

이동질량에 의한 불균일 단면보의 동적응답

김인우*(국방과학연구소), 이영신(충남대), 이규섭(국방과학연구소), 류봉조(대전산업대)

Dynamic Response of Non-Uniform Beams under a Moving Mass

I. W. Kim(ADD), Y. S. Lee(Chung Nam Natl. Univ.), G. S. Lee(ADD), B. J. Ryu(TNUT)

ABSTRACT

The paper deals with the dynamic response of non-uniform beams subjected to a moving mass. In the dynamic analysis, the effects of inertia force, elastic force, centrifugal force, Coriolis force and self weight due to moving mass are taken into account. Galerkin's mode summation method is applied for the discretized equations of motion. Numerical results for the dynamic response of the non-uniform beam under a moving mass having various magnitudes and velocities are investigated. Experimental results have a good agreement with predictions

Key Words : Moving mass (이동질량), Dynamic response (동적응답), Non-uniform beam (불균일 단면보)

1. 서론

이동하중을 받는 구조물의 동적 거동에 관한 연구의 예는 교량구조물의 거동, 포강내에서 빠르게 이동하는 탄체에 의한 포열의 거동, 천장크레인의 이동할 차가 움직이는 거더 등 각종 산업기계 및 구조물에서 그 예를 볼 수 있다.

18세기 중반부터 관심을 갖기 시작한 이동하중에 의한 교량 구조물의 응답에 관한 연구는 Tung^[1]에 의한 이동하중을 받는 고가 교량의 불규칙 응답에 대한 연구와 함께 가속화 되었다. 그후, 유한요소법의 발전에 따라 Yoshida와 Weaver^[2]는 이동하중 문제에 처음으로 유한요소법을 적용하였고, Timoshenko와 Young 등^[3]은 보를 따라 일정 속도로 질량이 움직이는 문제를 이동하중으로 단순화하여 이동집중하중을 받는 보의 해를 구하였으며 임계속도로 표현하였다. Hayashikawa와 Watanabe^[4]는 이동 집중하중에 의한 연속보를 연속법(Continuum method)으로 해석하였으며 풀 구하였고, 류봉조^[5]는 일정속도와 가속도로 움직이는 이동질량에 의한 단순지지 보 및 연속보에 대한 동적 응답을 유한차분법으로 수치해석을 수행하였다. Esmalilzadeh와 Ghorashi^[6]는 이동질량의 관성 효과까지도 고려한 이동질량을 받는 보의 거동을 고찰하였다. 최근 Wang^[7]은 이동하중과 보의 무게의 연성 효과에 의한 Timoshenko보의 비선형 진동연구를 위

하여 대변형 이론을 사용하여 운동방정식을 구하고 Galerkin법을 이용하여 응답을 구하였다.

위의 연구들은 그 대상 보가 균일보에 대한 것으로서, 미관상 또는 설계목적 상 보의 단면이 불균일할 경우에 대한 보 응답에 대한 연구는 아직 이루어지지 않고 있다.

따라서 본 연구에서는 관성력, 코리올리력, 원심력, 보의 초기 정적처짐을 모두 고려한 이동질량을 받는 불균일 단면보의 동적응답을 홈의 깊이 및 홈의 길이 변화에 따라 수치해석 및 실험을 병행하여 연구하였다.

2. 이론해석

2.1 균일 단면보의 운동방정식

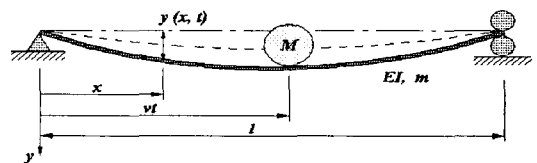


Fig. 1 A mathematical model for analysis of beam subjected to the moving mass.

이동질량에 의한 보 운동의 수학적 모델은 Fig. 1과 같다. Fig. 1에 있어, l 은 보의 전체길이, m 은 단위 길이당 질량, EI 는 보의 강성을 나타낸다. 또한, M 은 이동질량의 크기를 나타낸다.

Fig. 1의 수학적 모델에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = mg + Mg\delta(x-vt) - M \left[\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} v^2 + 2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x \partial t} v + \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} a + \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \right] \delta(x-vt) \quad (1)$$

초기 정적처짐 $y_s(x)$ 는

$$EI \frac{\partial^4 y_s(x)}{\partial x^4} = mg \quad (2)$$

의 관계식을 만족한다. 식(1)의 해는 초기 정적처짐 $y_s(x)$ 와 이동질량에 의한 동적 변위 $y_d(x, t)$ 의 합으로 식(3)과 같이 가정할 수 있다.

$$y(x, t) = y_s(x) + y_d(x, t) \quad (3)$$

이제, 무차원변수 $\xi = \frac{x}{l}$ 을 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{EI}{l^4} \frac{\partial^4 y(\xi, t)}{\partial \xi^4} + m \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} = mg + \frac{M}{l} \left[g - \left\{ \bar{v}^2 \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial \xi^2} + 2\bar{v} \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial \xi \partial t} + \bar{a} \frac{\partial y(\xi, t)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 y(\xi, t)}{\partial t^2} \right\} \right] \delta(\xi - \bar{v}t) \quad (4)$$

여기서, $\bar{v} = \frac{v}{l}$, $\bar{a} = \frac{a}{l}$ 이다.

2.2 불균일 단면보의 운동방정식

Fig. 2는 불균일 단면보에 대한 그림을 나타내며, 계산상의 단순함을 위해 좋은 좌우대칭으로 하였다.

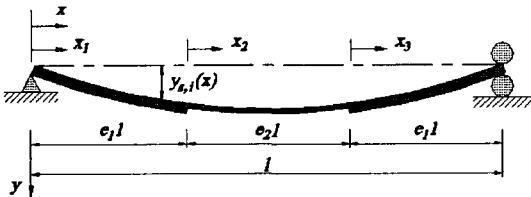


Fig. 2 A beam model with non-uniform cross section.

불균일 단면보의 무차원화된 운동방정식은 식(4)의

균일보 운동방정식에 무차원 변수 $\xi_i = \frac{x_i}{l}$ ($i = 1, 2, 3$)을 적용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{EI_k}{m_k l^4} \frac{\partial^4 y_k(\xi_k, t)}{\partial \xi_k^4} + \frac{\partial^4 y_k(\xi_k, t)}{\partial t^2} = g + \frac{M}{m_k l} \left[g - \left\{ \bar{v}^2 \frac{\partial^2 y_k(\xi_k, t)}{\partial \xi_k^2} + 2\bar{v} \frac{\partial^2 y_k(\xi_k, t)}{\partial \xi_k \partial t} + \bar{a} \frac{\partial y_k(\xi_k, t)}{\partial \xi_k} + \frac{\partial^2 y_k(\xi_k, t)}{\partial t^2} \right\} \right] \delta(\xi - \bar{v}t), \quad (k=1, 2, 3) \quad (5)$$

여기서, k 는 Fig. 2에서와 같이 단면이 변화되는 보 요소의 순서를 의미한다. Galerkin의 모드 합 방법을 이용하면, 식(5)의 해는 다음과 같이 가정될 수 있다.

$$y_{s,i}(\xi_i) = \sum_{k=1}^{\infty} A_i \phi_{i,k}(\xi_i), \quad (k=1, 2, 3) \quad (6)$$

$$y_{d,i}(\xi_i, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_i(t) \phi_{i,k}(\xi_i), \quad (k=1, 2, 3) \quad (7)$$

$$y(\xi_i, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_i + q_i(t)] \phi_{i,k}(\xi_i), \quad (k=1, 2, 3) \quad (8)$$

여기서, $y_{s,i}(\xi_i)$ 와 $y_{d,i}(\xi_i, t)$ 는 이동질량에 의한 정적처짐과 동적처짐, $y(\xi_i, t)$ 는 전체처짐을 나타낸다. 식(8)의 해를 식(5)에 대입하고, $\phi_{n,k}(\xi_k)$, ($k=1,2,3$)을 내적하여 다시 정리하면 무차원화된 운동 지배방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^1 \phi_{i,k}(\xi_k) \phi_{n,k}(\xi_k) d\xi_k + \mu_k \phi_{i,k}(v_0\tau) \phi_{n,k}(v_0\tau) \right] \ddot{\varphi}_i(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} [2\mu_k v_0 \phi_{i,k}'(v_0\tau) \phi_{n,k}(v_0\tau)] \dot{\varphi}_i(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\beta_i}{\beta_1} \right)^4 \pi^2 \int_0^1 \phi_{i,k}(\xi_k) \phi_{n,k}(\xi_k) d\xi_k + \mu_k v_0^2 \phi_{i,k}''(v_0\tau) + \mu_k a_0 \phi_{i,k}'(v_0\tau) \phi_{n,k}(v_0\tau) \right] \varphi_i(\tau) \phi_{n,k}(v_0\tau) = \frac{\mu_k}{\delta} \left[\left(\frac{\pi}{\omega_1} \right)^2 g - v_0^2 \sum_{i=1}^{\infty} A_i \phi_{i,k}''(v_0\tau) - a_0 \sum_{i=1}^{\infty} A_i \phi_{i,k}'(v_0\tau) \right] \phi_{n,k}(v_0\tau) \quad (9)$$

여기서, 무차원 변수들은 다음과 같다.

$$\mu_k = \frac{M}{m_k l}, \quad \delta = \frac{4mgl^4}{EI\pi^5}, \quad \tau = \frac{\omega_1}{\pi} t, \quad \gamma = \frac{l_h}{h},$$

$$v_0 = \frac{v}{v_{cr}} = \frac{\pi \bar{v}}{\omega_1}, \quad a_0 = \frac{\pi^2 \bar{a}}{\omega_1^2}, \quad \varphi_n = \frac{q_n}{\delta} \quad (10)$$

이제 식(9)의 운동방정식을 행렬형태로 나타내면 식(11)과 같다.

$$[M(\tau)] \{\ddot{\varphi}(\tau)\} + [C(\tau)] \{\dot{\varphi}(\tau)\} + [K(\tau)] \{\varphi(\tau)\} = \{f(\tau)\} \quad (11)$$

여기서, 각 행렬들의 요소는 다음과 같다.

$$m_{ij}(\tau) = \int_0^1 \phi_{i,k}(\xi_k) \phi_{j,k}(\xi_k) d\xi_k + \mu_k \phi_{i,k}(v_o \tau) \phi_{j,k}(v_o \tau) \quad (12)$$

$$c_{ij}(\tau) = 2 \mu_k v_o \phi_{i,k}'(v_o \tau) \phi_{j,k}(v_o \tau) \quad (13)$$

$$k_{ij}(\tau) = \left(\frac{\beta_j}{\beta_1} \right)^4 \pi^2 \int_0^1 \phi_{i,k}(\xi_k) \phi_{j,k}(\xi_k) d\xi_k + \mu_k v_o^2 \phi_{i,k}(v_o \tau) \phi_{j,k}''(v_o \tau) + \mu_k \alpha_o \phi_{i,k}(v_o \tau) \phi_{j,k}'(v_o \tau) \quad (14)$$

$$f_i(\tau) = \frac{\mu_k}{\delta} \left[\left(\frac{\pi}{\omega_1} \right)^2 g - v_o^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_{n,k}''(v_o \tau) - \alpha_o \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_{n,k}'(v_o \tau) \right] \phi_{i,k}(v_o \tau) \quad (15)$$

3. 수치해석 결과 및 검토

Fig. 3(a)는 $\mu=0.2$ 인 경우 v_o 를 변화시켜가며 이동질량 위치 $v_o \tau$ 에서의 보의 변위를 도시한 그림이다.

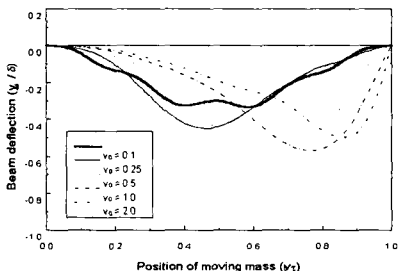
그림에서는 정적처짐량을 뺀 동적 응답만을 제시하고 있고, 보 변위의 크기는 최대 정적처짐 δ 로 나눈 무차원화된 값이다.

속도가 느린 $v_o=0.1$ 인 경우는 약간의 굴곡이 있는 처짐곡선을 나타내며, $v_o=0.25$ 이상에서는 속도의 증가에 따라 최대처짐을 일으키는 이동질량의 위치가 우측으로 이동된다.

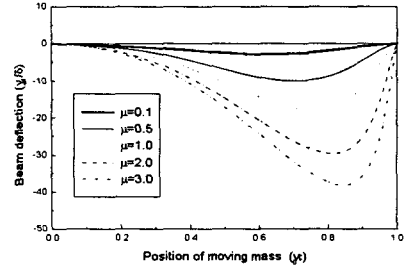
Fig. 3(b)는 $v_o=0.5$ 인 경우, μ 를 변화시키면서 이동질량 위치 $v_o \tau$ 에서의 보의 변위를 나타낸 것으로서 질량이 증가할 수록 최대변위는 증가하고 그 위치는 우측으로 이동되고 있음을 보여 주고 있다.

Fig. 4는 홈 깊이비 $\gamma'=1/3$ 일때, 홈의 길이 $z=0.1, 0.2$ 의 2가지에 대한 동적 처짐을 나타낸 그림이다. $z=0.1$ 일 경우는 처짐의 크기가 이전의 저사들의 연구인 균일보의 경우와 유사하지만, $z=0.2$ 의 경우는 동일한 속도의 크기에 대해 더 큰 처짐의 크기를 나타내고 있다.

그러나 $z=0.2$ 의 경우에 있어서도 $v_o=0.25$ 이상의 속도에서, 속도의 증가에 따라 최대처짐을 일으키는 이동질량의 위치가 우측으로 이동되는 현상은 균일보의 현상과 동일하다.

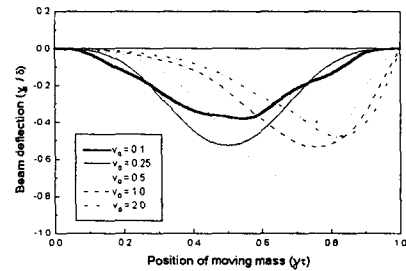


(a) For different values of v_o and $\mu=0.2$

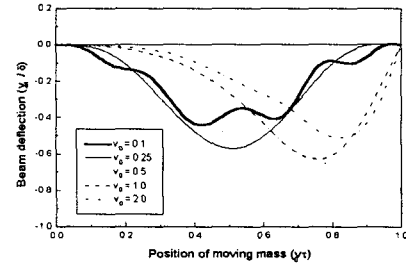


(b) For different values of μ and $v_o=0.5$

Fig. 3 Nondimensional deflections of a uniform beam at the position of moving mass($v_o \tau$)

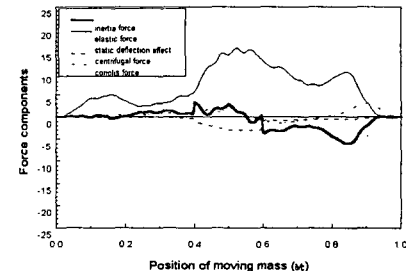


(a) ($\gamma'=1/3, z=0.1$)



(b) ($\gamma'=1/3, z=0.2$)

Fig. 4 Nondimensional beam deflections of beams at the position of moving mass($v_o \tau$) for different values of v_o and $\mu=0.2$



($\gamma'=1/3, z=0.1$)

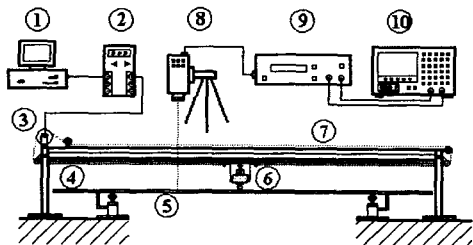
Fig. 5 Nondimensional force components at the position of moving mass($v_o \tau$) for beams with $v_o=0.5$ and $\mu=0.2$

Fig. 5는 $\mu=0.2$, $v_0=0.5$, $\gamma'=1/3$, $z=0.1$ 인 불균일 단면보에서 이동질량 위치에서의 무차원화된 하중의 각 성분을 나타낸 것이다. 홈 부위에서의 정적처짐 효과가 크게 나타남을 알 수 있고, 이동질량이 홈 부위에 도달하기전에는 작용력들의 영향이 그리 크지 않으나, 홈부위를 통과한 후에 급격히 증가됨을 알 수 있다.

4. 실험

4.1 실험장치

양단 단순지지되고 균일 및 불균일 단면을 갖는 보 구조물이 일정한 속도로 이동하는 질량에 의한 하중을 받을 경우에 발생하는 동적 거동에 관한 수치해석 결과를 검증하기 위하여 실험을 수행하였으며, Fig. 6은 실험장치 개략도를 보여준다.

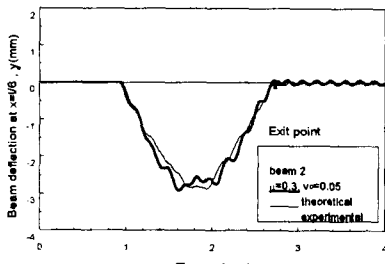


- | | |
|---------------------|---------------------------|
| ① Computer | ⑥ Moving mass |
| ② Motor control box | ⑦ Moving mass guide |
| ③ Servo motor | ⑧ Vibrometer laser sensor |
| ④ Dummy beam | ⑨ Vibrometer controller |
| ⑤ Test beam | ⑩ Digital oscilloscope |

Fig. 6 Experimental setup.

4.2 실험 및 실험결과

Fig. 7은 이동질량이 $v_0=0.05$ 의 낮은 속도로 이동하는 경우 불균일 단면보의 운동을 계속한 것이다. 질량비 $\mu=0.3$ 에 대한 것으로서, 실험결과와 수치 시뮬레이션 결과가 비교적 근사한 일치를 보이고 있음을 알 수 있다.



($\gamma'=1/2$, $z=0.1$) with $\mu=0.3$

Fig. 7 Comparison of experimental dynamic deflections (position= $l/6$) with theoretical ones.

5. 결론

- 1) 균일 단면보의 경우 이동질량은 계의 질량효과를 증대시켜 이동질량이 부가되지 않은 상태와 비교하여 계의 고유진동수를 감소시키고 원심력 성분은 강성효과를 감소시킴으로써 보의 동적 처짐을 증대시킨다. 반면에 코리올리력은 감쇠항으로 작용한다. 불균일 단면보의 경우에도 같은 역학적 관계가 성립하여 보의 동적거동은 유사한 형태를 갖는다.
- 2) 보의 동적 최대처짐은 이동질량의 크기와 속도가 증가할 수록 커지게 되며 홈이 있는 불균일 보의 경우 고유진동수 감소 및 강성 저하의 요인으로 균일 보와 비교하여 큰 동적 변화가 나타나게 된다.
- 3) 이동질량위치에서 보의 최대처짐 위치는 이동질량의 크기(μ)와 속도(v_0)가 증가할수록 점진적으로 $\xi=1$ 방향으로 접근한다.
- 4) 이동질량에 의한 불균일 단면보의 동적 거동특성에 관한 실험을 수행한 결과, 이론해석 결과와 근사한 일치를 보였다.

참고 문헌

1. C. C. Tung, 1967, "Random Response of Highway Bridges to Vehicle Loads," Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 93, pp. 73~94.
2. D. M. Yoshida and W. Weaver, 1971, "Finite Element Analysis of Beams and Plates with Moving Loads," Publication of International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 31, No. 1, pp. 179~195.
3. S. Timoshenko, D. H. Young and W. Weaver, 1974, Vibration Problems in Engineering, Fourth Edition, New York: John Wiley.
4. T. Hayashikawa and N. Watanabe, 1981, "Dynamic Behavior of Continuous Beams with Moving Loads," Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of Structural Mechanics Division, Vol. 107, pp. 229~246.
5. 류봉조, 1983, "이동집중질량에 의한 보의 동적 해석," 연세대학교 석사학위논문.
6. E. Esmailzadeh and M. Ghorashi, 1992, "Vibration Analysis of Beams Traversed by Moving Masses," Proceedings of the International Conference on Engineering Application of Mechanics, Tehran, Iran, Vol. 2, pp. 232~238.
7. R. T. Wang, 1997, "Vibration of Multi-Span Timoshenko Beams to a Moving Force," Journal of Sound and Vibration, Vol. 207, pp. 731~742.