

벡터유한요소법을 이용한 유전체 도파관 해석

김영태\*, 이필용, 박준석, 안달, 김형석  
 순천향대학교 정보기술공학부

Analysis of Dielectric Waveguide Using Vector Finite Element Method

Young-Tae Kim\*, Pil-Yong Lee, Jun-Seok Park, Dal Ahn, Hyeong-Seok Kim  
 Division of Information Technology Engineering, Soonchunhyang University

**Abstract** - In this paper, Dielectric waveguides have been calculated using the vector finite element method. This method is introduced that allows propagation constants and electric field distribution to be computed directly. In order to obtain more accurate solutions, Second order vector elements are proposed.

1. 서론

최근 이동통신분야의 급격한 발달로 인해 마이크로파 대역 및 초고주파 대역에서의 통신소자 해석이 크게 필요하게 되었다. 이러한 소자들을 해석하기 위해서 모드 정합법(Mode Matching Method)[1], 모멘트법(Moment Method)[2], 유한요소법(Finite Element Method)[3], 유한차분 시간영역 해석법(Finite Difference Time Domain)[4] 등 다양한 수치해석적 기법들이 제시되고 있다. 본 논문에서는 여러 가지 수치 해석적 방법 중 해석 모델의 적용력이 뛰어난 유한요소법을 이용하였다. 유한요소법은 기존의 분할된 요소(element)의 절점(node)에 변수를 인가하는 방법과 분할된 요소의 변(edge)에 변수를 인가하는 방법[5]이 있다. 유한요소법을 정식화하는 과정에 있어서 맥스웰 방정식중 발산방정식이 자연히 만족되어 가상해(spurious)가 발생하지 않는 벡터유한요소법을 이용하였다. 본 논문에서는 벡터유한요소법을 적용하여 다양한 유전체 도파관에서 도파관 구조 및 유전체 형상에 따른 특징 파수(wave number:  $k$ ) 또는 주파수에 해당하는 전파상수(phase constant :  $\beta$ )를 계산하는 과정을 구현하였다. 벡터유한요소법을 이용하여 계산하는 과정에서 형상함수(shape function)의 차수를 높여서[6] 실제 고유치 문제의 형태에서 계산치의 정확성을 고찰하였다.

2. 벡터유한요소법

시간적인 변화를 갖는 계에 대한 맥스웰방정식 2개를 표현하면

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.2)$$

와 같이 표현되며 복소페이즈형식으로 다시 표현하면

$$\nabla \times E = -j\omega\mu_0\mu_r H \quad (2.3)$$

가 되며 자유공간내에서의 전자파동을 고찰하므로 전하밀도  $\rho_v = 0$ , 전류밀도  $J = 0$ 인 경우의 맥스웰 방정식을 생각하므로 식 2.2을 대입하여 정리하면

$$\nabla \times H = j\omega\epsilon_0\epsilon_r E \quad (2.4)$$

라고 표현할 수 있다.

자계  $E$ 에 대한 벡터 헬름홀츠 방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times E \right) - k_0^2 \epsilon_r E = 0 \quad (2.5)$$

자계  $H$ 에 대한 벡터 헬름홀츠 방정식도 위와 동일한 방법으로 유도할 수 있다.

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times H \right) - k_0^2 \mu_r H = 0 \quad (2.6)$$

벡터유한요소법을 이용해서 전장벡터  $E$ 을 해석하기 위해서 식 2.6을 횡(transverse) 성분과 종(longitudinal) 성분으로 나누어서 표현하면

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times E_t \right) - \frac{1}{\mu_r} (j\beta \nabla_t E_z - \beta^2 E_t) \\ = k_0^2 \epsilon_r E_t \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu_r} [ \nabla_t \cdot (\nabla_t E_z + j\beta E_t) ] \\ = k_0^2 \epsilon_r E_z \end{aligned} \quad (2.8)$$

여기서  $E_t$ 는  $E_t = (E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}) \exp(-j\beta z)$ 로 표현되며  $E$  field의 횡과 즉  $x, y$ 성분을 나타낸다.  $\beta$ 와  $k_0^2$ 을 분리하고 복소수값(complex value)가 아닌 실수값을 얻기 위해서  $\vec{e}_t = \beta E_t$ ,  $e_z = -jE_z$ 로 놓고 갤러킨 방법(Galerkin method)을 적용하기 위해서 벡터형상함수(vector weighting function)  $W_i$ 을 곱하고 스칼라형상함수(scalar weighting function)  $L_j$ 을 곱하여 도파관의 cross section( $\Gamma$ )에 대해서 적분을 취하면

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} [ W_i \cdot \nabla_t \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \vec{e}_t \right) \\ + \frac{\beta^2}{\mu_r} (W_i \cdot \nabla_t e_z + W_i \cdot \vec{e}_t) ] ds \\ = k_0^2 \epsilon_r \iint_{\Gamma} W_i \cdot \vec{e}_t ds \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu_r} \iint_{\Gamma} L_j [ \nabla_t \cdot (\nabla_t e_z + \vec{e}_t) ] \\ = k_0^2 \epsilon_r \iint_{\Gamma} L_j e_z ds \end{aligned} \quad (2.10)$$

과 같이 된다.

벡터등식과 발산정리를 이용하여 식2.9와 식2.10을 weak form 형태로 표현하면

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu_r} \iint_{\Gamma} [ (\nabla_t \times W_i) \cdot (\nabla_t \times \vec{e}_t) \\ + (\beta^2 W_i \cdot \nabla_t e_z + \beta^2 W_i \cdot \vec{e}_t) ] ds \\ = k_0^2 \epsilon_r \iint_{\Gamma} W_i \cdot \vec{e}_t ds \\ -\frac{1}{\mu_r} \iint_{\Gamma} W_i \cdot (\hat{n} \times \nabla_t \times \vec{e}_t) ds \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_r} \int \int_{\Gamma} (\nabla_t L_j \cdot \nabla_t e_z + \nabla_t L_j \cdot \vec{e}_t) ds \\ & = k_o^2 \epsilon_r \int \int_{\Gamma} L_j e_z ds \\ & + \frac{1}{\mu_r} \int_{\Gamma} (L_j \frac{\partial e_z}{\partial n} + L_j \hat{n} \cdot \vec{e}_t) ds \end{aligned} \quad (2.12)$$

도파관의 경계조건을 완전도체로 적용하고 행렬의 대칭을 위해서 식2.12에  $\beta^2$ 을 곱하여 정리하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_r} \sum_{m=1}^3 \int \int_{\Delta} (\nabla_t \times W_{tm}) \cdot (\nabla_t \times W_{in}) e_{tm} ds \\ & - k_o^2 \sum_{m=1}^3 \epsilon_r \int \int_{\Delta} (W_{tm} \cdot W_{in}) e_{tm} ds \\ & = -\beta^2 \left( \frac{1}{\mu_r} \sum_{m=1}^3 \int \int_{\Delta} (W_{tm} \cdot \nabla L_j) e_{zj} ds \right. \\ & \left. + \frac{1}{\mu_r} \sum_{m=1}^3 \int \int_{\Delta} (W_{tm} \cdot W_{in}) e_{tm} ds \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\beta^2}{\mu_r} \sum_{i=1}^3 \int \int_{\Delta} (\nabla L_i \cdot \nabla L_j) e_{zj} ds \\ & + \frac{\beta^2}{\mu_r} \sum_{i=1}^3 \int \int_{\Delta} (\nabla L_i \cdot W_{in}) e_{im} ds \\ & = \beta^2 \sum_{i=1}^3 k_o^2 \epsilon_r \int \int_{\Delta} L_i L_j e_{zj} ds \end{aligned} \quad (2.14)$$

와 같은 식을 얻을 수 있다.

최종적으로 행렬 형태로 조합하면

$$\begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = (-\beta^2) \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

와 같은 형태가 된다.

### 3. 2차 형상함수 적용

본 논문에서는 계산의 정확성을 높이기 위해서 2차 노드형상함수를 이용하였으며 2차 노드형상함수(M)는 그림 1의 형태로 표현된다.

2차 노드형상함수를 구체적으로 표현하면

$$\begin{aligned} N_i &= L_i (2L_i - 1) \quad i = 1, 2, 3 \\ N_i &= 4L_j L_k \quad i = 4, 5, 6 \\ & \quad j = 1, 2, 3 \quad j = 2, 3, 1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

와 같이 된다.

벡터형상함수는 노드형상함수와는 달리 방향을 가지고 있으며 맥스웰 방정식의 발산정리를 만족하기 위해 고안된 형상함수이다.

벡터형상함수는 노드형상함수와 병행해서 행렬이 조립되므로 1차형상함수가 아닌 2차형상함수를 쓰기 위해서는

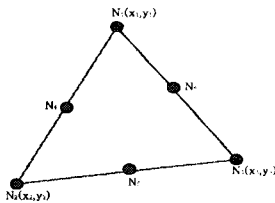


그림 1. 삼각형 요소에서의 2차 노드 형상함수

같은 차수의 형태로 형상함수를 적용하여야 한다.

벡터형상함수는 크기뿐만 아니라 방향성을 가지고 있기 때문에 행렬 시스템 조립시 공통변을 갖는 이웃한 요소와 변을 비교하였을 때 방향이 반대이면 '-1'을 고려하여야 한다.

노드 형상함수와 같은 개념으로 1차 벡터형상함수보다 높은 정확성을 위해서 2차 벡터형상함수를 표현하면 그림 2와 같이 표현되면 구체적인 수식 표현은 식3.2와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} W_{ij}^0 &= (4L_i - 1)(4L_i \nabla L_j - L_j \nabla L_i) \\ W_{ij}^1 &= (4L_j - 1)(4L_j \nabla L_i - L_i \nabla L_j) \\ W_{nm}^f &= (4L_k - 1)(4L_i \nabla L_j - L_j \nabla L_i) \\ & \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad m, n = 4, 5, 6 \end{aligned} \quad (3.2)$$

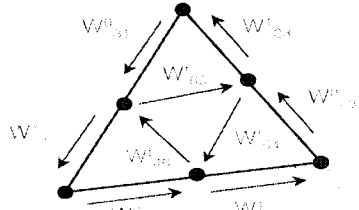


그림 2. 삼각형 요소에서의 2차 벡터 형상함수

### 3. 적용 사례

도파관 WR-102 a=2.591 b=1.295cm d=b/2 e=a/2에 그림3와 그림4에서처럼 도파관의 일부에 유전체(비유전율:2.45)가 채워져 있을 경우 특정 주파수에서의 전계 x,y방향성분과 고유치 값인 전파상수(phase constant :  $\beta$ ) 값을 계산하였다.

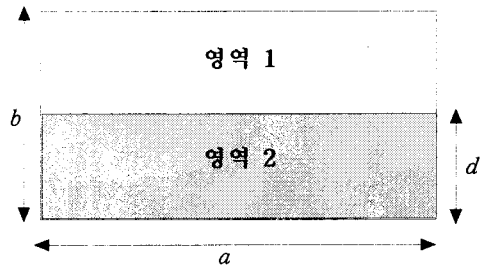


그림 3. 도파관에 유전체가 d까지 채워진 형상

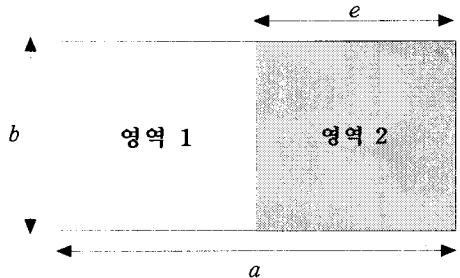


그림 4. 도파관에 유전체가 e까지 채워진 형상

20Ghz일 경우에 각각의 모드에 해당하는 전파상수 값을 계산하였으며 표1에서 그 결과를 나타낸다.

20Ghz일 경우	각 모드에 해당하는 전파상수 값			
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
그림 5	608.47	571.18	546.72	533.01
그림 6	621.74	598.86	572.35	508.02

표 1. 그림 3,4에서 각 모드에 해당하는 전파상수 값

그림 3,4에 해당하는 구조의 도파관에서의 계산된 전계의 x,y 방향을 표현하면 그림5,6에서와 같이 표현할 수 있다.

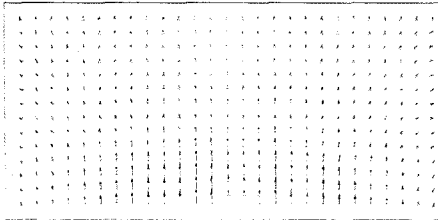


그림 5. 유전체가  $d$ 까지 채워진 형상을 가진 도파관에서의 Mode 1의 전계의 표현

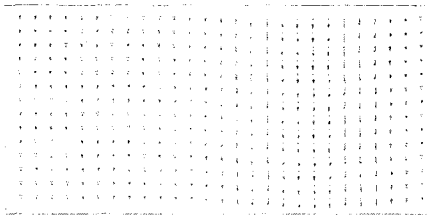


그림 6. 유전체가  $e$ 까지 채워진 형상을 가진 도파관에서의 Mode 1의 전계의 표현

다양한 구조의 도파관을 해석하기 위해서 그림 7과 같은 구조의 원통도파관( $a=3, p=4\text{cm}$ )에서의 원통 두 개가 모두 metal로 되어져 있으며 유전체가 일부 채워졌을 경우에서의 전파상수와 필드분포를 구하였다.

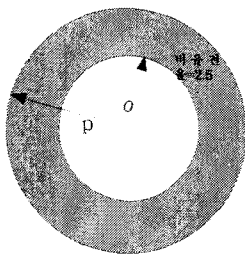


그림 7. 원통 도파관에 유전체가 일부분 채워진 형상

그림8은 원통 도파관에 일부 유전체가 채워진 경우의 형상에 대한 요소분할 형상 및 모드 첫 번째의 전계의 필드분포이다.

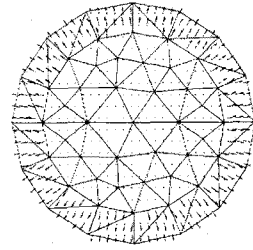


그림 8. 원통도파관에서의 요소 분할 형상과 전계 분포

그림8에 모드의 첫 번째 모드에 에 해당하는 전파상수의 값은 331.3786이다.

#### 4. 결 론

본 논문에서는 벡터유한요소법을 적용하여 유전체 도파관에서 도파관 구조 및 유전체 형상에 따른 각 모드들의 전파상수와 필드분포를 계산하였다. 벡터유한요소법을 이용하여 계산하는 과정에서 형상함수의 차수를 높여서 실제 고유치 문제의 형태에서 계산치의 정확성을 고찰하였다.

향후 마이크로파 대역 및 밀리미터파 대역에서 유전체를 이용한 저손실, 저가격의 유연한 도파관을 설계하여 소형화 및 경량화를 이룰 수 있을 것으로 판단되며 밀리미터파 시스템의 응용범위를 한층 더 넓힐 수 있을 것으로 판단된다

#### [참 고 문 헌]

- [1] T. Itoh, Ed., "Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structure", John Wiley & Sons, 1989.
- [2] R. W. Hamming, "Numerical Methods for Scientist and Engineers", Dover, 1973
- [3] Jianming Jin, "The Finite Element Method in Electromagnetics", John Wiley & Sons, 1993.
- [4] Allen Taflove, "Computational Electrodynamics The Finite-Difference Time Domain Method", Artech House, 1995.
- [5] Z. J. Cendes, "Vector finite elements for electromagnetics, vol. 27, No.5, pp.3958-3966, September 1991.
- [6] Akira AHAGON, Takashi KASHIMOTO, "Three Dimensional Electromagnetic Wave Analysis Using High Order Edge Elements", IEEE Trans. on Mag