

레이추적기법을 이용한 평판 횡진동의 단일주파수 해석

채기상*, 이정권

한국과학기술원 기계공학과 소음 및 진동제어 연구센터

Single Frequency Analysis of Flexural Vibration of Thin Plate by Using the Ray Tracing Method

Ki-Sang Chae and Jeong-Guon Ih

NoViC, Department of Mechanical Engineering, KAIST

e-mail: ihih@sorak.kaist.ac.kr

요약문

강제가진을 받는 진동장은 직접장과 반사장으로 이루어진다. 직접장은 무한구조요소가 점입력을 받을 때의 해와 같으며, 반사장은 직접장에 의해 발생하는 1차 반사파 및 추가로 발생하는 무수한 반사파들의 합으로 나타낼 수 있다. 본 논문에서는 점가진을 받는 유한한 평판의 단일 주파수 해석을 수행하기 위한 레이추적기법을 연구하였다. 이를 위해, 직접장은 고주파수 가정을 이용하여 원형전달파로 근사화하고, 이 원형전달파를 다수의 파동관 (wave tube)으로 이산화하였다. 균일한 경계조건과 무시할 만큼의 미약한 굴절효과를 가정하고 경계에서의 정반사 (specular reflection)만을 고려하여, 경계에서의 입사파동관, 전달 및 반사파동관의 기하학적 관계를 제안하였다. 이들 파동관이 평판 내부를 진행하면서 관측점에 미치는 영향들을 합성하여 비교적 정확한 강제진동응답을 얻을 수 있음을 단일 평판의 예제를 통하여 확인할 수 있었다. 그러나, 연성된 평판의 경우에는 다소 부정확한 결과를 얻었다.

1. 서론

레이추적기법(ray tracing method: RTM)은 기하음향학 (geometrical acoustics)의 한 방법으로 건축음향 분야에서 많이 적용되어 온 기법으로 음향 충격 응답 및 음장 분포 해석에 쓰이고 있다 [1,2]. 구조음향 분야에서도 이 방법을 적용한 선례들이 있었다. Cremer 등 [3]과 Skudrzyk [4]은 끝단이 가진을 받는 봉의 강제진동 해석에 적용한 바 있으며, Hugin [5]은 보의 강제진동 해석에 적용하여 중주파수 대역과 고주파수 대역에서 유효한 해석법임을 제시한 바 있다. Gunda *et al.* [6] 등은 기하음향학 중 하나인 영상음원법 (image source method)을 적

용하여 단일 사각 평판의 단일 주파수 강제진동 해석에 적용한 바 있으며, 저자들은 2차원 진동장의 에너지의 분포를 얻고자 원형파동에 개념을 둔 RTM을 제안하여 단일 평판 및 연성된 평판 구조물의 해석에 적용한 바 있다 [7]. 본 논문에서는 RTM을 이용하여 평판 강제진동의 단일주파수 해석을 시도하였다.

2. 본론

2.1. 직접장과 반사장

강제가진을 받는 진동장은 관련된 파동들이 진행과만으로 구성되어 있을 경우에는 다음과 같이 파동열 (wave train)의 개념을 이용하여 나타낼 수 있다:

$$w(\bar{x}, \bar{x}_f; \omega) = w_{dir}(\bar{x}, \bar{x}_f; \omega) + \sum_{n=1}^{\infty} w_{ref,n}(\bar{x}, \bar{x}_f; \omega). \quad (1)$$

여기서, $w_{dir}(\bar{x}, \bar{x}_f; \omega)$ 는 직접장에 의한 평면위, $w_{ref,n}(\bar{x}, \bar{x}_f; \omega)$ 는 n 번제의 반사장에 의한 평면위, \bar{x} 와 \bar{x}_f 는 각각 수음점과 가진점을 나타낸다.

$Fe^{j\omega t}$ 의 조화 점가진을 받는 얇은 평판의 횡진동의 직접장은 무한평판의 해이며 [3], 이는 고주파수 가정 ($|kr| \ll 1$)을 통해 다음과 같이 근사화할 수 있다:

$$w_{dir}(r) \approx \frac{F}{j8Dk^2} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-j(kr-\pi/4)}. \quad (2)$$

여기서, D 는 복소 강성계수로 손실계수 η 와 강성계수 D_0 를 사용하여 $D_0(1+j\eta)$ 로 나타낼 수 있으며, k 는 파수, r 는 $|\bar{x}-\bar{x}_f|$ 이다. 식 (2)의 근사화된 직접장은 원형전달파를 의미한다. 이 원형전달파를 그림 1과 같

이 다수의 레이튜브로 잘라서, 각 레이튜브의 진행을 추적하면서 수음점에 미치는 영향들을 합하면 강제진동 응답을 계산할 수 있다.

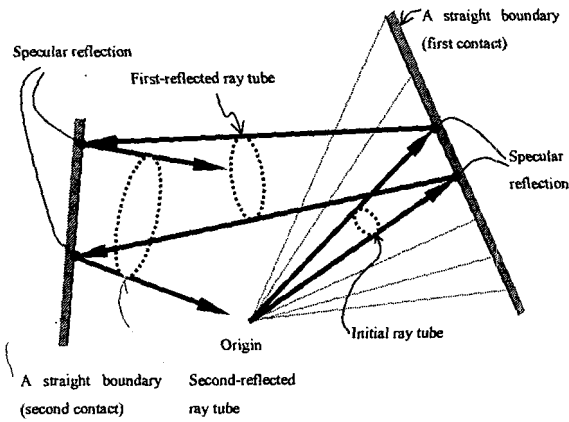


Figure 1. A bundle of ray tubes which is discretized from a circularly propagating wave. The solid line represents the propagation of a ray tube in the structural wave field confined between two straight boundaries.

이때, 경계가 직선으로 이루어져 있어 산란 (scattering) 효과가 없고 약한 회절 (diffraction) 만이 존재한다고 가정하여, 레이튜브가 경계에서 반사될 때는 정반사만으로 반사장을 묘사할 수 있다 [8,9].

2.2. 직접장의 계산

식 (2)의 직접장은 r 이 작은 가진점 근처에서 발산하는 특징이 있다 [3]. 이러한 발산을 막기 위하여 근사해의 최대치를 무한평면의 점응답 (point response: w_0) 으로 제한하면, 특정한 반경 r_0 를 경계로 하여

$$w_{dir}(\bar{x}) \approx w_0 \quad \text{for } r \leq r_0, \quad (3)$$

$$w_{dir}(\bar{x}) \approx w_0 \sqrt{\frac{r_0}{r}} e^{-j(kr - k_0 r)} \quad \text{for } r > r_0. \quad (4)$$

로 근사화된다. 이때, $w_0 = F / j8Dk^2$ 이며, r_0 는 $r_0^{-1} \approx \alpha + (\pi|k|/2)$ 의 근사관계로부터 산정할 수 있다.

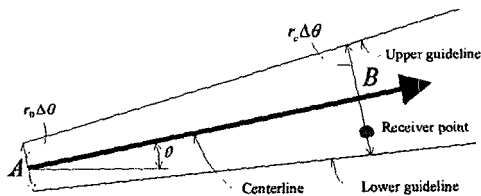


Figure 2. A ray tube model starting with an infinitesimally small angle $\Delta\theta$. The points A and B are positioned within ray tube sections at r_0 and r_c from the origin, respectively.

따라서, 각 레이튜브를 r_0 지점부터 추적하게 되면 그림 2의 관계를 이용하여

$$w_{dir}(\bar{x}) \approx w_0 \sqrt{r_0/r_c} \text{Exp}[-jk(r_c - r_0)], \quad (5)$$

로 직접장을 근사화할 수 있다.

2.3. 반사장의 계산

그림 3은 하나의 레이튜브가 연성경계로 입사할 때 발생하는 반사레이튜브와 전달레이튜브의 기하학적인 관계를 나타낸다. 이때, 입사레이튜브의 폭이 파장보다 훨씬 작으면 ($r\Delta\theta \ll \lambda$), 평면파의 입사처럼 간주할 수 있다고 가정하였다.

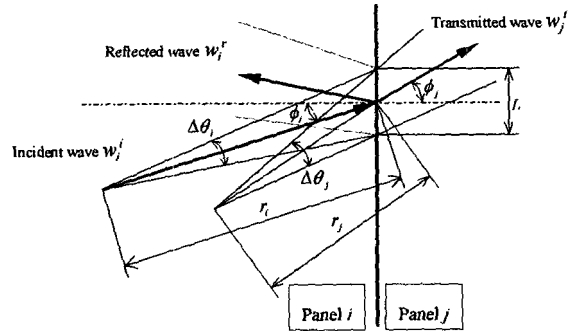


Figure 3. Geometrical schematic and notations of cylindrical ray tubes involved at the coupled boundary.

반사레이튜브의 전달거리와 폭은 입사레이튜브의 것들과 바뀌지 않으나, 전달레이튜브의 전달거리와 폭은 변화됨을 알 수 있으며, Snell's Law 와 기하학적 형상에 의해

$$\sin \phi_i / c_i = \sin \phi_j / c_j, \quad (6)$$

$$\Delta\theta_j \approx \Delta\theta_i c_j \cos(\phi_j) / c_i \cos(\phi_i) \quad (\Delta\theta_i \ll 1), \quad (7)$$

$$r_i \Delta\theta_i \cos \phi_i = r_j \Delta\theta_j \cos \phi_j, \quad (8)$$

로 근사화가 가능하다. 입사파의 변위 크기가 w_i^i 이면 반사파의 크기 w_i^r 은 입사각 (ϕ_i) 에 의존하는 반사계수 ($r_i(\phi_i)$) 를 사용하여 $r_i(\phi_i) w_i^i$ 로 계산할 수 있으며, 전달파의 크기 w_j^t 는 입사각에 의존하는 전달계수 ($t_j(\phi_i)$) 를 사용하여 $t_j(\phi_i) w_i^i$ 로 계산할 수 있다. 새로이 생성된 반사레이튜브와 전달레이튜브에 대하여 각 수음점에 대하여 식 (5)와 같이 반사장을 계산할 수 있다. 이러한 과정을 반복하는 동안에 계산된 직접장과 반사장을 모두 합하여 강제진동응답을 계산할 수 있다.

2.4. 방향성 파동 및 인텐시티 계산

평판 진동장은 다수의 평면파로 이루어지며, 특정 지점 \bar{x}_0 의 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$w(\bar{x}_0) \approx \int_0^{2\pi} A(\theta) e^{-jk_0(\bar{x} - \bar{x}_0)} d\theta. \quad (9)$$

여기서, $A(\theta)$ 는 θ 방향으로 진행하는 방향성 파동의 크기, \vec{k}_0 는 방향성 파동의 파수로 $k(\cos\theta\vec{i}_x + \sin\theta\vec{i}_y)$ 이며, \vec{i}_x 와 \vec{i}_y 는 각각 x, y 방향의 단위벡터이다. 식 (9)는 P 개의 방향성 파동으로 이산화하여

$$w(\vec{x}_0) \approx \sum_{p=1}^P A_p e^{-jk_p(\vec{x}-\vec{x}_0)}, \quad (10)$$

으로 나타낼 수 있으며, 여기서 A_p 와 k_p 는 이산화된 방향성 파동의 크기 및 파수이다. 식 (5)와 같이 직접장과 반사장을 계산할 때, 레이튜브의 중심선의 방향이 $(\theta_p - 2\pi/P) < \theta < (\theta_p + 2\pi/P)$ 이면, 식 (5)에 의해 증가되는 변위 $\Delta w(\vec{x}_0)$ 에 의해 A_p 는 아래와 같이 근사적으로 증가된다:

$$\Delta A_p(\vec{x}_0) \approx \Delta w(\vec{x}_0) / \Delta \theta. \quad (11)$$

최종적으로 얻어진 식 (10)으로부터 평판의 인텐시티 관계식 [10]에 대입하면

$$I_r(x, y, \omega) = \frac{\omega}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_p \sum_q \left[\left((k_{x,p}^2 + k_{x,q}^2) + (k_{y,p}^2 + \mu k_{y,q}^2) k_{x,q} + (1-\mu) k_{x,p} k_{x,q} k_{y,q} \right) \right] \times \left(DA_p A_q e^{-j(k_{x,p} - k_{x,q})x - j(k_{y,p} - k_{y,q})y} \right) \right\},$$

$$I_i(x, y, \omega) = \frac{\omega}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_p \sum_q \left[\left((k_{x,p}^2 + k_{x,q}^2) + (k_{y,p}^2 + \mu k_{y,q}^2) k_{x,q} + (1-\mu) k_{x,p} k_{x,q} k_{y,q} \right) \right] \times \left(DA_p A_q e^{-j(k_{x,p} - k_{x,q})x - j(k_{y,p} - k_{y,q})y} \right) \right\}, \quad (12,13)$$

의 x, y 방향의 인텐시티를 얻을 수 있다. 여기서, $k_{x,p}$ 와 $k_{y,p}$ 는 k_p 의 x, y 성분이며, 방향 μ 는 포와송비이다.

3. 평판 구조물의 해석

두께 1.5 mm, x, y 방향의 길이가 각 2m 이고 사면이 단순지지되고 중심이 점가진을 받는 정사각 평판의 강제진동을 해석하였다. 여기서, 영률은 200Gpa, 밀도는 7800 kg/m³, 포와송비는 0.3 이다. 7200 개의 이산화된 레이튜브를 사용하고, 진행거리 r 은 $-\log_e(10^{-3})/\alpha + 10l_{mfp}$ 까지 진행시켰다. 여기서, α 는 파동의 거리감쇠 계수로 $\omega\eta/c_g$ [7]이며 l_{mfp} 는 자유진행거리 (mean free path) [11]로 S 가 면적, Ω 가 들레이면 $\pi S/\Omega$ 의 크기를 가진다. 진동인텐시티를 계산하기 위한 P 는 360 개를 설정하였다. 그림 4는 모드해석과 RTM에 의하여 계산된 진동분포, 그림 5는 인텐시티 분포, 그림 6은 특정 y에서의 진동분포 비교이다. 한편

의 길이를 L이라 할때, 100 Hz에서의 파장 λ 와 L의 비 λ/L 은 약 0.19이다. 그림 4와 그림 5로부터 진동 분포의 경우에는 RTM에 의한 결과가 모드해석치와 거의 유사함을 알 수 있다. 진동 인텐시티의 경우에는 가진점 근처에서는 유사하나 진행과 간의 간섭이 심한 경계에서는 다소 차이를 확인할 수 있다. 이는 이산화된 방향성 파동의 개수 P 와 관련이 있는 것으로 보이며, 좀더 정확한 해를 얻기 위해서는 더 많은 수의 P 를 선택하여야 할 것으로 판단된다.

그림 7과 8은 정사각형 평판 두께가 한면에서 단순 지지로 연결되어 있는 구조물을 해석한 경우로 평판 1과 평판 2의 두께가 1.5 mm, 3 mm로 서로 다른 경우이다. 평판 1의 $x_1 = 2$ m 경계와 평판 2의 $x_2 = 0$ m 경계가 단순지지로 연결되어 있으며 평판 1의 중심이 점가진을 받고 있다. 그림 7에서 보이듯이 가진을 받는 평판 1에서의 RTM에 의하여 예측된 진동응답은 모드해석치와 크게 차이가 없으나 평판 2의 진동응답 예측치는 많이 차이를 알 수 있다. 이는 연성경계에서 발생하는 파동현상이 레이튜브의 전달과 반사만으로는 정확히 묘사할 수 없음을 의미하는 것으로 판단된다. 진동 인텐시티의 경우에는 평판 1은 모드해석 결과와 유사하나 평판 2에서는 모드해석 결과와 다른 부분들을 많이 관찰할 수 있다.

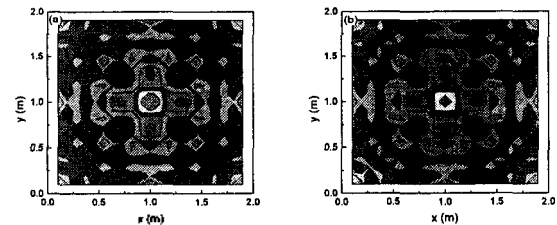


Figure 4. Velocity distribution predicted by modal analysis and RTM at 100 Hz with $\eta = 0.1$. (a) Modal analysis, (b) RTM.

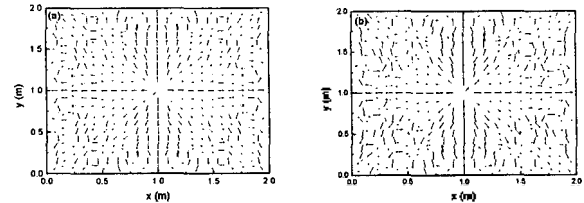


Figure 5. Intensity distribution predicted by modal analysis and RTM at 100 Hz with $\eta = 0.1$. (a) Modal analysis, (b) RTM.

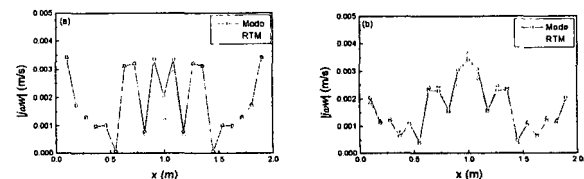


Figure 6. Velocity distribution predicted by modal analysis and RTM at 100 Hz along a line of $y=1$ m. (a) $\eta = 0.01$, (b) $\eta = 0.1$.

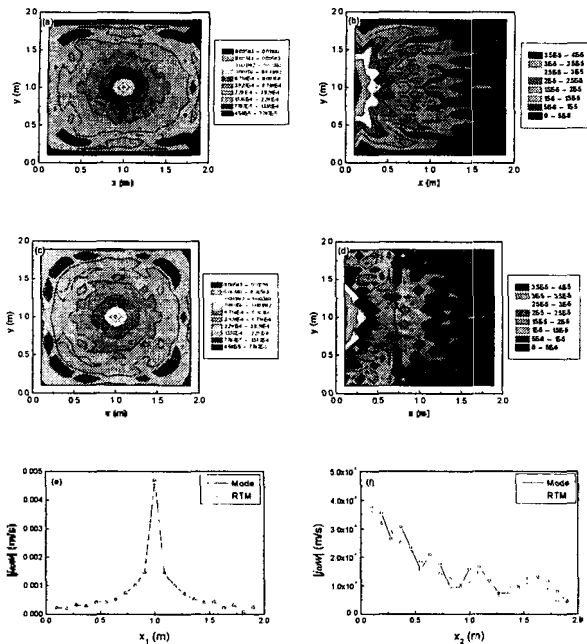


Figure 7. Comparison of predicted velocity distribution of line-coupled two plates by modal analysis and RTM (1 kHz and $\eta = 0.1$). (a), (b) Modal analysis; (c), (d) RTM; (e), (f) along $y=1$ m line. (a), (c), (e) Plate 1; (b), (d), (f) plate 2.

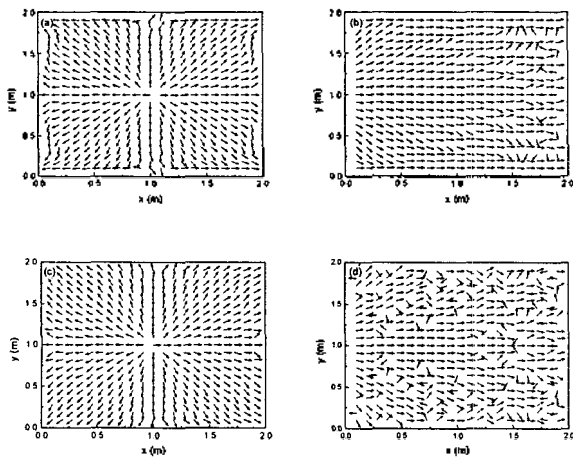


Figure 8. Predicted intensity distribution of line-coupled two plates by modal analysis and RTM (1 kHz and $\eta = 0.1$). (a), (b) Modal analysis; (c), (d) RTM. (a), (c) Plate 1; (b), (d) plate 2.

4. 결론

본 논문에서는 레이추적기법 (RTM)을 이용하여 평판 구조물 강제진동의 단일 주파수 해석을 시도하였다. 원형레이튜브를 제안하고, 수음점에서의 진동응답과 레이튜브의 관계 그리고 반사 및 전달레이튜브의 기하학적 형상을 제안하였다. 또한, 진동인텐시티를 계산하기

위하여 이산화된 방향성 파동을 도입하여 진동 인텐시티를 계산하기 위한 관계식을 제안하였다. 예제 해석 결과 단일 평판의 경우에는 모드해석 결과와 비교하여 근사한 강제진동 응답과 진동 인텐시티 분포를 얻을 수 있음을 확인하였으나, 연성되어 있는 평판의 경우에는 다소 부정확한 진동응답 및 인텐시티를 얻음을 확인할 수 있었다. 이로부터, 연성경계에서의 음향현상이 정반사만으로는 정확히 묘사되지 않음을 확인할 수 있었다.

참고 문헌

- [1] E. De Geest and H. Patzold, "Comparison between room transmission functions calculated with arbitrary element method and a ray tracing method including phase," *Proceedings of inter-noise 96*, pp.3177-3180, 1996.
- [2] 신호철, 이정권, "위상이 고려된 기하음향모델에 의한 내부음장 해석," *한국음향학회지*, 17 권 6 호, pp.54-61, 1998
- [3] L. Cremer, M. Heckl and E.E. Ungar, *Structure-Borne Sound*, Springer-Verlag, 1988.
- [4] E. Skudrzyk, "The Mean-Value Method of Predicting the Dynamic Response of Complex Vibrations," *Journal of Acoustical Society of America*, 67, pp.1105-1135, 1980.
- [5] C. T. Hugin, "A physical description of the response of coupled beams," *Journal of Sound Vibration*, 203, pp.563-580, 1995.
- [6] R. Gunda, S. M. Vijayakar and R. Singh, "Method of Images for the Harmonic Response of Beams and Rectangular Plates," *Journal of Sound Vibration*, 185, pp.791-808, 1995.
- [7] 채기상, 이정권, 전재진, "레이 추적 기법을 이용한 연속평판구조물의 고주파수 진동 해석," *한국음향학회지*, 18 권 2 호, pp.32-39, 1999.
- [8] R. Gunda, S. M. Vijayakar, and R. Singh, "Flexural vibration of an infinite wedge," *Journal of the Acoustical Society of America*, 102, pp.326-334, 1997.
- [9] R. Gunda, S. M. Vijayakar, R. Singsh, and J. E. Farstad, "Harmonic green's functions of a semi-infinite plate with clamped or free edges," *Journal of the Acoustical Society of America* 103, pp.888-899, 1998.
- [10] G. Pavic, "Measurements of structure borne wave intensity part 1: formulation of the methods," *Journal of Sound Vibration*, 49, pp.221-230, 1976.
- [11] R. H. Lyon, *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems: Theory and Applications*. Cambridge: MIT Press, 1975.