

미세탐색을 이용한 계수 최소 자승 방법

전 창 대, 장 병 건
인천대학교 전기공학과

A Weighted Least Square Method Using a Fine Search

Chang-Dae Jeon, Byong-Kun Chang
Department of Electrical Engineering, Univ. of Incheon
E-mail : tinysky@dsplab.inchon.ac.kr, chang@lion.inchon.ac.kr

요 약

본 논문은 최소어레이의 패턴을 원하는 패턴과 실제 최소어레이의 패턴간의 오차의 계수적 자승치를 미세탐색을 이용하여 최소화하여 최적화하는 방법을 제시한다. 센서의 간격이 어레이 중심에 관하여 대칭인 경우와 비대칭인 경우에 대하여 성능을 점검하며, 어레이 공간의 주어진 영역의 오차함수에 성능 향상을 위하여 계수를 적용한다.

미세탐색을 이용함으로써 계수 최소 방법의 성능이 주빔 부근의 측면엽에 관련하여 향상되는 것이 판명되었다.

I. 서 론

최소어레이는 정상어레이에 비하여 적은 수의 센서를 가지기 때문에 빔패턴의 측면엽이 정상어레이보다는 높아지며 따라서 입사되는 잡음을 효과적으로 줄일 수가 없게 된다. 따라서 최소어레이의 설계에서의 문제는 측면엽의 성능을 정상어레이와 버금가게 하기 위한 최적

화 방법을 고안하는 것이다. 최소어레이는 1950년대부터 Unz[1]에 의하여 시작된 이래 꾸준히 연구되어 왔으며 radar[2], 천문학[3], 위성통신[4] 등에서 광범위하게 사용되어 왔다.

본 논문에서는 어레이계수는 균등하다고 가정하고 센서간격을 조정함으로써 최적패턴을 형성하였다. 센서간격에 관련하여 두 가지 형태의 어레이 구조를 점검하였다. 대칭적인 구조에서는 센서간격이 어레이 중앙에 대하여 대칭이며, 비대칭적 구조에서는 센서간격이 임의로 위치하게 된다.

홀수개의 센서를 가진 대칭적인 최소어레이의 어레이 이득은 다음 식으로 주어진다.

$$H_r(\omega) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{N_1} a_n \cos(\omega d_n) \quad (1)$$

N_1 은 어레이 중앙으로부터 한 쪽의 센서 수, a_n 은 n 번째 어레이 계수이고, a_0 은 어레이 중앙 센서의 계수이며, $\omega = \pi \sin \theta$, θ 는 어레이 수직으로 부터의 각도이며, 어레이 기준센서로 부터의 거리이며, d_n 은 어레이 기준센서로부터의 거리이며 단위는 입사신호 파장의 반이다.

본 논문에서는 어레이 구조는 대칭적이고, 센서 수는 홀수 개라고 가정한다.

원하는 패턴과 최소어레이의 패턴간의 계수오차의 자승을 최소화하기 위하여 steepest descent 방법[5]을 적용하여 센서간격을 반복적으로 조정하여 최적치를 구하였다. 원하는 패턴은 Remez exchange 알고리즘[6]에 의하여 얻어진 균등한 측면률을 가진 패턴으로 하였다. 큰 잡음이 입사되는 어레이 공간영역의 잡음 제거성능을 높이기 위하여 해당영역의 측면률을 낮출 필요가 있다. 이를 위하여 어레이 공간 영역별로 다른 계수를 적용하여 측면률의 높이를 조절할 수 있으며, 어레이 계수가 상대적으로 큰 영역의 측면률은 낮아지게 된다.

II. 계수 자승 오차 방법

대칭 및 비대칭구조에 대하여 반복계수 최소자승 방법을 이용하여 원하는 패턴을 구한다. k 번째 반복시 원하는 어레이 팩터와 최소어레이 팩터 사이의 계수오차는 다음과 같이 주어진다.

$$E^k(\omega) = W(\omega)[H(\omega) - H^k(\omega)] \quad (2)$$

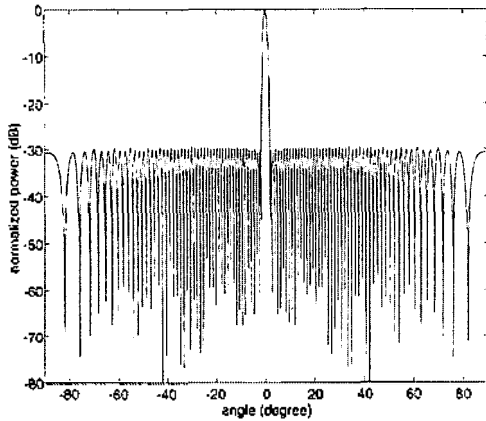


그림 1 Remez exchange 알고리즘에 의하여 최적화된

101개의 센서로 구성된 정상어레이의 빔패턴.

여기서 $H(\omega)$ 는 원하는 빔 패턴 어레이팩터이며, 최소어레이 패턴의 최적화 문제는 최소어레이 어레이팩터인 (1)에서 원하는 패턴의 가장 가까운 예측패턴을 제공하는 센서간격 d_n 을 구하는 것이다. Remez exchange 알고리즘에 의하여 얻어진 균등한 측면률을 가진 패턴으로 하였다. 실험에서 사용된 101개 센서를 가진 정상어레이에 Remez exchange 알고리즘을 이용하여 얻어진 최적화 패턴이 그림 1에 나타나 있다. 어레이 팩터의 이득응답은 ω 에 관하여 대칭이기 때문에 본 연구에서는 어레이 가시범위의 반(즉 $\omega \in [0, \pi]$)에 대하여만 고려한다. $W(\omega)$ 는 계수함수이며, 패턴의 영역에 따라 다른 계수를 사용함으로써 패턴을 제어할 수 있게 한다. 예를 들면 주빔과 측면률을 구분하여 다음과 같은 계수함수

를 적용함으로써 패턴을 제어할 수 있다.

$$W(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in [0, \omega_p] \\ c & \omega \in [\omega_p, \pi] \end{cases} \quad (3)$$

여기서 ω_p 는 원하는 패턴의 주빔폭의 반을 나타내며 c 는 임의의 상수이다. c 가 1 보다 크면 측면률에 더 강조되어 측면률 성능이 향상된다. k 번째 반복시 $0 \leq \omega \leq \pi$ 구간에서 자승오차는 다음과 같이 주어진다.

$$e^k = \frac{1}{2} \int_0^\pi |E^k(\omega)|^2 d\omega \quad (4)$$

여기서 $1/2$ 는 후의 연산을 간략화하기 위하여 포함시켰다. 각 반복시 각 간격 d_n 을 Δd_n 만큼 동요시키고 Δd_n 이 매우 작다고 가정하면 (4)의 계수자승오차 함수는 Δd_n 에 관한 2차 함수로 근사될 수 있으며 따라서 steepest decent 방법과 같은 반복방법을 사용하여 부 최적치를 구할 수 있다.

최적화 과정에서 주빔의 폭을 정상어레이와 같이 유지하기 위하여 어레이의 양끝 센서는 고정시켰다. Δd_n 이 작다고 가정할 때 대칭구조에서 Taylor series 근사식을 이용하면 다음과 같은 반복식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} e^{k+1} &= e^k \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N} \int_0^\pi W \left[j\omega \sum_{n=1}^N e^{-j\omega d_n^k} \right] (E^k(\omega))^* d\omega \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N} \int_0^\pi W \left[j\omega \sum_{n=1}^N e^{-j\omega d_n^k} \right]^* E^k(\omega) d\omega \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N^2} \int_0^\pi W^2 \left[j\omega \sum_{n=1}^N e^{-j\omega d_n^k} \right] \\ &\cdot \left[j\omega \sum_{n=1}^N e^{-j\omega d_n^k} \Delta d_n^k \right] d\omega \end{aligned} \quad (5)$$

여기에서 계수의 합은 1로 정규화하고 *는 복소켤레 (complex conjugate)를 나타낸다. 식(5)은 Δd_n 에 대하여 2차식이며, 따라서 steepest descent 방법을 적용하여 오차함수를 최소화함으로써 센서간격에 대한 부 최적화 답을 구할 수 있다.

e^{k+1} 을 $\Delta d_n^k, 1 \leq n \leq N_1 - 1$ 에 관하여 미분하여 미분함수를 구하여 간격변화 Δd_n 을 갱신하는 다음과 같은 반복식을 구할 수 있다.

$$\Delta d_n^{k+1} = \Delta d_n^k - \mu \frac{\partial e^{k+1}}{\partial \Delta d_n^k}, \quad 1 \leq n \leq N_1 - 1 \quad (6)$$

여기서 Δd_n^k 와 Δd_n^{k+1} 은 k 와 $(k+1)$ 번째 반복에서 n 번째 간격의 변화량이며, μ 는 수렴계수이고, $\frac{\partial e^{k+1}}{\partial \Delta d_n^k}$ 은 k 번째 반복에서 Δd_n 에 관한 오차의 미분벡터이다. $(k+1)$ 번째의 n 번째 간격은 다음과 같이 갱신된다.

$$d_n^{k+1} = d_n^k + \Delta d_n^{k+1}, \quad 1 \leq n \leq N_1 - 1 \quad (7)$$

여기서 d_n^k 와 d_n^{k+1} 은 k 와 $(k+1)$ 번째의 센서 n 의 간격이다.

계수 최소화 방법의 성능을 향상시키는 한가지 방법은 어레이 가시 공간 영역을 여러 개의 부분으로 나누어 각 부분에 다른 계수를 사용하는 다계수합수를 사용하는 것이다. 만약 한 부분의 계수가 다른 부분들보다 크다면 그 부분의 측면률은 다른 부분보다 더 낮아지며 다른 부분의 측면률은 높아지게 된다.

III. 주파수영역에서의 미세탐색

어레이팩터의 2차원 표면으로부터 발견된 부최적치에서 정확한 오차함수를 이용하여 최적치를 구하기 위하여 미세 탐색을 하게 된다. 정확한 오차함수는 2차함수가 아니며 multimodal이다. 2차함수의 최적치 부근에서는 오차함수가 unimodal이라고 가정할 수 있기 때문에 정확한 오차함수에 대한 steepest descent 방법을 이용하여 최적치를 구할 수 있다. 따라서, 미세탐색은 정확한 오차함수를 d_n^k 에 관하여 구한 미분함수를 사용한다.

미세탐색을 위한 또 다른 방법은 먼저 정확한 오차함수를 구한 후 그것을 Taylor series expansion을 이용하여 2차함수로 근사화 하는 것이다. 비대칭적 구조에서 정확한 자승오차함수는 아래와 같다.

$$\epsilon = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\sin[\pi(d_i - d_j)]}{(d_i - d_j)} - N \sum_{m=0}^{M_1} \sum_{n=0}^{M_1} a_m \left\{ \frac{\sin[\pi(d_n - M_1 + m)]}{(d_n - M_1 + m)} + \frac{\sin[\pi(d_n - M_1 - m)]}{(d_n - M_1 - m)} \right\} \quad (8)$$

여기서 M_1 은 101소자의 정상 어레이가 원하는 패턴을 만들기 위하여 사용될 때 50이되며, a_m 은 정상 어레이 계수이다. 오차함수 ϵ 은 2차 근사식을 이용하여 근사화된다.

$$\frac{\sin(x_0 + \Delta x)}{(x_0 + \Delta x)} = \frac{\sin x_0}{x_0} + \frac{x_0 \cos x_0 - \sin x_0}{x_0^2} \cdot \Delta x + \frac{2 \sin x_0 - 2x_0 \cos x_0 - x_0^2 \sin x_0}{2x_0^3} \cdot \Delta x^2 \quad (9)$$

식(9)를 식(8)에 대입하여 얻은 근사 오차의 미분치를 식(6)에 대입하여 최적치에 대한 미세탐색을 하게 된다.

IV. 실험 결과

101개의 정상 어레이에서 센서 수를 50% 감소한 51센서를 가진 최소어레이를 사용하였다.

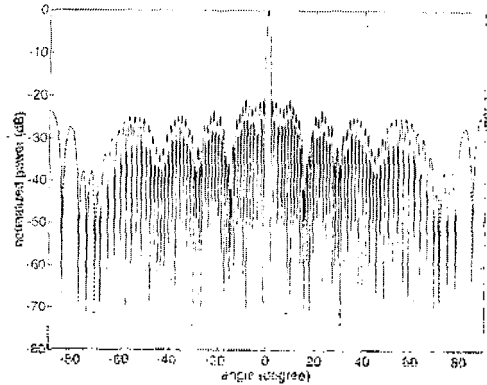


그림 2 미세탐색에 의하여 최적화된 51개 센서의 최

소어레이의 빔패턴(실선); 점선은 초기패턴.

51개의 센서로 이루어진 최소어레이를 미세탐색으로 최적화한 빔패턴이 그림 2에 초기패턴과 같이 나타나 있다. 초기패턴은 2차 오차함수를 식(6)의 steepest descent 방법을 이용하여 최적화 하여 얻어진 부최적 간격에 의하여 얻어진 것이다. 미세탐색에 의한 패턴이 최소 자승 방법에 의한 패턴보다 주빔 부근에서 성능이 약간 향상된 것을 알 수 있다.

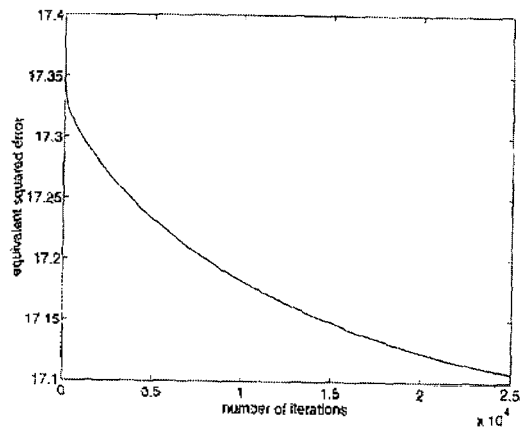


그림 3 미세탐색에 의한 learning curve.

그림 3은 오차자승의 변화를 나타낸 learning curve로서 25000회의 반복 미세탐색에도 수렴하지 않는 것을 볼 수 있다.

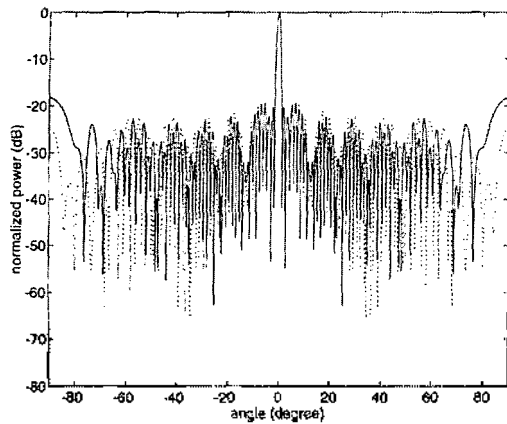


그림 4 49개 센서 회소어레이에 대한 Taylor series expansion(실선)과 최소자승방법(점선)에 의한 최적화 패턴의 비교.

49개의 센서로 이루어진 회소어레이에서 식(8)의 Taylor series expansion에 의하여 근사화한 오차함수에 대하여 미세탐색을 한 패턴이 그림 4에 초기패턴과 같이 나타나 있다. 초기패턴은 최소자승방법에 의하여 구한 부최적센서 간격에 의하여 형성된 것이다. Endfire 방향을 제외하고는 전체적으로 측면로의 성능이 향상된 것을 볼 수 있다.

V. 결 론

최소자승오차방법으로 최적화하여 얻은 부최적 센서 간격을 초기간격으로 하여 미세탐색을 시도 하였다. 정확한 오차함수와 Taylor series expansion을 이용하였다. 미세탐색을 하지 않은 결과와 어레이 성능을 비교한 결과 미세탐색을 한 경우가 성능이 더 우수한 것으로 나타났다.

참고 문헌

- [1] H. Unz, "Linear arrays with arbitrarily distributed elements," *Electronic Res. Lab., Univ. of California, Berkeley*, Rept. Ser. no. 60, Issue no. 168, Nov. 2, 1956.
- [2] W. Doyle, "On approximating linear array factors," The RAND Corporation, Memorandum RM-3530-PR, Feb. 1963.
- [3] G. W. Swenson, Jr and Y.T. Lo, "The University of Illinois radio telescope," *IRE Trans. Antennas Propagat.*, pp. 9-16, Jan. 1961.

- [4] J. T. Mayhan, "Thinned array configuration for use with satellite-based adaptive antennas," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-28, no.n, pp. 846-856, Nov. 1980.
- [5] B. Widrow and S. D. Stearns "Adaptive Signal processing," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1985.
- [6] T. W. Parks and J. H. McClellan, "Chebyshev approximation for nonrecursive digital filters with linear phase," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-19, pp. 189-194, Mar. 1972.