대한산업공학회/한국경영과학회 2000 춘계공동학술대회 논문집. 2000 년 4 월 21-22 일. 경남대학교
Session PA11.2

일간승무계획문제의 정수계획해법

An Integer Programming Approach to the Problem of Daily Crew Scheduling

변 종익[1], 이 경식[2], 박 성수[1]
[1]KAIST 산업공학과/ [2]ETRI

Abstract

This paper considers the problem of subway crew scheduling. Crew scheduling is concerned with finding a minimum number of assignments of crews to a given timetable satisfying various restrictions. Traditionally, crew scheduling problem has been formulated as a set covering or set partitioning problem possessing exponentially many variables, but even the LP relaxation of the problem is hard to solve due to the exponential number of variables. In this paper, we propose two basic techniques that solve the problem in a reasonable time, though the optimality of the solution is not guaranteed. To reduce the number of variables, we adopt column-generation technique. We could develop an algorithm that solves column-generation problem in polynomial time. In addition, the integrality of the solution is accomplished by variable-fixing technique.
Computational results show column-generation makes the problem of treatable size, and variable fixing enables us to solve LP relaxation in shorter time without a considerable increase in the optimal value. Finally, we were able to obtain an integer optimal solution of a real instance within a reasonable time.

1. 서론

본 연구에서는 지하철 승무계획문제를 다루고자 한다. 승무계획문제는 주어진 시간표를 최소의 비용으로 승무원에게 할당하는 문제이며, 이 문제는 항공사나 철도회사 등을 비롯해 많은 산업현장에서 발생하는 문제이다. 일반적으로 승무계획문제는 set covering 문제로 모형화 되어 왔다. 열차운행계획이 주어지면 모든 열차의 운행계획은 여러 제약조건을 만족시키면서 모두 승무원들에게 할당되어져야 하는 것이다. 승무계획 문제의 경우 주어지는 열차운행계획의 수가 100-200 개인 경우에는 성공적인 해법들이 많이 알려져 있다. 하지만 문제의 크기가 큰 경우에는 기존의 해법들은 문제의 정수해를 구해주지 못하거나, 너무 많은 시간을 필요로 하는 것으로 알려져 있다.

먼저 본 논문에 사용되는 용어들을 정의하기로 한다. 열차운행계획의 가장 기본적인 단위인 trip 은 동일한 승무원이 휴식을 취하지 않고 운행하여야 하는 작업단위이다. 각각의 trip 은 출발시간, 출발역, 도착시간, 도착역 이외에 여러가지 추가적인 데이터를 가진다. 한 명의 승무원이 하루에 작업할 수 있는 trip 들의 집합을 duty 라고 하며, duty 는 단체협약, 회사규정 등 여러가지 제약조건들을 만족하여야 한다. 각 duty 는 출발역과 도착역이 같아야 하며 그 역을 duty 의 승무기지라고 한다. 본 연구는 열차운행계획이 주어졌을 때 주어진 제약조건을 최소의 비용으로 만족시키는 duty set 을 찾아내는 문제로 이해될 수 있다.

앞서 말한바와 같이 승무계획문제는 일반적으로 set covering 문제로 모형화되며, 본 연구에서 다루어지는 지하철 승무계획문제는 set covering 문제에 추가적인 제약식을 가진다.

승무계획문제의 특징은 문제의 최적해를 구하기 위해 고려되어야 하는 변수의 수가 매우 많다는 것이다. 고려되어야 하는 duty 의 숫자는 운행되어야 하는 trip 의 숫자가 많아짐에 비례해 지수적으로 증가한다. 예를 들면 800 개의 trip 이 주어진 문제의 경우 일반적으로 수십억개의 duty 가 생성가능하고 그에 대응하여 같은 수의 변수가 필요하게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해 본 연구에서는 열생성기법을 이용하였다. 본 연구에서의 열생성문제는 계층구조의 그래프에서 최장경로문제로 변형된다. 열생성기법을 사용하여 선형완화식의 최적해를 구할 수 있다 하더라도, 구한 근이 정수해가 아닌 경우에는 추가적으로 정수해를 구해주어야 한다. 선형완화식의 최적해를 구하는 것도 상당한 복잡도를 가진 상황에서 최적 정수해를 찾는 것은 일반적으로 매우 어려운 일이다. 본 연구에서는 문제의 정수해를 빠른 시간에 구하기 위해 변수고정법을 사용하여 정수해를 구해나간다.

2. 문제 설명

본 지하철역과 선로의 구조는 매우 간단하다 선로는 하나의 직선으로 생각할 수 있으며 수십개의 역이 선로를 따라 위치하고 있다. 그 중 양 끝쪽에 있는 역 두개는 승무기지가 될 수 있다. 승무기지를 제외하고는 가운데에 위치한 역에서만 승무원의 교체가 가능하다. 따라서 본 연구에서는 4 종류의 trip 이 발생하게 된다. 본 연구에서 다루는 문제는 총 814 개의 trip 을 가지는 문제이다.

모든 trip 의 운행은 실제로 수십개의 duty 들을 통해 이루어진다. 따라서 운행 가능한 duty 의 생성이 중요한 문제가 된다. Duty 의 생성에는 많은 제약조건이 따르게 되는데 여기에는 노사합의

운행환경, 법규 등 여러가지가 있다. 지금부터는 duty 의 생성과 관련된 제약조건들에 대하여 자세히 설명하도록 하겠다.

승무기지제약조건이란 duty 의 출발역과 도착역이 동일하여야 한다는 제약조건이다. 즉 승무기지에서 출발하여 그 승무기지로 돌아와야 한다는 제약조건이다.

하나의 duty 가 시작해서 끝날 때까지 걸리는 총작업시간에도 제약이 따른다. 모든 duty 는 제약된 시간이내에 하루의 작업을 모두 마쳐야 한다. 총작업시간은 야간작업과 주간작업에 따라 2 가지 기준이 적용된다.

하나의 duty 가 수행하는 trip 의 수에도 제약이 따른다. 승무원들에게 작업량을 고르게 할당하기 위해서 각 duty 들은 비슷한 수의 trip 으로 구성되어져야 한다. 본 연구에서는 모든 duty 가 정확히 10 개의 trip 으로 구성되어야 한다.

승무원이 하나의 duty 를 수행함에 있어서 trip 들 사이에 휴식시간이 배정되어 있어야 한다. 이러한 휴식시간은 지하철운행의 안전을 위하여 중요한 요소로 인식되고 있다. 본 연구에서는 이러한 휴식시간의 배정에 대해 제약조건이 존재하는데 그것은 작업시간동안 최소한 한 번은 ‘중간휴식’이라 불리는 긴 휴식시간이 배정되어져야 한다는 것이다. 중간휴식을 기준으로 하루의 작업량은 두 부분으로 나뉘게 되는데 이 두 부분은 각각 6 개 이하의 trip 으로 구성되어져야 한다.

러시아워대에는 승무원의 교대로 인한 지하철의 운행지연을 막기 위해 선로의 가운데에 위치한 역에서는 승무원 교대를 하지 않는다. 즉 러시아워 대에는 연속으로 2 개의 trip 을 운행하여야 한다. 하루에 두 번 출퇴근시간이 러시아워대로 지정되어져 있다. 이러한 제약조건들은 운행가능한 duty 의 수를 상당히 줄여주지만 제약조건을 모두 만족시키는 duty 들의 수는 여전히 매우 많다는 상황에는 변함이 없다.

운행가능한 duty 들로 구성된 duty set 이 열차운행계획에서 주어진 trip 들을 모두 운행한다고 해서 그 duty set 이 실제로 운행가능한 것은 아니다. 운행가능한 duty set 이 되려면 몇가지 제약조건을 추가적으로 만족시켜야 한다. Duty set 에 포함된 야간작업의 수에 대한 제약, 각 승무기지에서 출발하는 duty 수에 대한 제약들이 그것이다. 이러한 제약들은 duty 생성시에는 고려되지 않고 추가적인 제약식으로 첨가되게 된다.

3. 수리모델 및 해법

본 장에서는 지하철 승무계획문제의 정수계획모델을 제시하고자 한다. 정수계획모델은 주문제와 부문제로 나뉘어져 설명되어 있다. 또한 변수고정법의 의미에 대해서도 논하고 있다.

3.1 주문제

승무계획문제에는 주로 set covering 모델이 사용되어져 왔다. 지하철 승무계획문제는 전통적인 set covering 모델에 몇 개의 제약식을 추가하명 된다. 2 장의 끝부분에 언급된 duty set 과 관련된 제약조건들이 바로 그것이다. 승무기지 A,B 는 관련된 duty 의 수가 각각 U_A, U_B 개 이하여야 하며, 승무계획에 포함된 야간운행의 수는 U_O 개 이하여야 한다. set covering 모델에 세 개의 제약식을 추가한 수리모델이 (MP)에 주어져 있다.

$$(MP) \quad \min \sum_{d\in D} c_d x_d$$

$$\sum_{d\in D} \delta_t^d x_d \geq 1, \qquad t \in T, \ (1)$$

$$\sum_{d\in D} \delta_A^d x_d \leq U_A, \qquad (2)$$

$$\sum_{d\in D} \delta_B^d x_d \leq U_B, \qquad (3)$$

$$\sum_{d\in D} \delta_O^d x_d \leq U_O, \qquad (4)$$

Where, T : Set of trips,
D : Set of duties

여기서 x_d 는 duty d 와 관련된 결정변수이며, duty d 가 승무계획에 포함되면 1 의 값을 아닐 경우 0 의 값을 가진다. 결정변수들의 계수들은 다음과 같이 주어진다. Duty d 가 역 A 를 승무기지로 가질 경우 $\delta_A^d = 1, \delta_B^d = 0$ 이며, 역 B 를 승무기지로 가질 경우 $\delta_A^d = 0, \delta_B^d = 1$ 이다. Duty d 가 야간작업일 경우 $\delta_O^d = 1$, 아닐 경우에는 $\delta_O^d = 0$ 이다.

지하철 승무계획문제는 필요한 승무원의 수를 최소화하는 것이 목적이다. 따라서 duty 와 관련된 비용은 모두 $c_d = 1$ 이 된다. 주문제를 풀기 위하여 우선 (MP)의 선형완화식을 최적화하여야 하다 (MP)의 선형완화식의 최적해는 다음에 설명하는 열생성기법을 사용한다.

3.2 부문제

승무계획문제에는 지수적으로 많은 운행가능한 duty 들이 있고, 그에 따른 수리모델에도 같은 수의 변수가 (MP)에 나타나게 된다. 본 연구에서는 가능한 모든 변수를 수리모델에서 한꺼번에 다루는 대신, 변수들을 필요할 때마다 첨가하여 최적화하는 기법인 열생성기법을 사용하고자 한다. 열생성기법은 가능한 변수들 중 일부만을 가지는 선형완화식의 최적해가 주어졌을 때, 목적식의 값을 감소시키기 위해서 어떤 duty 가 추가적으로 필요한지 알아내는 것이며, 이 때 발생하는 새로운 최적화문제를 부문제라 한다. 열생성기법을 승무계획문제에 적용한 예로 Lavoie[12]와 Vance[17]가 있다.

열생성문제를 설명함에 있어서 D 의 부분집합 D' 를 생각하자. (MP)에서 D 를 D' 로 치환함으로써 생성되는 새로운 문제를 (RMP)라 하자. (RMP)는 (MP)보다 제한된 수의 변수를 가지는 문제이다. u_t, x, y, z 를 각각 제약식 (1), (2), (3), (4)와 관련된 쌍대변수들이라 하고, $\bar{u}_t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 를 (RMP)의 최적쌍대값이라 하자. 그렇다면 (RMP)의 선형완화식의 최적해사 (MP)의 선형완화식의 최적해가 될 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\sum_{t\in T} \delta_t^d \bar{u}_t + (\delta_A^d \bar{x} + \delta_B^d \bar{y} + \delta_O^d \bar{z}) \leq c_d, \quad d \in D \setminus D'$$

따라서, (RMP)의 선형완화식의 최적해가 (MP)의 선형완화식의 최적해가 아닐 경우 아래의 식을 만족시키는 duty i 가 존재한다.

$$\sum_{t\in T}\delta_t^d\overline{u_t}+(\delta_A^d\overline{x}+\delta_B^d\overline{y}+\delta_O^d\overline{z})>1,\quad d\in D\setminus D'$$

위 식에 나타나는 i 와 같은 duty 들을 (RMP)에 추가하여 다시 최적화함으로써 (RMP)의 선형완화식의 최적해가 (MP)의 선형완화식의 해에 가까워지게 된다. Duty i 와 같이 (RMP)에 추가될 duty 들을 찾기 위하여 새로운 최적화문제인 부문제가 발생하며, 부문제는 (SUB)에 제시되어 있다.

$$(SUB)\ \max\sum_{t\in T}\delta_t^d\overline{u_t}+(\delta_A^d\overline{x}+\delta_B^d\overline{y}+\delta_O^d\overline{z}),\ d\in D\setminus D'$$

(SUB)의 최적해의 값이 1 보다 크다고 하면, 그에 대응하는 duty 를 (RMP)에 첨가하여 다시 (RMP)를 최적화하는 방식을 반복하여, 제한된 수의 변수만으로 (MP)의 선형완화식을 최적화하게 된다. (RMP)에 추가할 duty 를 찾기위해 풀어야 하는 부문제는 계층구조의 그래프에서 최장경로를 찾는 문제로 변형되며, 이것은 다항식의 복잡도 안에 풀 수 있는 문제이다.

3.3 변수고정법

(MP)의 선형완화식을 최적화하는 것은 그 자체로도 상당한 시간을 필요로 하는 문제이지만 정수해를 보장해 주지 못한다. 실제로 선형완화식의 해를 얻은 경우 그 해가 정수가 아닐 경우, 정수해를 구하기 위한 추가적인 방법론이 요구된다. 본 연구에서는 문제의 정수해를 구하기 위한 간단하지만 강력한 방법인 변수고정법을 소개하며, 이 방법을 열생성기법과 같이 사용하여 실제 지하철회사에서 발생하는 승무계획문제의 최적정수해를 구해낼 수 있었다.

변수고정법은 몇 개의 변수값을 1 로 고정시키는 방법이다. 변수고정법을 사용하는 이유는 승무계획문제가 가지는 대칭성 때문이다. 정수계획문제들 중에는 여러 개의 최적정수해를 가지며 하나의 최적정수해에서 다른 최적정수해를 구하는 간단한 규칙이 있는 문제들이 있다. 그러한 문제의 경우에는 최적정수해 중 어느 하나만 구한다면 다른 해들을 구할 수 있으므로, 하나의 최적정수해를 찾는 것이 상당한 중요성을 갖는다. 지하철 승무계획 문제는 이러한 대칭성을 갖는 문제로 이해될 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 814 개의 trip 을 갖는 문제에 대하여 알고리듬을 적용해 보았다. 실험결과 문제의 최적정수해를 실제 산업현장에서 사용할 수 있을 정도의 빠른 시간안에 구할 수 있었다. 본 연구에서 제안한 알고리듬은 승무일정을 새로 작성하는 데에만 사용되는 것이 아니라 현재 운행중인 승무일정을 부분적으로 개선하는 데에도 사용되어질 수 있을 것이다. 이러한 모든 과정들은 현장에서의 승무계획보다 수십배 이상 빠른 것이므로 유연하게 승무일정을 변화시키는 것이 가능하게 되는 장점이 있다. 이러한 유연성으로 인하여 작업조건이나 승무조건의 변화가 발생할 때마다 쉽게 승무일정을 변경할 수 있고 결과적으로 작업자나 회사의 요구사항을 현장에 직접적으로 반영해 낼 수 있게 된다

참고 문헌

[1] R. Anbil, E. R. Tanga, E. L. Johnson, A global optimization approach to crew scheduling, IBM systems J. 31 (1991) 71-78
[2] Giovanni Andreatta, Francesco Mason, Path covering problems and testing of printed circuits, Discrete Applied Mathematics 62 (1995) 5-13.
[3] Nagraj Balakrishnan, Richard T. Wong, A network model for the rotating workforce scheduling problem, Networks vol. 20. (1990) 25-42.
[4] C. Barnhart, E. L. Johnson, G. L. Nemhause, Martin W. P. Savelsbergh, P. H. Vance, Branch-and-Price: Column generation for solving huge integer programs, Operations Research vol. 46, No.3, May-June (1998) 316-329.
[5] J. E. Beasley, B. Cao, A tree search algorithm for the crew scheduling problem, European journal of Operational Research 94 (1996) 517-526.
[6] Lucio Bianco, Maurizio Bielli, Aristide Mingozzi, Salvatore Ricciardelli, Massimo Spadoni, A heuristic procedure for the crew rostering problem, European Journal of Operational Research 58(1992) 272-283
[7] Alberto Caprara, Matteo Fischetti, Paolo Toth, Daniele Vigo, Algorithms for railway crew managements, Mathematical Programming 79 (1997) 125-141.
[8] M. R. Emamy-K, and A. I. Ramirez, A special class of set covering problems, Computational Optimization and Applications 5 (1996) 79-88.
[9] I. Gershkoff, Optimizing flight crew schedules, Interfaces 5 (1989) 29-43.
[10] K. Hoffman, M. Padberg, LP-based combinatorial problem solving, Annals of Operations Research 4 (1985/6) 145-194.
[11] K. Hoffman, M. Padberg, Solving airline crew scheduling problems by branch-and-cut Management Science 39 (1993) 657-682.
[12] Sylvie Lavoie, Michel Minoux, Edouard Odier, A new approach for crew pairing problems by column generation with an application to air transportation, European Journal of Operational Research 35 (1988) 45-58.
[13] Ana Paias, J. Paixao, State space relaxation for set covering problems related to bus driver schedule, European Journal of Operational Research 71 (1993) 303-316.
[14] Jose Paixao, Margarida Pato, A structural lagrangean relaxation for two-duty period

bus driver scheduling problems. European Joruna1 of Operational Research 39 (1989) 213-222.

[15] Kyungchul Park, Seokhoon Kang, Sungsoo Park, An integer programing approach to the bandwidth packing problem, Management Science vol. 42, No. 9, September (1996) 1277-1291.

[16] Martin Savelsbergh, A Branch-and-Price algorithm for the generalized assignment problem, Operations Research vol. 45, No. 6, Nov-Dec (1997) 831-841.

[17] P. H. Vance, C. Barnhart, E. L. Johnson, G. L. Nemhauser, Airling crew scheduling: A new formulation and decomposition algorithm, Operations Research Vol.45, No. 2, March-April (1997) 188-200.