begin{cases} 1 & \text{if } n=i \\ \prod_{r=i}^{n-1} \frac{a_r}{a_j - a_r} & \text{otherwise.} \end{cases}$

3.2 손실비용

시스템에서 생산하는 제품의 손실은 제품의 특성치가 목표치에 얼마나 근접하느냐에 따라 결정된다. 이를 반영하기 위해 많은 손실함수들이 정의되어 있지만 본 연구에서는 가장 많이 사용되고 있는 2차식의 손실함수를 사용한다. 즉 생산제품의 목표치가 m 일 경우 제품이 특성치가 x 로 생산되면 발생하는 제품의 손실은 $L(x) = a(x-m)^2$ 로 정의된다.



[그림 2] 상태 i 에서의 손실비용

손실함수가 정의되면 시스템에서 생산되는 제품은 정의된 손실함수에 의해서 손실비용을 가지게

된다. 특히 열화시스템의 경우 시스템의 상태에 따라 생산되는 제품의 품질이 변하므로 열화상태에 따른 손실비용을 계산하여야 한다. 따라서 state i 에서 생산되는 제품의 한 개당 기대손실은 state i 에서 생산되는 제품의 특성에 대한 손실과 특성의 값을 가지는 생산품을 생산할 확률의 곱으로 표현된다(그림2). 따라서 state i 에서 생산하는 제품의 개당 기대손실비용 $l(i)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$l(i) = \int_{-\infty}^{\infty} l(x) \cdot f(x) dx$$

$$= a(\sigma_i^2 + (\mu_i - m)^2)$$

위의 식에서 보이듯이 상태 i 에서 생산되는 제품의 단위당 기대손실을 해당 상태에서 생산되는 제품 특성의 평균과 분산으로 표현하여 열화에 의한 시스템의 기능저하를 반영할 수 있게 하였다. 이식을 사용하여 제품 한 개당 손실을 구할 수 있게 되었고 이 식에 제품의 생산량을 곱하게 되며 전체의 손실비용을 계산할 수 있게 된다. 특히 가정 ④에 의해서 작동시간은 생산량과 같으므로 각 열화상태에서의 작동시간, 즉 상태에 머무른 시간(sojourn time)을 알면 계산을 할 수 있다. 그러나 열화시스템은 작동을 하면서 계속 열화가 진행되고 다음 검사까지는 시스템의 상태가 어떤지 알 수가 없다. 즉 검사간격동안 열화가 진행되지 않은 경우를 제외하고는 시스템이 각각의 상태에 얼마나 머물렀는지를 알 수가 없다. 이를 계산하기에 다음과 같은 함수를 도입한다.

$$I_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{if be state } i \text{ at time } t \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

윗 식을 이용해 현재 검사결과 상태 i 에 있는 시스템이 다음 검사간격 T 동안 상태 j 에 머무른 시간, 즉 상태 j 에서 생산하는 기대생산량을 구하면 다음과 같다.

$$E[X_{i,j}(t)] = E\left[\int_0^T I_j(t) dt\right]$$

$$= \int_0^T P_{i,j}(t) dt.$$

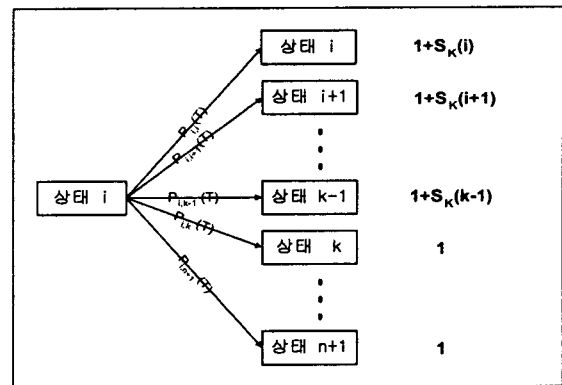
따라서 시스템이 현재 상태 i 에서 작동을 시작하여 T 시간 후 상태 j 로 열화되었을 경우 T 시간 동안 발생한 기대손실 $L_{i,j}(T)$ 는 다음과 같다.

$$L_{i,j}(T) = \sum_{k=i}^j l(k) \cdot \int_0^T P_{i,k}(t) dt,$$

$$= \sum_{k=i}^j (\sigma_k^2 + \mu_k^2 - 2m\mu_k + m^2) \cdot \int_0^T P_{i,k}(t) dt$$

3.3 기대비용

검사비용은 매 검사마다 열화상태에 상관없이 고정된 비용 C_j 가 소요되지만 손실비용은 계속 변하기 때문에 T 에 따른 열화상태의 확률적 변화를 고려하여 손실비용을 계산하여야 한다.



[그림 3] 기대검사횟수

상태 k ($1 \leq k \leq n$)에서 교체를 한다는 정책 하에서 실제로 시스템을 작동한다 가정하자. 처음 시스템이 작동하는 순간에는 아직 손실이 발생하지 않는다. 이후 생산이 시작되고 제품의 품질에 의한 비용이 발생하고 열화가 진행되면서 그 비용은 점점 증가한다. 이때 열화가 얼마나 진행되었는지는 아직 알 수 없고 따라서 손실비용도 추정 할 수가 없다. 그러나 T 시간 후에 검사를 실시하면 시스템의 열화정도를 알 수 있게 되는데 열화는 시간 T 에 따라서 확률적으로 진행되었을 것이다. 이때 시스템의 상태가 상태 k 이후의 상태라면 교체를 하고 그때까지의 기대손실이 총 기대손실이다. 그러나 상태 k 이전의 상태라면 시스템을 다음 검사 때까지 계속 작동시키고 총 기대손실은 그 때까지의 기대손실과 현재 시스템의 상태에서 교체할 때까지의 기대손실의 합이 된다(그림3) 따라서 이 개념을 반복해서 적용함으로써 상태 k 에서 교체하는 정책 하에서 상태 i 에서 교체시점까지의 발생하는 기대손실은

$$C_k(i) = \sum_{j=i}^{k-1} P_{i,j}(T) (L_{i,j}(T) + C_k(j))$$

$$+ \sum_{j=k}^n P_{i,j}(T) L_{i,j}(T)$$

로 계산할 수 있다.

이와 같은 개념으로 상태 k 에서 교체한다는 정책 하에서 상태 i 에서 교체할 때까지의 기대검사횟수는

$$S_k(i) = \sum_{j=i}^{k-1} P_{i,j}(T)(1+S_k(j)) + \sum_{j=k}^{n+1} P_{i,k}(T)$$

로 구할 수 있다.

4 최적교체정책

시스템이 작동을 시작하여 교체할 때까지의 기대비용과 작동시간을 구해 단위시간당 비용이 최소가 되게 하는 교체정책을 선택하는 것이 최적교체정책이 된다. 시스템 작동 후 교체시기까지 발생하는 비용과 기대시간은 $C_R + C_I \cdot S_k(1) + C_{k(1)} T \cdot S_k(1)$ 이다. 따라서 단위시간당 비용은

$$\frac{C_I}{T} + \frac{C_R + \sum_{j=i}^{k-1} P_{i,j}(T)(L_{i,j}(T) + C_k(j))}{T(\sum_{j=i}^{k-1} P_{i,j}(T)(1+S_k(j)) + \sum_{j=k}^{n+1} P_{i,k}(T))} + \frac{\sum_{j=k}^{n+1} P_{i,j}(T)L_{i,j}(T)}{T(\sum_{j=i}^{k-1} P_{i,j}(T)(1+S_k(j)) + \sum_{j=k}^{n+1} P_{i,k}(T))}$$

으로 표현되고 이를 최소화하는 k 가 최적교체정책이 된다.

5. 실험예제

본 장에서는 모의 실험을 통하여 각 요소들간의 변화에 따른 추세와 상호관계를 알아보았다. 즉 최적교체정책을 결정할 때 고려되는 여러 요소들의 변화에 따른 교체정책이나 비용의 변화를 알아보고 그 결과를 통하여 교체정책 결정 시 참고할 수 있도록 하였다.

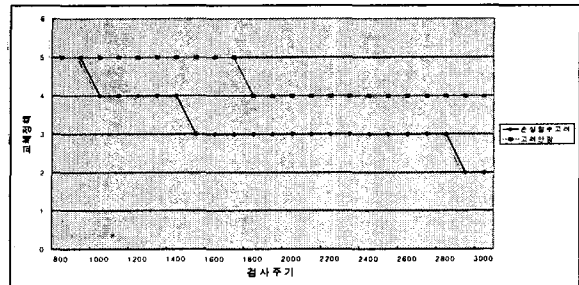
4.1 손실함수를 고려한 교체정책의 효과

다음과 같은 조건으로 손실함수를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우를 비교하였다.

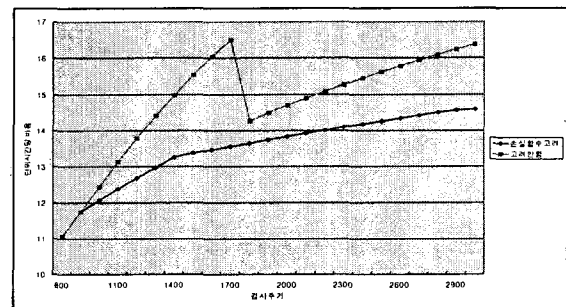
$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.0005, \alpha_2 = 0.0007, \\ \alpha_3 &= 0.009, \alpha_4 = 0.0013, \alpha_5 = 0.0015 \\ \mu_1 &= 10, \mu_2 = 10.5, \mu_3 = 11, \mu_4 = 12, \mu_5 = 14 \\ \sigma_1 &= 1, \sigma_2 = 1.5, \sigma_3 = 2, \sigma_4 = 3, \sigma_5 = 4, \\ C_R &= 10000, C_I = 500, \\ L(x) &= 10(x-m)^2 \end{aligned}$$

위의 조건으로 실험한 결과[그림4]와[그림5]에서 보아서 알 수 있듯이 손실함수를 고려한 교체정

책을 채택할 경우 제품의 품질저하에 의한 손실을 막기 위해 교체 state가 앞당겨 짐을 알 수 있다. 또한 손실함수를 고려하지 않았을 경우 제품의 품질저하에 의한 비용손실이 발생됨을 알 수 있다. 이상의 실험결과를 통해 열화에 의해 생산되는 제품의 품질이 현격히 저하되는 시스템이나 품질이 저하될수록 그 제품이 수행하는 기능의 질이 현격히 감소하는 제품을 생산하는 시스템에서는 손실함수를 고려한 교체정책을 사용하는 것이 비용의 경제성 면에서 더 효과적임을 알 수 있다.



[그림 4] 최적교체정책의 변화



[그림 5] 최적교체정책에 따른 비용변화

6. 결론 및 추후연구방향

본 연구에서는 열화시스템의 교체정책을 결정할 때 손실함수의 도입을 통하여 작업결과의 품질저하를 비용으로 인식하고 고려대상으로 삼아 품질의 중요성을 고려하는 최적교체정책을 제시하였다. 또한 열화의 정도를 시스템이 생산하는 제품의 특성치의 함수로 표현하여 시스템의 열화에 의한 손실을 민감하게 반영하도록 하였고 모의실험을 통하여 교체정책을 결정할 때 손실함수를 고려하는 것이 제품의 품질저하에 의한 손실을 줄여주어 비용의 경제성면에서 더욱 효과적임을 보였다.

추후 연구 방향으로는 작업의 결과가 정량적으로 제시되지 않는 열화시스템의 최적교체정책을 결정할 때 작업결과의 저하를 손실함수에 적용시키는 방법에 관한 연구가 더 필요하다고 생각된다.