

고유치를 이용한 병렬형 기구의 강성범위 해석

김택수(고려대 대학원), 김현(고려대 대학원), 홍대희(고려대)

Analysis of Stiffness Bounds for Parallel Devices Using Eigenvalues

Taeksoo Kim, Hyun Kim, and Daehie Hong

ABSTRACT

In order to use a parallel device for machine tool feed mechanism, it is very important to analyze its stiffness over the workspace. Generally, the stiffness of a rod varies with its length. In this paper, the stiffness of the leg is modeled as a linear function. With the linear stiffness model, the methods that can determine stiffness bounds and max/min stiffness directions are presented utilizing eigenvalues and eigenvectors of the stiffness matrix. The stiffness variation along a tool-path and stiffness mapping over a workspace are presented with cubic-shaped parallel device which is originally designed for machine tool feed mechanism.

Key Words : Parallel device(병렬형기구), Stiffness matrix(강성행렬), Eigenvalue(고유치), Stiffness bounds (강성한계)

1. 서론

오늘날 사용되는 공작기계 대부분은 베이스에서 말단부까지 직렬로 연결된 직렬형 구조로 이루어져 있다. 직렬형 구조는 작업영역이 크다는 장점이 있지만, 각 링크의 오차가 누적되며, 기구의 전체적인 강성이 작은 단점이 있어서, 매우 정밀한 가공에는 적합하지 않다. 이에 비하여, 강성이 크고, 가감속 특성이 우수하며 오차가 적어, 정밀한 가공에 적합한 공작기계로 새롭게 연구되는 것이 병렬형 기구이다. 병렬형 기구는 베이스와 플랫폼을 여러 개의 링크로 연결하여 링크의 길이를 변화시켜서 플랫폼의 운동을 결정하는 것을 기본 구조로 하고 있다.

병렬형 기구에 대한 연구는 순기학과 역기구학의 해를 계산하거나 기구의 동특성을 해석하는 것이 주를 이루고 있다. 그러나, 병렬형 기구를 정밀한 공작기계에 사용하기 위해서는, 기구의 강성에 대하여 강성의 범위를 파악하고 가공경로에 따른 강성의 변화를 완벽하게 해석하는 것이 필수적일 것이다.

Fichter⁽¹⁾는 병렬형 공작기계에 대하여 자코비안 행렬을 구하여 강성 행렬을 구했으며, Gosselin⁽²⁾은 일반 Stewart platform 에 대해서 각 링크의 강성이 동일하다고 가정해서 플랫폼의 위치에 따른 강성의 변화를 해석했으며, Tsai⁽³⁾는 가상일을 이용하여 기구의 강성을 모델링 하였다. El-Khasawneh 와

Ferreira⁽⁴⁾는 고유치를 이용하여 병렬형 기구의 강성 범위와 방향 등을 결정하는 방법을 제시하였다.

본 연구에서는 기구를 구성하는 6 개의 다리 강성을 일정한 상수로 가정하는 기존의 연구와는 달리, 길이에 대한 선형함수로 모델링하여 실제 기구와의 평균 오차를 더욱 작게 만들었다. 각 다리의 선형강성 모델로부터 기구 전체의 강성행렬을 유도하였으며, 고유치 해석을 이용하여 강성의 최대 최소치와 그 방향을 분석하는 방법을 제시하고자 한다. 제안된 방법의 타당성을 검증하기 위해 공작기계의 테이블 이송기구로 제안된 육면형 병렬 기구를⁽⁵⁾ 대상으로 컴퓨터 시뮬레이션 결과를 제시한다.

2. 병렬형기구의 자코비안

2.1 기구의 역기구학

병렬형 기구는 베이스와 플랫폼을 6 개의 다리로 연결하여, 다리의 길이를 변화시켜서 플랫폼의 상대운동을 만들어 내는 장치이다. P 와 R 은 베이스의 원점에서 플랫폼의 원점까지의 위치벡터와 회전행렬이며, a_i 와 b_i 는 각각 베이스와 플랫폼측 조인트의 위치를 나타낸다. i번째 다리의 길이는,

$$l_i = [P + Rb_i - a_i]^T [P + Rb_i - a_i] \quad (1)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이 식에서 플랫폼의 위치와 방향 P 와 R 이 주어지면 각 조인트의 길이를 구할 수 있다.

2.2 기구의 자코비안

병렬형 기구의 자코비안은 6 개 다리의 길이 변화 Δq 와 플랫폼의 위치변화 Δx 와의 관계를 나타내며, $\Delta x = J\Delta q$ 일때 자코비안 행렬은,

$$J = \begin{bmatrix} s_1^T & (b_1 \times s_1)^T \\ s_2^T & (b_2 \times s_2)^T \\ \vdots & \vdots \\ s_6^T & (b_6 \times s_6)^T \end{bmatrix} \quad (2)$$

과 같이 표현할 수 있다. 여기서 s_i 는 i 번째 다리의 방향을 나타내는 단위벡터이다.

또한 플랫폼에 가해지는 힘/모멘트와 각 다리에 작용하는 힘과의 관계 역시 자코비안을 이용해서 표현할 수 있다. 플랫폼에 작용하는 힘/모멘트를 $\tau = [F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z]^T$, 다리에 가해지는 힘 벡터를 $f = [f_1, \dots, f_6]^T$ 라 할 때,

$$\tau = J^T f \quad (3)$$

의 관계가 성립한다.

3. 병렬형 기구의 강성

3.1 강성 행렬

병렬형 기구를 공작기계에 사용하는 경우에 있어서 강성은 설계단계에서부터 고려해야 할 매우 중요한 사항이다. 가공 시에 발생하는 강성의 변화는 채터 발생의 원인이 되며, 가공의 안정성에 직접적으로 관련되기 때문이다. 가장 일반적인 병렬형 기구인 *Stuart Platform* 의 기본적인 구조는 6 개의 다리가 플랫폼을 지지하는 구조이다. 본 연구에서는 각 다리의 강성을 실제와 근접하게 나타내기 위해 다리의 길이에 대한 선형 함수로 모델링하였다. 이 모델은 다리가 수축과 신장됨에 따라 최대 최소 치 범위 내에서 강성이 변화하게 된다. 즉, 다리의 강성을

$$k = (L - L_2)(k_1 - k_2) / (L_1 - L_2) + k_2 \quad (4)$$

로 모델링 하였으며, 여기서 k_1 과 k_2 는 다리의 길이가 최대로 신장 및 수축하였을 때 (L_1, L_2) 강성이다. 힘과 변형의 관계로부터 $f = K_L \Delta q$ 로 표현할 수 있으며, 여기에서 각 조인트는 병렬기구의 특성 때문에 축 방향 하중만이 작용하므로 대각선 행렬 $K_L = \text{diag}[k_1, \dots, k_6]$ 로 나타낼 수 있다. 따라서 강성 행렬 K 를 일정 외력에 대한 기구의 위치 변화의

관계로 정의하면, 식(3)으로부터 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau &= J^T f = J^T K_L \Delta q \\ &= J^T K_L J \Delta x = K \Delta x \end{aligned} \quad (5)$$

식(5)에서 행렬 K 의 대각성분 중, k_{11}, k_{22}, k_{33} 는 각각 X, Y, Z 방향으로의 강성을 나타내며, k_{44}, k_{55}, k_{66} 는 각 축 방향을 중심으로 한 회전강성을 나타낸다.

3.2 고유치를 이용한 강성 행렬

병렬형 기구에 대한 일반강성을 플랫폼에 가해진 힘의 크기와 위치변화와의 비율로 다음과 같이 정의하자.

$$s = \sqrt{\frac{\tau^T \tau}{\Delta x^T \Delta x}} \quad (6)$$

앞의 식(5)로부터 강성은,

$$s = \sqrt{\frac{\Delta x^T J^T K_L J J^T K_L J \Delta x}{\Delta x^T \Delta x}} \quad (7)$$

가 되며, 특히 변위가 $\Delta x^T \Delta x = 1$ 인 경우에는

$$s = \sqrt{\Delta x^T J^T K_L J J^T K_L J \Delta x} \quad (8)$$

가 된다. 여기서, 행렬 $J^T K_L J$ 는정치확정(positive definite)행렬이며, 직교(orthogonal)하므로,

$$J^T K_L J = V \Lambda V^{-1} = V \Lambda V^T \quad (9)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 여기에서, 행렬 Λ 와 V 는 K 의 고유치 λ_i 와 고유벡터 v_i 를 이용해서 $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_6]$ 와 $V = [v_1, \dots, v_6]$ 로 정의한다. 특히 외력이 i 번째 고유벡터방향으로 가해지는 경우,

$$\tau = c_i v_i = V \Lambda V^T \Delta x \quad (10)$$

로 나타낼 수 있으며, 플랫폼의 위치 변화는

$$\Delta x = c_i V \Lambda^{-1} V^T v_i = \frac{c_i}{\lambda_i} v_i = w_i v_i \quad (11)$$

가 되어 고유치와 고유벡터로 표현될 수 있다. 고유치의 정의로부터 $J^T K_L J v_i = \lambda_i v_i$ 이 되며, 식(10)

과 식(11)을 통해서, $\tau = \lambda_i w_i v_i$ 의 관계를 얻을 수 있다. 이상의 결과로부터, 식 (6)의 일반강성은 $s = \lambda_i$ 과 같이 간단하게 정리되는데, 외력이 행렬 K의 고유벡터 방향으로 가해지는 경우, 기구의 강성은 고유치와 일치하게 됨을 알 수 있다.

다음으로 플랫폼에 대한 외력이 임의의 방향으로 가해지는 경우에 대하여 알아보도록 하자. 이 경우 τ 와 Δx 는 각각 행렬 K의 고유벡터를 베이스(basis)로 한 선형조합으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Delta x &= \sum_{i=1}^6 w_i v_i \\ \tau &= K \Delta x = \sum_{i=1}^6 \lambda_i w_i v_i\end{aligned}\quad (12)$$

따라서 식(6)으로부터, 기구의 강성은

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^6 (\lambda_i w_i)^2}\quad (13)$$

와 같이 고유벡터의 조합으로 나타낼 수 있다.

3.3 기구 강성의 범위

3.1 절에서 우리는 고유치를 이용하여 각 방향에 대한 강성을 해석해 보았다. 병렬형 기구를 공작기에 사용하는 경우에, 강성의 최소값과 최대값을 아는 것은 정확한 가공경로를 예측하고 기구의 안정성을 판별하는데 매우 중요한 문제가 된다. 따라서 이번에는 기구의 강성의 최대최소치를 알아보도록 하겠다.

먼저, 강성의 최소치를 해석해 보기 위하여, 행렬 K의 고유치를 크기순으로 정렬하면,

$$\begin{aligned}\lambda_{\min} &= \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_6 = \lambda_{\max} \\ \lambda_i &= \lambda_{\min} + \Delta \lambda \quad (\Delta \lambda \geq 0)\end{aligned}\quad (14)$$

와 같다. 따라서, 기구의 강성은

$$\begin{aligned}s^2 &= \sum ((\lambda_{\min} + \Delta \lambda_i) w_i)^2 \\ &= \sum w_i^2 (\lambda_{\min}^2 + 2\lambda_{\min} \Delta \lambda_i + \Delta \lambda_i^2) \\ &= \lambda_{\min}^2 \sum w_i^2 + 2\lambda_{\min} \sum w_i^2 \Delta \lambda_i + \sum w_i^2 \Delta \lambda_i^2 \\ &\geq \lambda_{\min}^2 \sum w_i^2 = \lambda_{\min}^2\end{aligned}\quad (15)$$

가 된다. 특히, $\Delta x^T \Delta x = 1$ 인 경우에 대해서는, $\sum w_i^2 = 1$ 이 되며 고유치가 모두 양수이므로, $s \geq \lambda_{\min}$ 의 관계를 얻을 수 있는데, 이는 강성의 최소값이 최소고유치로 나타난다는 것을 알 수 있다. 위와 동일한 방법을 통해서, 강성의 최대값을 고유

치로 표현할 수 있다. 식(13)에서, 각 고유치를

$$\lambda_i = \lambda_{\max} - \Delta \lambda \quad (\Delta \lambda \geq 0)\quad (16)$$

로 표현해 보면,

$$\begin{aligned}s^2 &= \sum ((\lambda_{\max} - \Delta \lambda_i) w_i)^2 \\ &= \sum w_i^2 (\lambda_{\max}^2 - 2\lambda_{\max} \Delta \lambda_i + \Delta \lambda_i^2) \\ &= \lambda_{\max}^2 \sum w_i^2 - 2\lambda_{\max} \sum w_i^2 \Delta \lambda_i + \sum w_i^2 \Delta \lambda_i^2\end{aligned}\quad (17)$$

가 된다. 여기서 $\Delta \lambda_i^2 \leq \lambda_{\max} \Delta \lambda_i$ 이므로

$$\begin{aligned}s^2 &\leq \lambda_{\max}^2 \sum w_i^2 - 2\lambda_{\max} \sum w_i^2 \Delta \lambda_i + \sum w_i^2 \lambda_{\max} \Delta \lambda_i \\ &\leq \lambda_{\max}^2 \sum w_i^2 = \lambda_{\max}^2\end{aligned}\quad (18)$$

와 같은 관계를 얻을 수 있다. 위와 같이 강성 s 는 행렬 K의 최대고유치보다 작게 됨을 알 수 있다.

식(15)와 (18)로부터, 병렬형 기구의 강성은 고유치를 이용해서 그 범위를 결정할 수 있으며, 강성의 최대최소치는 고유벡터 방향에서 나타나게 된다.

4. 가공경로에 따른 강성 변화 시뮬레이션

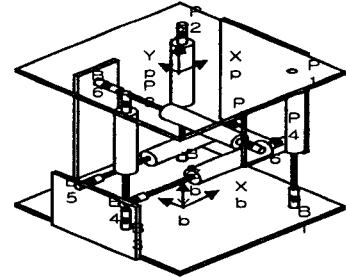


Fig.1 Structure of cubic parallel device

Fig.1 과 같이 본 연구에서 사용된 육면형 병렬 기구는 일반 스튜어트 플랫폼을 응용 변형한 것으로 3 개의 다리가 수직으로 연결되고, X 축방향으로 2 개의 다리가, Y 축방향으로 1 개의 다리가 연결되어 있다. 본 모델은, 각 다리의 길이를 변화시켜서 운동을 만들 때, 단순한 축방향 운동에 대해 비교적 독립적이라는 장점이 있으며, 고속에서 플랫폼의 궤적 제어를 하는데 있어서 실시간 제어가 용이하다.

위와 같은 병렬형 기구에 대하여, 가공경로에 따라서 나타나는 강성의 변화와 강성의 범위를 해석해 보도록 하겠다. 볼스크루의 강성을 모델링 하는데 있어서, 식(4)에서 기준길이 30cm, 50cm에 대하여, 강성을 $k_{1,2} = 95.14 \times 10^6, 90.85 \times 10^6 \text{ N/m}$ 로 하였다. Table. 1.은 플랫폼이 다음 위치에 있을 때 각 방향 강성을 계산한 결과 예이다.

Table. 1. Stiffness calculation: case study

Platform position	P=(7, -8, 35), RPY=($\pi/12$, 0, 0)				
Direction	X	Y	Z	min.	max.
Stiffness(10e8)	2.17	0.90	3.01	0.38	1820

Fig.2 는 플랫폼이 $y=0cm$, $z=40cm$ 인 평면에서, 회전 없이 $x=-10\sim 10cm$ 구간을 직선 이송 하는 동안 수직방향 강성의 변화를 나타낸 것이며, Fig.3 은 각 위치에서의 강성의 최소값을 나타낸 것이다. 그리고, Fig.4 는 플랫폼이 $z=40cm$ 인 평면위에 있을 때, 수직방향 강성을 맵핑한 것이고, Fig.5 는 각 위치에서의 강성의 최소값을 맵핑한 것이다.

육면형 병렬기구는 Z 축 방향으로 3 개의 다리가 지지하는 구조이므로, Table.1 에서 알 수 있듯이 수직방향의 강성이 수평방향보다 크게 나오고 있으며, 강성의 최소값은 다리의 축방향 하중의 약 42% 정도가 된다. 본 모델은 원점 근방에서 각 방향 강성이 비교적 크게 나오고 있으며, 플랫폼이 원점에서 멀어져 갈수록 강성이 점점 줄어들고 있다.

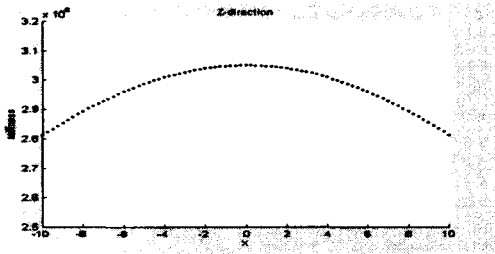


Fig.2 Z-direction stiffness in x=(-10,10)

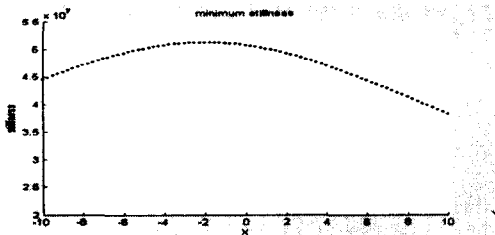


Fig.3 Minimum stiffness in x=(-10,10)

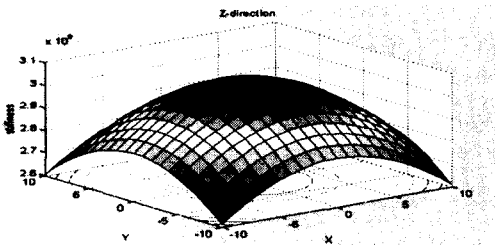


Fig.4 Z-direction stiffness mapping

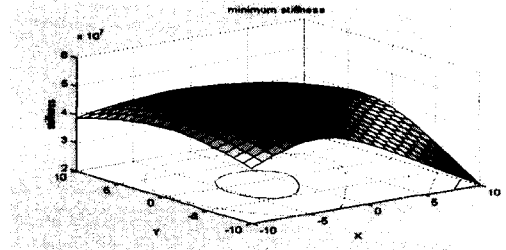


Fig.5 Minimum stiffness mapping

5. 결론

본 연구에서는 병렬형 기구의 강성을 해석하는데 있어서, 각 다리의 강성을 길이에 대하여 선형 함수로 모델링하고 강성 행렬을 구했으며, 행렬 K의 고유치를 이용하여 강성의 범위를 분석해보았다.

특히 외력이 행렬 K 고유벡터방향으로 가해지는 경우, 기구의 강성이 가장 취약한 상황이 발생할 수 있다. 병렬형 기구의 강성변화와 범위를 정확히 분석하는 것은, 강성변화를 설계단계부터 고려하여, 가공오차를 줄이고 안정성을 확보하는데 많은 도움이 될 것으로 보인다.

참고문헌

1. E. F. Fichter, "A Stewart Platform-Based Manipulator: General Theory and Practical Construction," International Journal of Robotics Research, Vol. 5, No.2, pp. 157-181, 1986.
2. Clement Gosselin, "Stiffness Mapping for Parallel Manipulator," IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 6, No. 3, pp. 377-382, 1990.
3. Lung-Wen Tsai, "Robot Analysis : The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators," A Wiley-Interscience Publication, 1999.
4. Bashar S. El-Khasawneh and Placid M. Ferreira, "Computation of stiffness bounds for parallel link manipulators," International Journal of Machine Tools & Manufacture , pp.321-342,1999.
5. 최우천, 장재형, "육면형 병렬기구의 동역학적 거동 해석," 한국정밀공학회 추계학술대회논문집, pp.275-278,1999.