

계층적 하이퍼큐브의 해밀턴이안 성질과 병렬처리를 위한 성질 분석

김종석^{*} · 이형옥^{**} · 허영남^{*}

^{*}순천대학교 컴퓨터학과

^{**}한국전산원 국가망사업부

Property Analysis for Parallel Processing and Hamiltonian Cycles of Hierarchical Cubic Network

Kim Jong-Seok^{*} · Lee Hyeong-Ok^{**} · Heo Yeong-Nam^{*}

^{*}Dept of Computer Science, Sunchon National University

^{**}Dept of KII Management, National Computerization Agency

E-mail : rockhee@sunchon.ac.kr

요 약

본 논문에서는 $HCN(n,n)$ 이 Hamiltonian Cycles을 갖는다는 것을 증명하고, $HCN(n,n)$ 과 $HFN(n,n)$ 사이의 임베딩을 분석하고, $HFN(n,n)$ 과 $2n$ -hypercube 사이의 임베딩을 분석한다. $HCN(n,n)$ 을 $HFN(n,n)$ 에 연장을 3에 임베딩 가능함을 증명하고, $HFN(n,n)$ 을 $HCN(n,n)$ 에 임베딩하는 비용이 $O(n)$ 임을 증명하며, $HFN(n,n)$ 을 $2n$ -hypercube에 연장을 3에 임베딩 가능함을 증명하고, $2n$ -hypercube을 $HFN(n,n)$ 에 임베딩하는 비용이 $O(n)$ 임을 증명한다.

ABSTRACT

In this paper, we will propose that $HCN(n,n)$ gets Hamiltonian Cycles and analyze embedding among $HCN(n,n)$ and $HFN(n,n)$, and $HFN(n,n)$ and $2n$ -hypercube. Further, we will prove that $HCN(n,n)$ can be embedded into $HFN(n,n)$ with dilation 3 and the cost for $HFN(n,n)$ to be embedded into $HCN(n,n)$ will be $O(n)$, and $HFN(n,n)$ can be embedded into $2n$ -hypercube with dilation 3 and the cost for $2n$ -hypercube to be embedded into $HFN(n,n)$ will be $O(n)$.

1. 서 론

현대의 과학과 공학 분야에서는 빠른 계산능력을 가진 컴퓨터를 필요로 하게 되어 여러 개의 마이크로프로세서를 사용하여 병렬성을 추구하는 다중컴퓨터(multicomputer) 개념이 도입되었다. 다중컴퓨터는 개별적인 계산능력을 가진 노드와 각 노드들간의 데이터의 교환을 위한 통신 링크들로 구성되어 있다.

다중컴퓨터의 상호연결망은 전체 시스템에서 노드들 간의 상대적인 위치와 연결 형태를 나타내므로, 다중컴퓨터 전체의 성능을 결정하는 중요한 역할을 한다. 널리 알려진 상호연결망으로 링,

메쉬, 하이퍼큐브, 재귀원형군, 스타 등이 있는데, 상호연결망은 다중컴퓨터의 프로세서를 노드로, 통신 링크를 에지로 표현하는 무방향 그래프로 표현 가능하다. 이러한 상호연결망을 평가하는 망 척도로는 분지수(degree), 연결도(connectivity), 대칭성(symmetric), 지름(diameter), 망비용(network cost), 방송(broadcasting), 임베딩(embedding) 등이 있다[1,2].

연결망 H 의 노드 개수가 n 개라고 가정할 때 시작 노드 k 로부터 출발하여 $n-1$ 개의 노드를 노드 중복 없이 한번씩 통과하여 시작 노드 k 에 도착하는 경로를 Hamiltonian Cycles이라고 한다.

하이퍼큐브는 노드 및 에지 대칭이고, 임베딩

관점에 있어서 링, 트리, 메쉬 등과 같은 다른 연결망 구조들이 효율적으로 임베딩 될 수 있다는 장점이 있지만, 노드 개수의 증가에 따른 분지수의 증가로 인해 네트워크의 망비용이 증가하는 단점이 있다. 이러한 단점을 개선하고자 하이퍼큐브의 지름을 1/2로 개선한 Folded-hypercube[3]가 제안되었고, 하이퍼큐브의 장점을 가지면서 망비용을 개선한 상호 연결망인 Hierarchical Cubic Network $HCN(n,n)$ [4,5]와 Hierarchical Folded-hypercube Network $HFN(n,n)$ [6]이 제안되었다.

상호 연결망의 임베딩은 어떤 연결망 G 가 다른 연결망 H 에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 어떤 특정한 연결망을 다른 연결망에 사상(mapping)하는 것이다. 연결망 G 가 연결망 H 에 적은 비용으로 임베딩 가능하다는 것은 연결망 G 에서 개발된 알고리즘을 연결망 H 에서 적은 비용으로 효율적으로 이용할 수 있기 때문에 상호 연결망에서 임베딩 문제는 매우 중요하다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 관련 연구에 대하여 논하고 3장에서는 $HCN(n,n)$ 이 Hamiltonian Cycles을 가짐을 증명하고, 4장에서는 $HCN(n,n)$ 과 $HFN(n,n)$ 사이의 임베딩과 $2n$ -차원 하이퍼큐브 Q_{2n} 와 $HFN(n,n)$ 사이의 임베딩을 제안하고 분석하며 5장에서 결론을 맺는다.

II. 관련연구

1. 하이퍼큐브

하이퍼큐브 연결망은 노드 및 에지 대칭이고 단순한 재귀적 구조를 가지고 있어서 각종 응용 분야에서 요구하는 통신망 구조를 쉽게 제공할 수 있는 장점이 있어 기존의 연구용 및 상용 시스템에 널리 사용되고 있다.

n -차원 하이퍼큐브 Q_n 는 2^n 개의 노드와 $n2^{n-1}$ 개의 에지로 구성된다. 각 노드의 주소는 n -비트 이진수로 표현될 수 있고, 임의의 두 노드의 주소가 정확히 1 비트만 다를 때 그들 사이에 에지가 존재하며, 분지수와 지름이 각각 n 이고 망비용은 n^2 이다[7,8,9,10].

하이퍼큐브의 단점은 분지수에 비해 지름과 노드간의 평균 거리가 짧지 않다는 것이다. 이것은 하이퍼큐브가 에지를 효율적으로 사용하지 못함을 의미한다. 이러한 문제를 극복하기 위한 연결망으로 Folded-하이퍼큐브, $HCN(n,n)$, $HFN(n,n)$ 등이 제안되었다.

2. Folded-하이퍼큐브

Folded-하이퍼큐브는 하이퍼큐브의 각 노드에 한 개의 부가적인 에지를 추가한 것으로, 노드들의 주소는 보수관계에 있다. n 차원 하이퍼큐브의 지름과 비교할 때 Folded-하이퍼큐브의 지름은 절반으로 줄어든다.

3. $HCN(n,n)$

$HCN(n,n)$ 은 n -차원 하이퍼큐브 Q_n 를 기본 모듈로 사용한다. $HCN(n,n)$ 은 2^{2n} 개의 노드들을 포함하고 $(n+1)2^{2n-1}$ 개의 에지들을 포함하며, 분지수는 $n+1$ 이다. $HCN(n,n)$ 의 각 노드는 $HCN(I,J)$ 와 같이 두 개의 주소로 구성이 된다. I 는 기본 모듈을 인식하고, J 는 기본 모듈 내의 노드를 인식한다. 기본 모듈 안의 에지들은 내부 에지라고 말한다. 두 개의 기본 모듈 사이의 에지들은 외부 에지(external link)라고 한다. 이 외부 에지들은 diameter link들과 non-diameter link들로 나뉜다. diameter link는 조건 $0 \leq I \leq (2^n - 1)$ 와 $0 \leq J \leq (2^n - 1)$ 을 만족하는 노드 $HCN(I,I)$ 와 $HCN(J,J)$ 사이의 외부 에지를 말하는데 I 와 J 는 서로 보수 관계이다. diameter link가 아닌 외부 에지는 $HCN(I,J)$ 와 $HCN(J,I)$ 사이의 외부 에지로 non-diameter link로 불리운다. $m < n$ 이고 하이퍼큐브 2^m 개가 있을 때 $HCN(m,n)$ 과 같은 불완전한 HCN 을 가질 수도 있다. 본 논문에서는 모든 노드의 분지수가 동일한 정규연결망인 HCN 만을 말할 것이다.

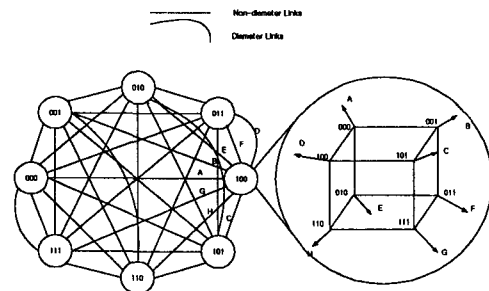


그림 1. $HCN(3,3)$ 의 구조

4. $HFN(n,n)$

$HFN(n,n)$ 은 $HCN(n,n)$ 과 유사한 구조를 가지고 있는데, 하이퍼큐브 대신 Folded-하이퍼큐브를 기본 모듈로 사용하고, $HCN(n,n)$ 의 구조에서 diameter link들을 제거한 연결망이다. $HFN(n,n)$ 은 2^{2n} 개의 노드들을 가지고 $(n+2)2^{2n-1} - 2^{n-1}$ 개의 에지들을 가지며, 분지수는 $n+2$ 이다.

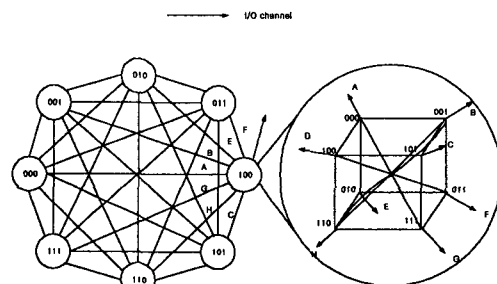


그림 2. $HFN(3,3)$ 의 구조

III. HCN(n,n)의 Hamiltonian Cycles

연결망 H의 노드 개수가 n개라고 가정할 때 시작 노드 k로부터 출발하여 n-1개의 노드를 노드 중복없이 한번씩 통과하여 시작 노드 k에 도착하는 경로를 Hamiltonian Cycles이라고 하는데 하이퍼큐브 연결망은 Hamiltonian Cycles을 가진다 [11,12]. HCN(n,n)은 하이퍼큐브를 기본 모듈로 사용하는데, 2^{2n} 개의 노드들을 포함하고, $(n+1)2^{2n-1}$ 개의 링크들을 포함하며, 분지수는 n+1이다.

정리 1 상호연결망 HCN(n,n)은 Hamiltonian Cycles을 가진다.

증명 n이 홀수일 때와 짝수일 때로 구분해서 증명한다.

경우 1 $n(n \geq 2)$ 이 홀수일 때 :

HCN(I,J) : I는 기본 모듈 자체 주소, J는 기본 모듈 내부의 주소라고 가정하고, 연결되는 순서에 따라 I1부터 In, J1부터 Jn이라 가정한다. 시작 모듈 I1은 하이퍼큐브이므로 해밀튼이안 사이클을 가지므로, 먼저 I1 내부의 해밀튼이안 경로를 결정한다. 이 때 I1과 J1의 비트스트링은 같아야 한다. J1과 연결되는 J2의 첫 번째 비트스트링은 같아야 하고, J2와 연결되는 J3의 첫 번째 비트스트링은 보수관계이며, J3와 연결되는 J4의 첫 번째 비트스트링은 같아야 하고, J4와 연결되는 J5의 첫 번째 비트스트링은 보수관계이어야 한다. 이와 같은 방법을 반복하여 I1 내부의 노드를 중복 없이 연결하면 마지막으로 도착하는 노드 Jn과 시작노드 J1의 첫 번째 비트스트링은 보수관계이어야 한다. I1과 J2가 diameter link로 연결되면 J2와 J3는 non-diameter link로 연결되고 J3와 J4는 다시 diameter link로 연결이 된다. 연결되는 J2, J3, ..., Jn 내부의 해밀튼이안 경로는 I1과 같다. 이와 같이 non-diameter link와 diameter link를 번갈아 사용하고, 지정해준 하이퍼큐브 내부의 해밀튼이안 경로에 따라 노드를 연결해 가면 노드 중복 없이 모든 노드를 연결하고 시작 노드에 도착할 수 있다.

경우 2 $n(n \geq 2)$ 이 짝수일 때 :

HCN(I,J) : I는 기본 모듈 자체 주소, J는 기본 모듈 내부의 주소라고 가정하고, 연결되는 순서에 따라 I1부터 In, J1부터 Jn이라 가정한다. 시작 모듈 I1은 하이퍼큐브이므로 해밀튼이안 사이클을 가지므로, 먼저 I1 내부의 해밀튼이안 경로를 결정한다. 이 때 I1과 J1의 비트스트링은 같아야 한다. 시작노드 J1부터 연결되는 $2^n/2$ 번째 노드까지의 첫 번째 비트스트링은 같아야 하고, $2^n/2+1$ 번째 노드부터 연결되는 도착노드 Jn까지의 첫 번째 비트스트링은 같아야 한다. J1부터 연결되는 2^{n-2} 번째 노드까지의 마지막 비트스트링은 같아야 하고, $2^{n-2}+1$ 번째 노드부터 2^{n-2} 번째 노드까지의

마지막 비트스트링이 같아야 하며, $22^{n-2}+1$ 번째 노드부터 연결되는 32^{n-2} 번째 노드까지의 마지막 비트스트링은 같아야 하고, $32^{n-2}+1$ 번째 노드부터 42^{n-2} 번째 노드까지의 마지막 비트스트링은 같아야 한다. J1과 $2^{n-2}+1$ 번째 노드의 마지막 비트스트링은 보수관계이고, J1과 $32^{n-2}+1$ 번째 노드의 마지막 비트스트링은 같으며, $2^{n-2}+1$ 번째 노드와 $22^{n-2}+1$ 번째 노드의 마지막 비트스트링은 같다. 이와 같은 방법을 반복하여 I1 내부의 노드를 중복 없이 연결하면 마지막으로 도착하는 노드 Jn과 시작노드 J1의 첫 번째 비트스트링은 보수관계이어야 한다. I1과 J2를 diameter link로 연결하고 J2와 J3는 non-diameter link로 연결하고, J3와 J4는 다시 diameter link로 연결되며, J4와 J5는 non-diameter link로 연결이 된다. J2의 해밀튼이안 경로는 I1의 역순이 되며, J2와 J3의 해밀튼이안 경로는 같지만 J4의 해밀튼이안 경로는 I1과 같다. 이와 같이 non-diameter link와 diameter link를 번갈아 사용하고, 지정해준 하이퍼큐브 내부의 해밀튼이안 경로에 따라 노드를 연결해 가면 노드 중복 없이 모든 노드를 연결하고 시작 노드에 도착할 수 있다.

이상의 두 가지 경우에서 증명한 바와 같이 상호 연결망 HCN(n,n)은 Hamiltonian Cycles을 가진다.

IV. 임베딩

HCN(n,n)의 임의의 노드 V의 주소는 (K,L)로, 기본 모듈을 나타내는 $K=k_1k_2...k_n$ 으로, 기본 모듈 내부의 노드는 $L=l_1l_2...l_n$ 으로 표현되고, HFN(n,n)의 임의의 노드 W의 주소는 (I,J)로, 기본 모듈을 나타내는 $I=i_1i_2...i_n$ 으로, 기본 모듈 내부의 노드는 $J=j_1j_2...j_n$ 으로 표현된다.

HCN(n,n)을 HFN(n,n)에 임베딩 할 때, HCN(n,n)의 노드 V를 HFN(n,n)의 노드 W로 사상하는 것은 노드 V의 $K(k_1k_2...k_n)$ 를 노드 W의 $I(i_1i_2...i_n)$ 로 사상하고, 노드 V의 $L(l_1l_2...l_n)$ 을 노드 W의 $J(j_1j_2...j_n)$ 로 사상함을 의미한다.

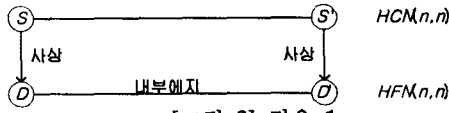
정리 1 HCN(n,n)은 HFN(n,n)에 연장을 3에 임베딩 가능하다.

증명 HCN(n,n)의 노드를 $S=(s_1s_2...s_n, s_{n+1}...s_{2n})$ 와 $S'=(s'_1s'_2...s'_n, s'_{n+1}...s'_{2n})$ 라 가정하고, HFN(n,n)의 노드를 $D=(d_1d_2...d_n, d_{n+1}...d_{2n})$ 와 $D'=(d'_1d'_2...d'_n, d'_{n+1}...d'_{2n})$ 라 가정하자.

HCN(n,n)의 노드 S를 HFN(n,n)의 노드 D로 HCN(n,n)의 노드 S'를 HFN(n,n)의 노드 D'로 사상했을 때, D의 비트스트링에서 D'의 비트스트링을 생성하는데 적용되는 HFN(n,n)의 에지의 개수를 통하여 연장을 분석한다. 노드 S와 인접한 S'의 비트스트링에 따라서 아래의 경우로 나눌 수

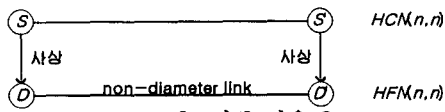
있다.

경우 1 $s_1s_2\dots s_n = s'_1s'_2\dots s'_n$ 이고 $s_{n+1}\dots s_{2n} \neq s'_{n+1}\dots s'_{2n}$ 일 때 : $HCN(n,n)$ 의 노드 S 가 사상된 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 의 비트스트링은 $(d_1d_2\dots d_i\dots d_n, d_{n+1}\dots d_j\dots d_{2n})$ 이고, 노드 S' 가 사상된 노드 D' 의 비트스트링은 $(d'_1d'_2\dots d'_i\dots d'_n, d'_{n+1}\dots d'_{n+1}\dots d'_{j'}\dots d'_{2n})$ 이다($1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 D 와 D' 의 비트스트링에서 $d_i = d'_i, 1 \leq i \leq n$ 이고, 오직 j 번째에 있는 비트만 서로 보수 관계이므로, 노드 D 와 D' 는 $HFN(n,n)$ 의 동일한 기본 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고, $HFN(n,n)$ 의 정의에 의해 노드 D 와 D' 는 서로 인접한 노드이다. 따라서 $HCN(n,n)$ 의 노드 S 와 S' 를 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 와 D' 에 각각 사상할 때 연장을 1에 임베딩 가능함을 알 수 있다.



[그림 3] 경우 1

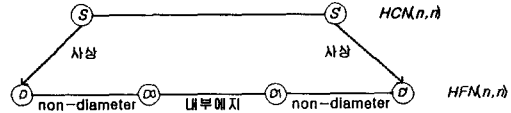
경우 2 $s_1s_2\dots s_n \neq s'_1s'_2\dots s'_n$ 이고 $s_1s_2\dots s_n = s'_{n+1}\dots s'_{2n}$ 이고 $s_{n+1}\dots s_{2n} = s'_1s'_2\dots s'_n$ 일 때 : $HCN(n,n)$ 의 노드 S 가 사상된 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 의 비트스트링은 $(d_1d_2\dots d_i\dots d_n, d_{n+1}\dots d_j\dots d_{2n})$ 이고, 노드 S' 가 사상된 노드 D' 의 비트스트링은 $(d'_1d'_2\dots d'_j\dots d'_n, d'_{n+1}\dots d'_{n+1}\dots d'_{j'}\dots d'_{2n})$ 이다($1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 D 와 D' 의 비트스트링에서 오직 i 번째에 있는 비트만 보수 관계이므로 D 와 D' 는 $HFN(n,n)$ 의 기본 모듈 외부에 있는 노드임을 알 수 있고, $d_1d_2\dots d_i\dots d_n = d'_{n+1}\dots d'_{n+1}\dots d'_{j'}$ 이고 $d_{n+1}\dots d_j\dots d_{2n} = d'_1d'_2\dots d'_j\dots d'_n$ 이므로 노드 D 와 D' 는 non-diameter link로 연결됨을 알 수 있다. 따라서 $HCN(n,n)$ 의 노드 S 와 S' 를 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 와 D' 에 각각 사상할 때 연장을 1에 임베딩 가능함을 알 수 있다.



[그림 4] 경우 2

경우 3 $s'_1s'_2\dots s'_n = s_{n+1}\dots s_{2n}$ 이고 $S = S'$ 일 때 : $HCN(n,n)$ 의 노드 S 가 사상된 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 의 비트스트링은 $(d_1d_2\dots d_i\dots d_n, d_{n+1}\dots d_j\dots d_{2n})$ 이고, 노드 S' 가 사상된 노드 D' 의 비트스트링은 $(d'_1d'_2\dots d'_i\dots d'_n, d'_{n+1}\dots d'_{n+1}\dots d'_{j'}\dots d'_{2n})$ 이다. 노드 D 와 D' 의 비트스트링에서 i 번째 비트가 보수 관계이므로 D 와 D' 는 $HFN(n,n)$ 의 기본 모듈 외부에 있는 노드임을 알 수 있다. 사상된 노드 $(d_1d_2\dots d_i\dots d_n, d_{n+1}\dots d_j\dots d_{2n})$ 를 기본 모듈 내부에 있는 노드 $(d_1d_2\dots d_i\dots d_n, d'_{n+1}\dots d'_{n+1}\dots d'_{j'}\dots d'_{2n})$ 에 연결한다. 그리고 연결된 노드 $(d_1d_2\dots d_i\dots d_n,$

$d'_{n+1}\dots d'_{j'}\dots d'_{2n})$ 를 non-diameter link에 의해 $(d'_{n+1}\dots d'_{j'}\dots d'_{2n}, d_1d_2\dots d_i\dots d_n)$ 에 연결한다. 연결된 노드 $(d'_{n+1}\dots d'_{j'}\dots d'_{2n}, d_1d_2\dots d_i\dots d_n)$ 를 모듈 내부에 있는 노드 $(d'_{n+1}\dots d'_{j'}\dots d'_{2n}, d'_1d'_2\dots d'_i\dots d'_n)$ 에 연결한다. $d'_{n+1}\dots d'_{j'}\dots d'_{2n}$ 와 $d'_1d'_2\dots d'_i\dots d'_n$ 는 같다고 했으므로 최종적으로 연결된 $(d'_{n+1}\dots d'_{j'}\dots d'_{2n}, d'_1d'_2\dots d'_i\dots d'_n)$ 은 $(d'_1d'_2\dots d'_i\dots d'_n, d'_{n+1}\dots d'_{j'}\dots d'_{2n})$ 와 같다. 따라서 $HCN(n,n)$ 의 노드 S 와 S' 를 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 와 D' 에 각각 사상할 때 연장을 3에 임베딩 가능함을 알 수 있다.



[그림 5] 경우 5

이상의 3가지 경우에서 증명한 바와 같이 $HCN(n,n)$ 을 $HFN(n,n)$ 에 임베딩을 하기 위해 필요한 연장은 3이다.

정리 2 $HFN(n,n)$ 을 $HCN(n,n)$ 에 임베딩하는 비용은 $O(n)$ 이다.

증명 $HFN(n,n)$ 의 노드를 $D=(d_1d_2\dots d_n, d_{n+1}\dots d_{2n})$, $D'=(d'_1d'_2\dots d'_n, d'_{n+1}\dots d'_{2n})$ 라 가정하고, $HCN(n,n)$ 의 노드를 $S=(s_1s_2\dots s_n, s_{n+1}\dots s_{2n})$ 와 $S'=(s'_1s'_2\dots s'_n, s'_{n+1}\dots s'_{2n})$ 라 가정하자.

$HFN(n,n)$ 의 노드 D 를 $HCN(n,n)$ 의 노드 S 로 $HFN(n,n)$ 의 노드 D' 를 $HCN(n,n)$ 의 노드 S' 로 사상했을 때, S 의 비트스트링에서 S' 의 비트스트링을 생성하는데 적용되는 $HFN(n,n)$ 의 에지의 개수를 통하여 연장을 분석한다. 노드 D 와 인접한 D' 의 비트스트링에 따라서 아래의 경우로 나눌 수 있다.

경우 1 $d_1d_2\dots d_n = d'_1d'_2\dots d'_n$ 이고 $d_{n+1}\dots d_{2n} = d'_n\dots d'_{2n}$ 일 때 : $HFN(n,n)$ 의 노드 D 가 사상된 $HCN(n,n)$ 의 노드 S 의 비트스트링은 $(s_1s_2\dots s_i\dots s_n, s_{n+1}\dots s_j\dots s_{2n})$ 이고, 노드 d' 가 사상된 노드 S' 의 비트스트링은 $(s'_1s'_2\dots s'_i\dots s'_n, s'_{n+1}\dots s'_{j'}\dots s'_{2n})$ 이다($1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 S 와 S' 의 비트스트링에서 $s_i = s'_i, 1 \leq i \leq n$ 이고, $s_{n+1}\dots s_j\dots s_{2n}$ 과 $s'_{n+1}\dots s'_{j'}\dots s'_{2n}$ 이 보수 관계에 있으므로 노드 S 와 S' 는 $HCN(n,n)$ 의 동일한 기본 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있다. $HCN(n,n)$ 의 기본 모듈은 하이퍼큐브인데, 하이퍼큐브 내의 임의의 한 노드에서 보수 관계에 있는 노드로 연결을 할 때는 n 개의 에지가 필요

하다. 따라서 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 와 D' 를 $HCN(n,n)$ 의 노드 S 와 S' 에 각각 사상할 때 연장을 n 에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

경우 2 $d_1d_2...d_n = d'_1d'_2...d'_n$ 이고 $d_{n+1}...d_{2n} \neq d'_{n+1}...d'_{2n}$ 일 때 :

$HFN(n,n)$ 의 노드 D 가 사상된 $HCN(n,n)$ 의 노드 S 의 비트스트링은 $(s_1s_2...s_i...s_n s_{n+1}...s_j...s_{2n})$ 이고, 노드 D' 가 사상된 노드 S' 의 비트스트링은 $(s'_1s'_2...s'_i...s'_n s'_{n+1}...s'_j...s'_{2n})$ 이다($1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 S 와 S' 의 비트스트링에서 $s_i = s'_i, 1 \leq i \leq n$ 이고, 오직 j 번째에 있는 비트만 서로 보수 관계이므로, 노드 S 와 S' 는 $HCN(n,n)$ 의 동일한 기본 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고, $HCN(n,n)$ 의 정의에 의해 노드 S 와 S' 는 서로 인접한 노드이다. 따라서 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 와 D' 를 $HCN(n,n)$ 의 노드 S 와 S' 에 각각 사상할 때 연장을 1에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

경우 3 $d_1d_2...d_n \neq d'_1d'_2...d'_n$ 이고 $d_1d_2...d_n = d'_{n+1}...d'_{2n}$ 이고 $d_{n+1}...d_{2n} = d'_1d'_2...d'_n$ 일 때 : $HFN(n,n)$ 의 노드 D 가 사상된 $HCN(n,n)$ 의 노드 S 의 비트스트링은 $(s_1s_2...s_i...s_n s_{n+1}...s_j...s_{2n})$ 이고, 노드 D' 가 사상된 노드 S' 의 비트스트링은 $(s'_1s'_2...s'_i...s'_n s'_{n+1}...s'_j...s'_{2n})$ 이다($1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 S 와 S' 의 비트스트링에서 $s_i \neq s'_i$ 이므로 S 와 S' 는 $HCN(n,n)$ 의 기본 모듈 외부에 있는 노드임을 알 수 있고, $s_1s_2...s_i...s_n = s'_{n+1}...s'_{n+i}...s'_{2n}$ 이고 $s_{n+1}...s_j...s_{2n} = s'_1s'_2...s'_i...s'_n$ 이므로 노드 S 와 S' 는 non-diameter link로 연결됨을 알 수 있다. 따라서 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 와 D' 를 $HCN(n,n)$ 의 노드 S 와 S' 에 각각 사상할 때 연장을 1에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

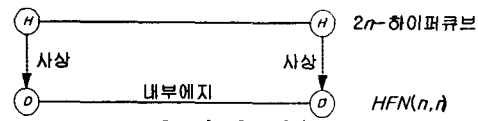
이상의 3가지 경우에서 증명한 바와 같이 $HFN(n,n)$ 을 $HCN(n,n)$ 에 임베딩을 하기 위해 필요한 비용은 $O(n)$ 이다.

정리 3 $2n$ -차원 하이퍼큐브 Q_{2n} 은 $HFN(n,n)$ 에 연장을 3에 임베딩 가능하다.

증명 $2n$ -차원 하이퍼큐브 Q_{2n} 의 노드 $H=(h_1h_2...h_n h_{n+1}...h_{2n})$ 와 $H'=(h'_1h'_2...h'_n h'_{n+1}...h'_{2n})$ 는 i -차원 예지($1 \leq i \leq 2n$)에 의해 인접한 노드라 가정하고, $HFN(n,n)$ 의 노드 $D=(d_1d_2...d_n d_{n+1}...d_{2n})$, $D'=(d'_1d'_2...d'_n d'_{n+1}...d'_{2n})$ 라 가정하자.

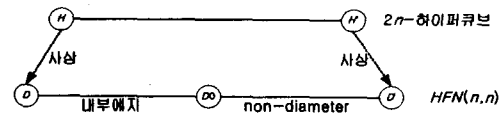
Q_{2n} 의 노드 H 를 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 로 Q_{2n} 의 노드 H' 를 $HFN(n,n)$ 의 노드 D' 로 사상했을 때, D 의 비트스트링에서 D' 의 비트스트링을 연결하는데 적용되는 $HFN(n,n)$ 의 예지의 개수를 통하여 연장을 분석한다. 노드 H 와 인접한 H' 의 비트스트링에 따라서 아래의 경우로 나눌 수 있다.

경우 1. $h_1h_2...h_n = h'_1h'_2...h'_n$ 이고 $h_{n+1}...h_{2n} \neq h'_{n+1}...h'_{2n}$ 일 때 : 하이퍼큐브 Q_{2n} 의 노드 H 가 사상된 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 의 비트스트링은 $(d_1d_2...d_i...d_n, d_{n+1}...d_j...d_{2n})$ 이고, 노드 H' 가 사상된 노드 D' 의 비트스트링은 $(d'_1d'_2...d'_i...d'_n, d'_{n+1}...d'_{j+1}...d'_{2n})$ 이다($1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 D 와 D' 의 비트스트링에서 $d_i = d'_i, 1 \leq i \leq n$ 이고, 오직 j 번째에 있는 비트만 서로 보수 관계이므로, 노드 D 와 D' 는 $HFN(n,n)$ 의 동일한 기본 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고, $HFN(n,n)$ 의 정의에 의해 노드 D 와 D' 는 서로 인접한 노드이다. 따라서 Q_{2n} 의 노드 H 와 H' 를 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 와 D' 에 각각 사상할 때 연장을 1에 임베딩 가능함을 알 수 있다.



[그림 6] 경우 1

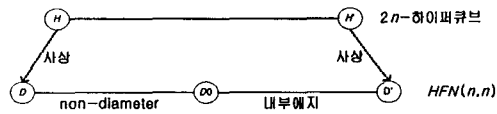
경우 2. $h_1h_2...h_n \neq h'_1h'_2...h'_n$ 이고 $h_1h_2...h_n = h'_{n+1}...h'_{2n} = h_{n+1}...h_{2n}$ 일 때 : 하이퍼큐브 Q_{2n} 의 노드 H 가 사상된 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 의 비트스트링은 $(d_1d_2...d_i...d_n, d_{n+1}...d_j...d_{2n})$ 이고, 노드 H' 가 사상된 노드 D' 의 비트스트링은 $(d'_1d'_2...d'_i...d'_n, d'_{n+1}...d'_{j+1}...d'_{2n})$ 이다($1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 D 와 D' 의 비트스트링에서 $d_i \neq d'_i, 1 \leq i \leq n$ 이므로 D 와 D' 는 $HFN(n,n)$ 의 기본 모듈 외부에 있는 노드임을 알 수 있다. 사상된 $HFN(n,n)$ 의 노드 $(d_1d_2...d_i...d_n, d_{n+1}...d_j...d_{2n})$ 를 기본 모듈 내부에 있는 $(d_1d_2...d_i...d_n, d'_1d'_2...d'_i...d'_n)$ 에 연결한다. 연결된 노드 $(d_1d_2...d_i...d_n, d'_1d'_2...d'_i...d'_n)$ 는 non-diameter link에 의해 $(d'_1d'_2...d'_i...d'_n, d_1d_2...d_i...d_n)$ 에 연결이 된다. $d_1d_2...d_i...d_n$ 와 $d'_{n+1}...d'_{j+1}...d'_{2n}$ 는 같다고 했으므로 $(d'_1d'_2...d'_i...d'_n, d_1d_2...d_i...d_n)$ 와 $(d'_1d'_2...d'_i...d'_n, d'_{n+1}...d'_{j+1}...d'_{2n})$ 는 같다. 따라서 Q_{2n} 의 노드 H 와 H' 를 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 와 D' 에 각각 사상할 때 연장을 2에 임베딩 가능함을 알 수 있다.



[그림 7] 경우 2

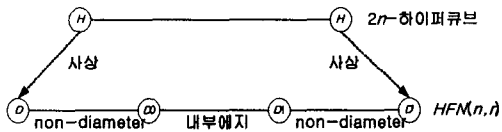
경우 3. $h_1h_2...h_n \neq h'_1h'_2...h'_n$ 이고 $h'_1h'_2...h'_n = h_{n+1}...h_{2n} = h'_{n+1}...h'_{2n}$ 일 때 : 하이퍼큐브 Q_{2n} 의 노드 H 가 사상된 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 의 비트스트링은 $(d_1d_2...d_i...d_n, d_{n+1}...d_j...d_{2n})$ 이고, 노드 H' 가 사상된 노드 D' 의 비트스트링은 $(d'_1d'_2...d'_i...d'_n, d'_{n+1}...d'_{j+1}...d'_{2n})$ 이다($1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 D 와 D' 의 비트스트링에서 $d_i \neq d'_i, 1 \leq i \leq n$ 이므로 D 와 D' 는 $HFN(n,n)$ 의 기본 모듈 외부

에 있는 노드임을 알 수 있다. 사상된 $HFN(n,n)$ 의 노드 $(d_1d_2... \overline{d_i...d_n}d_{n+1}...d_j...d_{2n})$ 를 non-diameter link에 의해 $(d_{n+1}...d_j...d_{2n}d_1d_2... \overline{d_i...d_n})$ 에 연결한다. 연결된 노드 $(d_{n+1}...d_j...d_{2n}d_1d_2... \overline{d_i...d_n})$ 를 모듈 내부에 있는 $(d_{n+1}...d_j...d_{2n}d'_1d'_2... \overline{d'_i...d'_n})$ 에 연결한다. $d'_1d'_2... \overline{d'_i...d'_n}$ 와 $d_{n+1}...d_j...d_{2n}$ 와 $d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n}$ 는 같다고 했으므로 $(d_{n+1}...d_j...d_{2n}d'_1d'_2... \overline{d'_i...d'_n})$ 은 $(d'_1d'_2... \overline{d'_i...d'_n}d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n})$ 와 같다. 따라서 Q_{2n} 의 노드 H 와 H' 를 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 와 D' 에 각각 사상할 때 연장을 2에 임베딩 가능함을 알 수 있다.



[그림 8] 경우 3

경우 4. $h_{n+1}...h_{2n}=h'_{n+1}...h'_{2n}$ 이고 $h_1h_2...h_n \neq h'_1h'_2...h'_n$ 일 때 : 하이퍼큐브 Q_{2n} 의 노드 H 가 사상된 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 의 비트스트링은 $(d_1d_2...d_i...d_n, d_{n+1}...d_j...d_{2n})$ 이고, 노드 H' 가 사상된 노드 D' 의 비트스트링은 $(d'_1d'_2... \overline{d'_i...d'_n}d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n})$ 이다 ($1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$). 사상된 $HFN(n,n)$ 의 노드 $(d_1d_2...d_i...d_n, d_{n+1}...d_j...d_{2n})$ 를 non-diameter link에 의해 $(d_{n+1}...d_j...d_{2n}d_1d_2...d_i...d_n)$ 에 연결한다. 연결된 노드 $(d_{n+1}...d_j...d_{2n}d_1d_2...d_i...d_n)$ 를 모듈 내부에 있는 노드 $(d_{n+1}...d_j...d_{2n}d'_1d'_2... \overline{d'_i...d'_n})$ 에 연결한다. 연결된 노드 $(d_{n+1}...d_j...d_{2n}d'_1d'_2... \overline{d'_i...d'_n})$ 를 non-diameter link에 의해 $(d'_1d'_2... \overline{d'_i...d'_n}d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n})$ 에 연결한다. $d_{n+1}...d_j...d_{2n}$ 와 $d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n}$ 는 같다고 했으므로 $(d'_1d'_2... \overline{d'_i...d'_n}d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n})$ 와 $(d'_1d'_2... \overline{d'_i...d'_n}d'_{n+1}...d'_j...d'_{2n})$ 는 같다. 따라서 Q_{2n} 의 노드 H 와 H' 를 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 와 D' 에 각각 사상할 때 연장을 3에 임베딩 가능함을 알 수 있다.



[그림 9] 경우 4

이상의 4가지 경우에서 증명한 바와 같이 하이퍼큐브 Q_{2n} 를 $HFN(n,n)$ 에 임베딩을 하기 위해 필요한 연장은 3이다.

정리 4 $HFN(n,n)$ 을 $2n$ -차원 하이퍼큐브 Q_{2n} 에 임베딩하는 비용은 $O(n)$ 이다.

증명 $2n$ -차원 하이퍼큐브 Q_{2n} 의 노드 $H=(h_1h_2...h_nh_{n+1}...h_{2n})$ 와 $H'=(h'_1h'_2...h'_nh'_{n+1}...h'_{2n})$ 는 i -차원 에지($1 \leq i \leq 2n$)에 의해 인접한 노드라 가정

하고, $HFN(n,n)$ 의 노드 $D=(d_1d_2...d_nd_{n+1}...d_{2n})$, $D'=(d'_1d'_2...d'_nd'_{n+1}...d'_{2n})$ 라 가정하자.

$HFN(n,n)$ 의 노드 D 를 Q_{2n} 의 노드 H 로 $HFN(n,n)$ 의 노드 D' 를 Q_{2n} 의 노드 H' 로 사상했을 때, H 의 비트스트링에서 H' 의 비트스트링을 연결하는데 적용되는 Q_{2n} 의 에지의 개수를 통하여 연장을 분석하는데, 연장이 n 인 경우가 존재하면 $HFN(n,n)$ 이 $2n$ -차원 하이퍼큐브 Q_{2n} 에 임베딩하는 비용은 $O(n)$ 임을 알 수 있으므로 연장이 n 인 특정한 경우만을 증명하겠다.

경우 2. $d_1d_2...d_n=d'_1d'_2...d'_n$ 이고 $d_{n+1}...d_{2n}$ 과 $d'_{n+1}...d'_{2n}$ 이 보수관계일 때 : $HFN(n,n)$ 의 노드 D 가 사상된 하이퍼큐브 Q_{2n} 의 노드 H 의 비트스트링은 $(h_1h_2...h_i...h_nh_{n+1}...h_j...h_{2n})$ 이고, 노드 D' 가 사상된 노드 H' 의 비트스트링은 $(h'_1h'_2...h'_i...h'_n \overline{h'_{n+1}...h'_j...h'_{2n}})$ 이다 ($1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq 2n$). 노드 H 와 H' 의 비트스트링에서 $h_i=h'_i, 1 \leq i \leq n$ 이므로 노드 H 와 H' 는 Q_{2n} 의 동일한 기본 모듈 내부에 있는 노드임을 알 수 있고, Q_{2n} 의 정의에 의해 노드 H 와 H' 가 연결되기 위해서는 서로 다른 비트스트링만큼의 에지가 필요하다. 따라서 H 와 H' 가 연결되기 위해서는 n 개의 에지가 필요하므로 $HFN(n,n)$ 의 노드 D 와 D' 를 Q_{2n} 의 노드 H 와 H' 에 각각 사상할 때 연장을 n 에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

이상의 경우에서 증명한 바와 같이 $HFN(n,n)$ 을 $2n$ -차원 하이퍼큐브 Q_{2n} 에 임베딩을 하기 위해 필요한 비용은 $O(n)$ 이다.

V. 결론

본 논문에서는 $HCN(n,n)$ 이 Hamiltonian Cycles을 가짐을 증명했고, $HCN(n,n)$ 과 $HFN(n,n)$ 사이의 임베딩을 분석했으며, $HFN(n,n)$ 과 $2n$ -차원 하이퍼큐브 Q_{2n} 사이의 임베딩을 분석했다. $HCN(n,n)$ 을 $HFN(n,n)$ 에 연장을 3에 임베딩 가능함을 증명했고, $HFN(n,n)$ 을 $HCN(n,n)$ 에 임베딩하는 비용이 $O(n)$ 임을 증명했으며, $2n$ -차원 하이퍼큐브 Q_{2n} 를 $HFN(n,n)$ 에 연장을 3에 임베딩 가능함을 보였고, $HFN(n,n)$ 을 $2n$ -차원 하이퍼큐브 Q_{2n} 에 임베딩하는 비용이 $O(n)$ 임을 보였다. 이러한 결과는 하이퍼큐브와 $HCN(n,n)$ 과 $HFN(n,n)$ 사이의 임베딩 결과를 분석함으로써, $2n$ -차원 하이퍼큐브 Q_{2n} 에서 이미 개발된 여러 가지 알고리즘을 $HCN(n,n)$ 과 $HFN(n,n)$ 에서 효율적으로 이용할 수 있음을 의미하고, 하이퍼큐브의 변형된 연결망과 $HCN(n,n)$ 과 $HFN(n,n)$ 의 관계를 분석할 수 있음을 의미한다.

참고문헌

- [1] F. T. Leighton, Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Hypercubes, Morgan Kaufmann Publishers, 1992.
- [2] V. E. Mendia and D. Sarkar, "Optimal Broadcasting on the Star Graph," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.3, No.4, pp.389-396, 1992.
- [3] A. El-Amawy and S. Latifi, "Properties and Performance of Folded Hypercubes," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol. 2, No. 1, pp.31-42, 1991.
- [4] K. Ghose and K. R. Desai "The Design and Evaluation of the Hierarchical Cubic Network," Proc. 19th Int'l Conf. Parallel Processing, vol. I, pp.355-362, 1990.
- [5] K. Ghose and K. R. Desai "Hierarchical Cubic Networks," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol.6, No. 4, pp.427-436, 1995.
- [6] D. R. Duh, G. H. Chen and J. F. Fang, "Algorithms and Properties of a New Two-Level Network with Folded Hypercubes as Basic Modules," IEEE Trans. Parallel Distributed syst., Vol. 6, No. 7, pp.714-723, 1995.
- [7] N. Corp, "NCUBE/ten : an Overview," November 1985.
- [8] S. Ranka, Y. Won and S. Sahni, "Programming a Hypercube Multiprocessor," IEEE Software, Vol. 5, pp. 69-77, 1988.
- [9] Y. Saad and M. H. Schultz, "Topological Properties of Hypercubes," IEEE Trans. Comput., Vol.37, pp.867-872, 1988.
- [10] A. S. Vaidya, P. S. N. Rao and S. R. Shankar, "A Class of Hypercube_like Networks," Proc. of the 5th IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing, pp. 800-803, Dec. 1993.
- [11] Dewdney, A. K. "Computer Recreations: A Program for Rotating Hypercubes Induces Four-Dimensional Dementia." Sci. Amer. 254, 14-23, Mar. 1986.
- [12] M. Nigant, S.Sahni, and B. Krishnamurthy, "Embedding Hamiltonians and Hypercubes in Star Interconnection Graphs," Proc. Int'l Conf. Parallel Processing, vol. III, pp. 340-343, 1990.