

DFT 전력스펙트럼 평균화를 기반으로 한 미지의 주파수를 가진 단파대 협대역 신호의 검출

김명진, 김성필, 오종갑
한국외국어대학교 정보통신공학과

Detection of HF Narrowband Signal with Unknown Frequency Using DFT Power Spectrum Averaging

Myoung Jin Kim, Sung Pil Kim, Jong Kap Oh
Dept. of Information & Communications Eng., Hankuk University of Foreign Studies

요약

본 논문에서는 미지의 반송파주파수를 가진 협대역 신호의 존재를 광대역에서 검출하는 문제를 고려하였다. DFT 전력 스펙트럼을 평균화하여 주파수 영역에서 Neyman-Pearson criterion 을 사용하여 신호를 검출하는 방법을 사용하였다. 평균화된 DFT 스펙트럼의 통계적 특성과 검출 threshold 및 검출 확률을 분석하여 보았다.

I. 서론

무선통신이 활성화, 보편화되면서 주파수지원의 효율적인 관리의 필요성이 증대되고 있으며, 합법적인 전파사용이 이루어지고 있는지 국가적으로 감시하고 통제할 필요가 있다. HF 대역은 매우 다양한 신호들이 규칙적 또는 불규칙적으로 출현하고 있으며, 이러한 신호들을 광대역에서 검출하고 식별하여 분류하는 시스템의 개발이 필요하다.

본 논문에서는 단파대에서 미지 반송파 주파수를 가지고 출현하는 협대역 신호를 광대역에서 고속으로 검출하는 문제를 고려하였다. 신호의 주파수 및 펄스폭과 같은 파라미터에 대한 사전 지식이 없으며, 넓은 대역을 관측하는 것을 고려하여, DFT(Discrete Fourier Transform) 스펙트럼 평균화를 기반으로 한 주파수영역 신호검출방식을 적용한다. 평균화된 스펙트럼의 통계적 특성의 분석과 Neyman-Pearson 검출이론을 적용할 때 threshold 와 false alarm 확률 및 신호검출 확률의 관계에 대하여 알아보았다.

II. 복소 샘플링 및 대역통과 DFT

1. 대역통과 신호 및 잡음

대역통과 신호 $s(t)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$s(t) = V(t) \cos\{2\pi f_c t + \phi(t)\} \quad (1)$$

신호를 quadratic form 으로 표현하면

$$\begin{aligned} s(t) &= V(t) \cos \phi(t) \cos(2\pi f_c t) - V(t) \sin \phi(t) \sin(2\pi f_c t) \\ &= I(t) \cos(2\pi f_c t) - Q(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $I(t) = V(t) \cos \phi(t)$ 는 in-phase 성분이고, $Q(t) = V(t) \sin \phi(t)$ 는 quadrature-phase 성분이다. 신호를 complex envelope 로 표현하면

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= V(t) e^{j\phi(t)} = V(t) \cos \phi(t) + j V(t) \sin \phi(t) \\ &= I(t) + j Q(t) \end{aligned} \quad (3)$$

와 같이 된다. 정현파 신호의 경우 $s(t)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$s(t) = V \cos(2\pi f_c t + \phi) \quad (4)$$

대역통과 Gaussian 잡음은 two-sided power spectral density 가 $N_0/2$ 인 white Gaussian noise 가 중심주파수가 f_0 인 대역통과 필터를 통과한 신호로 모델링 할 수 있으며 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$n(t) = n_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - n_s(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (5)$$

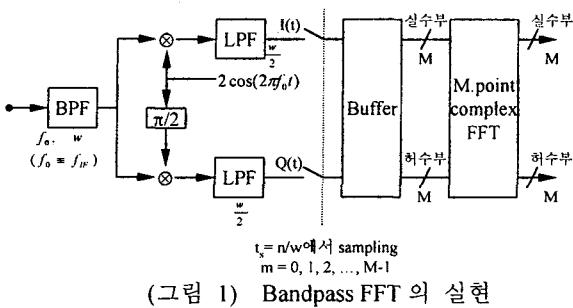
여기서 $n_c(t)$ 는 in-phase 성분이고, $n_s(t)$ 는 quadrature-phase 성분이다. 잡음을 stationary, zero-mean process 라고 가정하고 대역폭을 W 라 하면 다음과 같은 특성을 가짐을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} E\{n(t)\} &= E\{n_c(t)\} = E\{n_s(t)\} = 0 \\ Var\{n(t)\} &= Var\{n_c(t)\} = Var\{n_s(t)\} = \sigma^2 = N_0 W \end{aligned} \quad (6)$$

2. 복소 샘플링 및 대역통과 DFT 의 연산

대역폭이 W [Hz]이고 중심 주파수가 f_0 인 대역통과 신호의 FFT 연산을 위하여 먼저 샘플링을 해야 하는데 고주파 신호의 샘플링을 저속의 A/D 변환기를 이용하여 샘플링하기 위하여 복소 샘플링을 할 수 있으며 복소 샘플링을 거쳐서 FFT 연산을 수행하는 시스템의 블력도를

(그림 1)에 보인다[1].



대역통과 신호 $r(t)$ 를 in-phase 성분신호 $I(t)$ 와 quadrature-phase 성분신호 $Q(t)$ 를 사용하여

$$r(t) = I(t) \cos(2\pi f_0 t) - Q(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (7)$$

과 같이 표현할 수 있는데, complex envelope 을 사용하여 표현하면 간단해진다.

$$r(t) \leftrightarrow \tilde{r}(t) = I(t) + jQ(t) \quad (8)$$

$I(t)$ 와 $Q(t)$ 는 실수 값은 가진 기저대역 신호로서 $r(t)$ 로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} I(t) &= \{2r(t) \cos(2\pi f_0 t)\}_{LPF} \\ Q(t) &= \{-2r(t) \sin(2\pi f_0 t)\}_{LPF} \end{aligned} \quad (9)$$

대역통과 신호 $r(t)$ 의 대역폭이 W 이므로 기저 대역 신호인 $I(t)$ 와 $Q(t)$ 는 대역폭이 $W/2$ 가 되며 각각 W [Hz]의 주파수로 샘플링 할 수 있다.

복소 신호 $\tilde{r}(t) = I(t) + jQ(t)$ 를 주기 $\Delta t = 1/W$ 로 샘플링한 이산신호 $\{\tilde{r}_m, m = 0, \dots, M-1\}$ 은 다음과 같다.

$$\tilde{r}_m = \tilde{r}(t)|_{t=m\Delta t} = I\left(\frac{m}{W}\right) + jQ\left(\frac{m}{W}\right) \equiv I_m + jQ_m \quad (10)$$

$\{\tilde{r}_m\}$ 에 대한 FFT 를 $\{X(k)\}$ 라 하면

$$X(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{r}_m e^{-j\frac{2\pi mk}{M}} \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (11)$$

신호를 주기 $1/W$ 로 샘플링하고 M point FFT 분석을 하는 경우 분석 시구간은 M/W [sec]이 되며 주파수 분해능은 W/M [Hz]이 된다. $X(k)$ 를 $A(k) + jB(k)$ 로 표현하면 $A(k)$ 와 $B(k)$ 는 다음과 같이 된다.

$$A(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \left[I_m \cos\left(\frac{2\pi mk}{M}\right) + Q_m \sin\left(\frac{2\pi mk}{M}\right) \right] \quad (12)$$

$$B(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \left[Q_m \cos\left(\frac{2\pi mk}{M}\right) - I_m \sin\left(\frac{2\pi mk}{M}\right) \right]$$

III. DFT 출력의 통계적 특성

수신신호를 주파수 f_c 의 정현파 신호에 잡음이 더해진 신호라고 가정하자. 수신신호를 중

심주파수가 f_0 인 대역통과필터를 통과시키면 수신신호 $r(t)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} r(t) &= V \cos[2\pi f_c t + \phi] + n_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - n_s(t) \sin(2\pi f_0 t) \\ &= I(t) \cos(2\pi f_0 t) - Q(t) \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서

$$\begin{aligned} I(t) &= V(t) \cos[2\pi(f_c - f_0)t + \phi(t)] + n_c(t) \\ Q(t) &= V(t) \sin[2\pi(f_c - f_0)t + \phi(t)] + n_s(t) \end{aligned} \quad (14)$$

가 된다. 신호 $\tilde{r}(t) = I(t) + jQ(t)$ 를 샘플링하고 FFT 변환을 하여 얻어진 전력 스펙트럼의 확률적 분석을 구해 보자.

o FFT 출력 $X(k)$ 의 실수부 $A(k)$

$$\begin{aligned} A(k) &= \sum_{m=0}^{M-1} \{V_m \cos[2\pi(f_c - f_0) \frac{mT}{M} + \phi_m] \cos\left(\frac{2\pi mk}{M}\right) \\ &\quad + V_m \sin[2\pi(f_c - f_0) \frac{mT}{M} + \phi_m] \sin\left(\frac{2\pi mk}{M}\right) \\ &\quad + n_{cm} \cos\left(\frac{2\pi mk}{M}\right) + n_{sm} \sin\left(\frac{2\pi mk}{M}\right)\} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} V_m \cos\left(\frac{2\pi m}{M}[(f_c - f_0)T - k] + \phi_m\right) + N_c(k) \\ &= S_c(k) + N_c(k) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서

$$N_c(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \{n_{cm} \cos\left(\frac{2\pi mk}{M}\right) + n_{sm} \sin\left(\frac{2\pi mk}{M}\right)\} \quad (16)$$

$X(k)$ 의 실수부 $A(k)$ 에서 잡음성분 $N_c(k)$ 는 Gaussian 확률변수가 된다. $N_c(k)$ 의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$E\{N_c(k)\} = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Var\{N_c(k)\} &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{M-1} E\{ [n_{cr} \cos\left(\frac{2\pi mk}{M}\right) + n_{sr} \sin\left(\frac{2\pi mk}{M}\right)] \\ &\quad \times [n_{cr} \cos\left(\frac{2\pi mr}{M}\right) + n_{sr} \sin\left(\frac{2\pi mr}{M}\right)] \} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{M-1} \sigma_n^2 \delta(m-r) = M\sigma_n^2 \end{aligned} \quad (18)$$

o FFT 출력 $X(k)$ 의 허수부 $B(k)$

$$\begin{aligned} B(k) &= \sum_{m=0}^{M-1} V_m \sin\left(\frac{2\pi m}{M}[(f_c - f_0)T - k] + \phi_m\right) + N_s(k) \\ &= S_s(k) + N_s(k) \end{aligned} \quad (19)$$

여기서

$$N_s(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \{n_{sm} \cos\left(\frac{2\pi mk}{M}\right) - n_{cm} \sin\left(\frac{2\pi mk}{M}\right)\} \quad (20)$$

$X(k)$ 의 실수부 $B(k)$ 에서 잡음성분 $N_s(k)$ 는 Gaussian 확률변수가 된다. $N_s(k)$ 의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$E\{N_s(k)\} = 0 \quad (21)$$

$$Var\{N_s(k)\} = M\sigma_n^2 \quad (22)$$

o FFT 전력스펙트럼 $|X(k)|^2$ 의 확률분포 특성

$$|X(k)|^2 = [S_c(k) + N_c(k)]^2 + [S_s(k) + N_s(k)]^2 \quad (23)$$

인데, 신호를 정현파 신호로 가정하면 $S_c(k)$ 와 $S_s(k)$ 는 다음과 같다.

$$S_c(k) = \sum_{m=0}^{M-1} V \cos\left\{\frac{2\pi m}{M}[(f_c - f_0)T - k] + \phi\right\} \quad (24)$$

$$S_s(k) = \sum_{m=0}^{M-1} V \sin\left\{\frac{2\pi m}{M}[(f_c - f_0)T - k] + \phi\right\}$$

$|X(k)|^2$ 에서 신호성분의 전력 스펙트럼에 대하여 알아 보기로 하자. 신호의 반송파 주파수를 $f_c = f_0 + (k_s + \delta) \Delta f$, $0 \leq \delta < 1$ 과 같이 표현된다고 가정하자. k_s 는 $(f_c - f_0)T$ 의 정수 부분이다.

$$\begin{aligned} |S(k)|^2 &= V^2 \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{M-1} \cos\left\{\frac{2\pi(m-r)}{M}(k_s + \delta - k)\right\} \\ &= M^2 V^2 \left\{ \frac{\sin(\pi(k_s + \delta - k))}{M \sin(\pi(k_s + \delta - k)/M)} \right\}^2 \end{aligned} \quad (25)$$

과 같이 되어 M 이 충분히 크고 k 가 k_s 에 근접하면 위 식은 다음과 같이 된다.

$$|S(k)|^2 \approx M^2 V^2 \operatorname{sinc}^2(k_s + \delta - k) \quad (26)$$

따라서 $\delta = 0$ 이면, 즉 신호의 주파수 f_c 가 관측 대역의 중심주파수 f_0 로부터 $\Delta f (= 1/T)$ 의 정수 배 떨어져 있다면 신호의 스펙트럼은

$$|S(k)|^2 = \begin{cases} M^2 V^2, & k = k_s \\ 0, & k \neq k_s \end{cases} \quad (27)$$

과 같이 된다. 신호의 주파수가 $\delta \neq 0$ 인 경우 신호의 스펙트럼에 누설현상이 일어나서 FFT 전력 스펙트럼 출력이 감소하며 따라서 FFT 출력 SNR이 감소한다. FFT 원도우 길이를 길게 설정하여 주파수 분해능을 좋게 하면 이러한 현상을 줄일 수 있다. 그러나 뒤에 기술하는 것처럼 FFT 전력 스펙트럼을 N 회 평균화 하는 경우 원도우 길이를 크게 선택하면 신호가 전체 관측 시구간 중에서 일정 시간 동안만 존재하는 경우 평균화된 스펙트럼에서 SNR이 감소하게 되므로, 전체 관측 시구간, 원도우 길이 및 평균화 회수는 적절히 선택해야 한다.

한편, $N_c(k)$ 와 $N_s(k)$ 는 평균이 0이고 분산이 $M\sigma^2$ 인 Gaussian 확률변수이며 $N_c(k)$ 와 $N_s(k)$ 가 독립이므로 $A(k)$ 와 $B(k)$ 도 역시 독립 Gaussian 확률변수가 되어 식 (23)으로부터 $|X(k)|^2$ 은 자유도가 2 인 noncentral chi-squared 확률변수가 된다[2].

IV. 평균화된 DFT 전력 스펙트럼의 통계적 특성 및 Neyman-Pearson Criterion

1. 잡음만 있는 경우의 특성과 False Alarm 확률

수신신호에 백색 가우시안 잡음만 있는 경우 크기를 제곱한 FFT 출력 $|X(k)|^2$ 은 해당 주파수 bin에서 다음 식과 같은 평균과 분산을 갖는 자유도가 2 인 gamma 분포 확률변수이다.

$$E\{|X(k)|^2\} = 2M\sigma_n^2 \quad (28)$$

$$Var\{|X(k)|^2\} = 4(M\sigma_n^2)^2$$

이와 같은 FFT 전력 스펙트럼을 N 회 더하여 평균을 취한 평균 전력 스펙트럼 $Y(k)$ 는 자유도가 $2N$ 인 gamma 분포를 가지며 식 (30)과 같은 평균과 분산을 가진다.

$$Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^N |x_l(k)|^2 \quad (29)$$

$$E\{Y(k)\} = 2M\sigma_n^2$$

$$Var\{Y(k)\} = \frac{4M\sigma_n^2}{N}$$

$Y(k)$ 의 확률밀도함수는 식 (31)과 같이 된다.

$$p_0(y) = \frac{y^{N-1}}{\sigma_1^{2N} 2^N \Gamma(n)} e^{-\frac{y}{2\sigma_1^2}} \quad (31)$$

여기서 σ_1 은 다음과 같이 정의한다.

$$\sigma_1^2 = \frac{M\sigma_n^2}{N} \quad (32)$$

신호검출을 위해 Neyman-Pearson criterion 을 적용하기로 하자[2]. False alarm 확률은 식 (33)과 같이 표현된다.

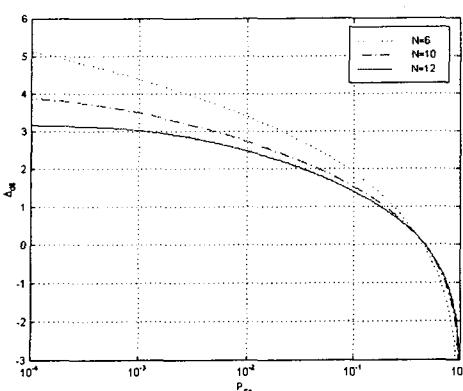
$$P_{FA} = \int_{\eta}^{\infty} p_0(y) dy \quad (33)$$

신호검출을 위한 threshold 를 $Y(k)$ 의 평균레벨 보다 Δ dB 높게 설정하면 false alarm 확률은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} P_{FA} &= \int_{\eta}^{\infty} p_0(y) dy = P_r \left\{ Y_{dB} > \bar{Y}_{dB} + \Delta_{dB} \right\} \\ &= P_r \left\{ \chi^2(2N) > 2N \cdot \Delta \right\} \quad \Delta = 10^{\frac{\Delta_{dB}}{10}} \\ &= \int_{2N\Delta}^{\infty} \frac{s^{N-1}}{2^N \Gamma(N)} e^{-\frac{s}{2}} ds \end{aligned} \quad (34)$$

여기서 $\chi^2(2N)$ 은 자유도가 2 인 chi-squared 확률변수를 의미한다.

(그림 2)에 평균화된 전력스펙트럼에서 평균레벨로부터의 threshold offset 대 false alarm 확률의 관계를 FFT 스펙트럼의 평균회수 N 에 따라 구한 결과를 보인다. 평균 회수가 클수록 $Y(k)$ 의 분산이 작아져서 특정 threshold에서 false alarm 확률이 작아지는 것을 확인할 수 있다.



(그림 2) 평균화된 전력 스펙트럼에서 threshold offset 대 false alarm 확률

2. 신호가 있는 경우의 특성과 신호검출 확률
목적신호가 수신신호내에 포함되어 있는 경우, FFT 전력스펙트럼을 N 회 더하여 평균을 취한 평균 전력스펙트럼은 다음과 같이 표현된다.

$$Y(k) = \sum_{l=1}^N \left| \frac{S(k)}{\sqrt{N}} + \frac{X_{lc}(k)}{\sqrt{N}} + j \frac{X_{ls}(k)}{\sqrt{N}} \right|^2 \quad (35)$$

따라서 $Y(k)$ 는 자유도가 2인 noncentral chi-squared 확률변수이며 noncentral 파라미터는

$$\lambda = N \left(\frac{S(k)}{\sqrt{N}} \right)^2 = S^2(k) \quad (36)$$

가 된다. $Y(k)$ 의 평균과 확률밀도 함수는 식 (37)과 식 (38)과 같이 된다.

$$E[Y] = 2N \left(\frac{M\sigma_n^2}{N} \right) + \lambda = 2M\sigma_n^2 + S^2(k) \quad (37)$$

$$p_1(y) = \frac{1}{2\sigma_1^2} \left(\frac{y}{\lambda} \right)^{\frac{N-1}{2}} \exp \left(-\frac{\lambda+y}{2\sigma_1^2} \right) I_{N-1} \left(\frac{\sqrt{\lambda}y}{\sigma_1^2} \right) \quad (38)$$

$$\sigma_1^2 = \frac{M\sigma_n^2}{N} \quad (39)$$

여기서 $I_n(\cdot)$ 은 차수가 n 인 제 1 종 modified Bessel 함수이다. 목적신호 존재시 검출 확률은 식 (40)과 같이 표현된다.

$$P_D = \int_y^\infty p_1(y) dy = \int_y^\infty \frac{1}{2\sigma_1^2} \left(\frac{y}{\lambda} \right)^{\frac{N-1}{2}} \exp \left(-\frac{\lambda+y}{2\sigma_1^2} \right) I_{N-1} \left(\frac{\sqrt{\lambda}y}{\sigma_1^2} \right) dy \quad (40)$$

식 (40)에서 변수를 치환하면 검출 확률은 식 (41)와 같이 표현된다.

$$P_D = \int_z^\infty \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\lambda'} \right)^{\frac{N-1}{2}} \exp \left(-\frac{\lambda'+z}{2} \right) I_{N-1} (\sqrt{\lambda'} z) dz \quad (41)$$

여기서 입력 SNR과 출력 SNR을

$$(SNR)_{in} = \frac{A^2}{\sigma_n^2}, \quad (SNR)_{out} = \frac{A^2(k)}{M\sigma_n^2} = \frac{A^2(k)}{\sigma^2} \quad (42)$$

과 같이 정의하면

$$\lambda' = \frac{NA^2(k)}{M\sigma_n^2} = N(SNR)_{out} \quad (43)$$

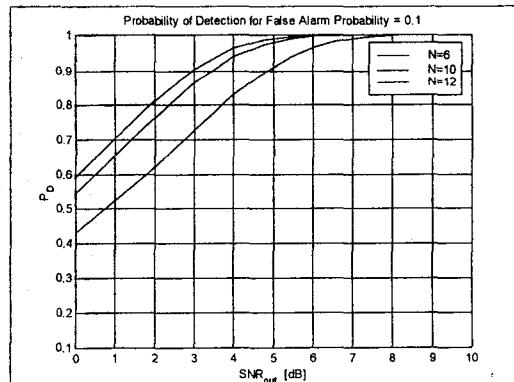
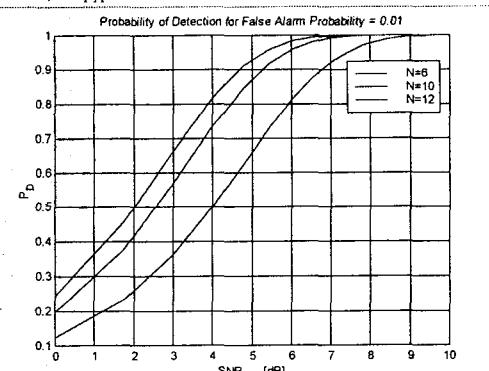
와 같이 되어 검출확률을 출력 SNR의 함수로 표현할 수 있다.(그림 3)과 (그림 4)에 false alarm 확률을 0.1과 0.01로 결정하여 구해진 검출 threshold에 대하여 신호검출 확률을 보인다.

V. 결론

본 논문에서는 미지의 반송파 주파수를 가진 정현파 신호의 존재를 광대역에서 검출하는 문제를 고려하였다. DFT 전력 스펙트럼을 평균화하여 주파수 영역에서 Neyman-Pearson criterion을 사용하여 신호를 검출하는 방법을 사용하였다. 평균화된 DFT 스펙트럼의 통계적 특성과 검출 threshold 및 검출 확률을 분석하여 보았다.

참고문헌

- [1] L. W. Couch II, *Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed., Macmillan, New York, 1993.
- [2] A. D. Whalen, *Detection of Signals in Noise*, Academic Press, New York, 1971.

(그림 2) $P_{FA} = 0.1$ 로 하였을 때의 신호검출 확률(그림 3) $P_{FA} = 0.01$ 로 하였을 때의 신호검출 확률