

# 비압축성 Navier-Stokes 방정식에 대한 내재적 속도 분리 방법

김 경 연\*<sup>1</sup>, 백 승 진\*<sup>2</sup>, 성 형 진\*<sup>3</sup>

## An implicit velocity decoupling procedure for the incompressible Navier-Stokes equations

Kyoungyoun Kim, Seung-Jin Baek and Hyung Jin Sung

An efficient numerical method to solve the unsteady incompressible Navier-Stokes equations is developed. A fully implicit time advancement is employed to avoid the CFL(Courant-Friedrichs-Lewy) restriction, where the Crank-Nicholson discretization is used for both the diffusion and convection terms. Based on a block LU decomposition, velocity-pressure decoupling is achieved in conjunction with the approximate factorization. Main emphasis is placed on the additional decoupling of the intermediate velocity components with only  $n$ th time step velocity. The temporal second-order accuracy is preserved with the approximate factorization without any modification of boundary conditions. Since the decoupled momentum equations are solved without iteration, the computational time is reduced significantly. The present decoupling method is validated by solving the turbulent minimal channel flow unit.

**Key Words:** 비압축성 Navier-Stokes 방정식(incompressible Navier-Stokes equations), 내재적(implicit), 속도-압력 분리(velocity-pressure decoupling), 속도성분 분리(velocity components decoupling), 2차-의 정확도(second order accuracy), 근사적 인수분해(approximate factorization)

### 1. 서 론

현재 직접수치모사를 이용한 난류 유동의 해석에 가장 많이 사용되는 방법은 모멘텀 방정식과 연속 방정식으로 결합되어 있는 속도와 압력을 분리하는 부분단계법(fractional step method)이다. 부분단계법은 모멘텀 방정식과 압력 방정식을 독립적으로 각각 단 한번의 계산을 통하여 시간전진을 하는 효율적인 방법이다. 속도와 압력을 분리하는 방법은 Chorin [1]과 Temam [2]에 의해 각각 독립적으로 제시된 후, 다양한 방식으로 접근

되고 발전되어 왔다. 대별하여 fractional step method [3], pressure correction method [4], projection method[5]로 나눌 수 있다. 이러한 수치방법의 핵심적인 개념은 우선 비압축성조건을 무시하여 구한 중간단계의 속도를 divergence free vector field에 projection 하여 다음 시간 단계의 속도장을 구해내는 방법이다. 따라서 이렇게 구해진 속도장은 계산기계의 수치오차 범위내의 divergence를 가지는 벡터장이 된다.

기존의 부분단계법들[3-6]은 모멘텀 방정식에서 점성항은 내재적으로, 대류항은 외재적으로 처리하는 준 내재적 부분단계법(semi-implicit fractional step method)이다. 이러한 준 내재적 방법들은 CFL 조건으로 인하여 계산 시간 간격의 제한을 받게 된다. 이와 같은 준 내재적 방법은 복잡한 형상에서의 밀집된 계산 격자의 경우

\*<sup>1,2</sup> KAIST 대학원 기계공학과

\*<sup>3</sup> 정희원, KAIST 기계공학과

에 있어서 유동해석을 위해 요구되는 물리적인 시간간격보다 더 작은 계산 시간간격의 제한으로 그만큼 더 많은 계산 단계를 필요로 한다.

이러한 CFL조건을 배제시키기 위해, 모멘텀 방정식에서 대류항과 점성항에 대해 모두 Crank-Nicholson 방법을 사용하여 내재적으로 처리하는 완전 내재적 부분단계법 (fully-implicit fractional step method)이 제시되었다.[7-9] 또한, Choi & Moin [8]은 minimal channel flow unit에 대한 직접수치모사를 통해 난류 유동 해석에 필요한 최대 시간 간격을 조사하여 난류 유동의 물리적인 현상을 모사하기 위해 요구되는 시간간격이 기존의 준 내재적 방법에서의 제한적인 계산 시간 간격보다 클 경우에는 완전 내재적 방법이 더 효율적임을 확인하였다. 그러나, 대류항의 내재적인 처리로 인하여, 모멘텀 방정식에서 속도 성분들이 결합되어 있으므로 각각의 속도 성분들을 구하기 위해선 반복적인 계산이 요구된다.

기존의 부분단계법들은 미분방정식 형태의 Navier-Stokes 방정식을 일단 시간에 의한 단계로 나눈 뒤, 공간 차분을 수행하는 방법으로 부분 단계를 나누었다. 이러한 기존의 방법들은 각 부분단계의 경계조건의 세심한 처리가 없을 경우에는 시간에 대한 정확도의 손실을 야기하게 된다. Perot [10]과 Dukowicz & Dvinsky [11]는 시간에 대한 정확도의 손실은 경계조건의 처리 때문이 아니라 단계를 나눈 뒤 공간상 차분을 고려하는 기존의 방법 자체에 문제가 있다고 지적하였다. 이를 해결하기 위해서 Navier-Stokes 방정식을 시간과 공간에 대해 동시에 차분하여 행렬식을 구성하는 방법을 제시하였다. Dukowicz & Dvinsky [11]는 구성된 행렬식의 계수행렬의 근사적인 factorization 방법을 이용하여, 시간에 대해 2차의 정확도를 유지하면서 속도와 압력을 분리하는 부분단계법을 제시하였다. Perot [10]은 계수행렬의 근사적인 block LU decomposition을 이용하여 계산단계를 나누어 속도와 압력을 분리해내는 부분단계법을 제시하였다. 이러한 방법은 행렬식의 구성 시 원래의 Navier-Stokes 방정식의 경계조건을 소스항 (source term)에 포함시킴으로써, 계수 행렬의 근사적인 변형으로 계산 단계를 나눔에 있어서, 경계조건의 부가적인 고려를 배제시켰다.

본 연구에서는 3차원 비정상 비압축성 유동을 해석하기 위해 Navier-Stokes 방정식의 모든 항들을 Crank-Nicholson 방법을 사용하여 완전 내재적인 (fully-implicit) 방법으로 시간과 공간에 대하여 동시에 차분하여 행렬식을 구성하였다. 이렇게 구성된 행렬식에서 계수 행렬을 근사적인 block LU decomposition을 이용하여 시간에 대하여 2차의 정확도를 유지하도록 속도와 압력을 분리하였다. 이에 더하여, 모멘텀 방정식에 해당하는 행렬식의 계수행렬 또한 근사적인 block LU decomposition을 이용하여 대류항의 내재적인 처

리로 인해 결합된 속도 성분들을 시간에 대한 2차의 정확도를 유지하면서 각각 분리하는 방법을 제시하였다.

Minimal channel flow unit에 대한 직접수치모사를 수행하여 난류 채널 유동 해석의 타당성과 본 수치방법이 시간에 대해 2차의 정확도를 유지함을 조사하였다. 본 연구에서 제시된 완전 내재적 속도-압력 분리 방법이 복잡한 난류 유동의 직접수치모사에서 정확성을 가질 뿐만 아니라, 완전 내재적 방법의 사용 시 결합되는 속도 성분의 반복적인 계산을 하지 않으므로 그에 상응하는 계산시간을 단축시키는 효율적인 수치방법을 제시하였다.

## 2. 수치적 방법

### 2.1 지배방정식의 행렬형

비압축성 유동의 지배방정식은 아래와 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

여기서,  $x_i$ 는 직교좌표표를 나타내고,  $u_i$ 는 각각의 속도 성분들을 나타낸다. 모든 변수들은 특성 속도와 특성 길이로 무차원화 되었으며, Re는 레이놀즈 수를 나타낸다.

Navier-Stokes 방정식의 모든 항들에 대해 Crank-Nicholson 방법을 사용하여  $n+1/2$  시간 단계에서 식 (1)과 식 (2)의 시간과 공간에 대해서 동시에 차분하여 얻은 차분 식은 아래와 같다.

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} (\mathbf{H}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{H}(\mathbf{u}^n)) = -\mathbf{G} p^{n+1/2} + \frac{1}{2\text{Re}} (\mathbf{L} \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{L} \mathbf{u}^n) + \mathbf{m} \mathbf{b} \mathbf{c} \quad (3)$$

$$\mathbf{D} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{0} + \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{c} \quad (4)$$

여기서  $\mathbf{L}$ 은 공간상으로 차분화된 Laplacian operator를 나타내고  $\mathbf{H}$ 는 차분화된 Convective operator를 나타낸다.  $\mathbf{G}$ 와  $\mathbf{D}$ 는 각각 공간상으로 차분화된 Gradient operator, Divergence operator를 나타낸다.  $\mathcal{L}$ 는 계산 시간 간격을 나타내고, 위 첨자  $n$ 은  $n$  번째 계산 단계에서의 변수를 의미한다.

엇갈림 격자계에서 공간에 대해 2차의 정확도를 가지는 중심 차분법을 이용하여 각 공간 차분 operator를 결정하였다. 엇갈림 격자계를 사용하였으므로, 차분된 식의 미지수인  $\mathbf{u}^{n+1}$ 와  $p^{n+1/2}$ 는 계산 영역의 경계가 아닌 내부의 격자점에서 정의된다. 계산 영역의 경계에서



의 속도 값들은 이미  $mbc, cbc$ 로서 소스항에 포함되고, 엇갈림 격자계에서는 셀 내부에서 압력이 정해지므로, 경계에서의 압력 값은 필요로 하지 않게 된다. 즉, 엇갈림 격자계에서 공간과 시간에 대하여 동시에 차분하여 얻은 위의 식에서는 압력 자체의 경계조건을 필요로 하지 않게 된다.

점성항과 대류항에 대하여 모두 내재적인 처리를 함으로써 완전내재적 시간 전진방법을 사용하였다. 완전내재적 시간 전진방법은 비선형 항인 대류항의 내재적인 처리로 인하여 필연적으로 각 속도 성분들이 결합된 비선형 방정식을 유도한다. 이러한 비선형 방정식의 풀이를 위해서 비선형항을 시간에 대해 2차의 정확도를 갖도록 아래와 같이 선형화 하였다.[12]

$$u_i^{n+1}u_j^{n+1} = (u_i^n + \delta u_i)(u_j^n + \delta u_j) + O(\Delta t^2) = u_i^{n+1}u_j^n + u_i^n u_j^{n+1} - u_i^n u_j^n + O(\Delta t^2) \quad (5)$$

$$\delta u_j = u_j^{n+1} - u_j^n, \quad \delta u_i = u_i^{n+1} - u_i^n$$

위의 방법으로 선형화를 하여 대류항에 대한 선형 연산자  $N$ 을 아래와 같이 정의하였다.

$$Nu^{n+1} = \frac{1}{2}(H(u^{n+1}) + H(u^n)) \quad (6)$$

위의 선형 연산자,  $N$ 을 이용하여 차분 방정식 식 (3) 과 식 (4)를 행렬식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{G} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{mbc} \\ \mathbf{cbc} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$A = \frac{1}{\Delta t} \left[ I + \Delta t \left( N - \frac{1}{2Re} L \right) \right]$$

$$r = \frac{1}{\Delta t} u^n - Gp^{n-1/2} + \frac{1}{2Re} Lu^n$$

$$\phi_p = p^{n+1/2} - p^{n-1/2}$$

이상과 같이 이산화된 Navier-Stokes 방정식의 행렬식에서 계수행렬의 역행렬을 통하여 다음 시간 간격에서의 유동장의 정보, 즉  $u^{n+1}, p^{n+1/2}$ 를 구할 수 있다. 그러나 이 행렬식의 계수행렬은 매우 크고 비 구조적인 행렬 (large sparse matrix) 이므로 직접적으로 역행렬을 구하기가 매우 어렵고, 또한 반복적인 계산을 통해서 행렬식을 풀기에도 많은 시간이 걸린다. 따라서, 본 연구에서는 이 행렬식의 효율적인 계산을 위해, 속도와 압력, 그리고 각각의 속도 성분까지 분리하는 수치방법을 제시하였다.

## 2.2 속도-압력 분리

우선, 이산화된 Navier-Stokes 방정식의 행렬식, 식 (7)에서 속도와 압력을 분리하고자 한다. 계수행렬의 근사적인 처리를 통해 원래의 행렬식과 비교하여 시간에 대해 2차의 정확도를 갖는 근사식을 구성하여 속도와 압력을 분리하였다. 식 (7)의 계수행렬의 근사적 LU decomposition 을 통해, 아래와 같이 식 (7)을 시간에 대해 2차의 정확도를 갖는 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & -\Delta t \mathbf{DG} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \Delta t \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{mbc} \\ \mathbf{cbc} \end{pmatrix} \quad (8)$$

식 (8)은 시간에 대해 아래와 같은 시간에 대한 2차의 오차 항을 가지는 식 (7)의 근사식이다.

$$O(\Delta t^2) = \begin{pmatrix} \Delta t \mathbf{MG} \phi_p \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{N} - \frac{1}{2Re} \mathbf{L} \quad (9)$$

식 (8)은 중간단계 속도  $u^*$ 를 도입하여 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & -\Delta t \mathbf{DG} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^* \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{mbc} \\ \mathbf{cbc} \end{pmatrix} \quad (10a)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \Delta t \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^* \\ \phi_p \end{pmatrix} \quad (10b)$$

식 (10a)와 식 (10b)에서 각각 속도와 압력을 구해내는 과정은 아래와 같다.

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^* = \mathbf{r} + \mathbf{mbc} \quad (11a)$$

$$\Delta t \mathbf{DG} \phi_p = \mathbf{D} \mathbf{u}^* - \mathbf{cbc} \quad (11b)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \mathbf{G} \phi_p \quad (11c)$$

$$p^{n+1/2} = p^{n-1/2} + \phi_p \quad (11d)$$

## 2.3 속도성분들의 분리

대류항에 대해서는 Adams-Bashforth 또는 Runge-Kutta 방법을 이용하여 외재적으로 처리하고, 점성항에 대해서는 Crank-Nicholson 방법을 사용하여 내재적으로 처리하는 준 내재적 부분단계법에서는 각각의 속도 성분들이 독립적으로 계산될 수 있다. 그러나 완전 내재적 시간전진을 채택한 경우, 대류항까지 Crank-Nicholson 방법을 이용하여 내재적으로 처리하므로 각각의 모멘텀 방정식에서 속도 성분들이 결합되어

이다. 따라서, 각 속도 성분들은 독립적으로 계산 될 수 없고, 반복적인 계산을 통하여 각각의 모멘텀 방정식을 동시에 만족시키는 수렴된 값을 구하는 방법이 사용되고 있다.

완전 내재적 부분단계법에서 요구되는 이러한 속도 성분들의 반복적인 계산을 피하기 위해, Rosenfeld [13]는 각각의 모멘텀 방정식에서 내재적으로 결합된 속도 성분들을 three-time level linearization scheme을 사용하여 분리하였다. 그러나 이 방법은  $n$  시간단계에서의 유동장의 정보뿐만 아니라  $n-1$  시간단계에서의 정보도 알아야 하므로 기존의 방법보다 많은 메모리를 요구하게 되는 단점을 지니고 있다.

본 연구에서는 완전 내재적 시간전진방법을 사용할 경우, 각각의 모멘텀 방정식에서 내재적으로 결합된 속도 성분들을  $n$  시간 단계에서의 정보만을 가지고, 2차의 정확도를 갖는 속도 성분들의 분리 방법을 제시하였다. 즉, 식 (11a)의 계수행렬의 근사적인 LU decomposition을 통해 시간에 대해 2차의 정확도를 가지면서 각각의 속도 성분을 분리하여 독립적으로 계산하는 방법이다.

식 (11a)은 아래와 같이 표현될 수 있고, 각각의 속도 성분들을 표시하여 나타내면 식 (13)과 같다.

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{u}^* = -\mathbf{A}\mathbf{u}^n + \mathbf{r} + \mathbf{m}\mathbf{b}\mathbf{c} = \mathbf{RHS} \quad (12)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} I + \Delta t M_{11} & \Delta t M_{12} & \Delta t M_{13} \\ \Delta t M_{21} & I + \Delta t M_{22} & \Delta t M_{23} \\ \Delta t M_{31} & \Delta t M_{32} & I + \Delta t M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1^* \\ \delta u_2^* \\ \delta u_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ RHS_3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

준 내재적 부분단계법에서는 식 (13)의 행렬  $M_{ij}(i \neq j)$ 이 0이 되므로 각각의 속도 성분들은 결합되어 있지 않고, 독립적으로 계산될 수 있다. 그러나 완전 내재적 방법에서는 행렬  $M_{ij}$ 가 0이 아니므로 각각의 모멘텀 방정식에서 속도 성분들이 내재적으로 결합되어 있다. 식 (13)의 계수행렬을 아래와 같이 근사적인 LU decomposition을 통하여 각 속도 성분들을 시간에 대한 2차의 정확도를 가지면서 분리해 낼 수 있고, 각각 독립적으로 풀 수 있게 된다.

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} I + \Delta t M_{11} & 0 & 0 \\ \Delta t M_{21} & I + \Delta t M_{22} & 0 \\ \Delta t M_{31} & \Delta t M_{32} & I + \Delta t M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \Delta t M_{12} & \Delta t M_{13} \\ 0 & I & \Delta t M_{23} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1^* \\ \delta u_2^* \\ \delta u_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ RHS_3 \end{pmatrix} \quad (14)$$

식 (14)는 다음과 같은 시간에 대해 2차의 오차 항을 갖는 식 (13)의 근사식이다.

$$d(\Delta t^2) = \begin{pmatrix} \Delta t M_{11} M_{12} \delta u_2^* + \Delta t M_{11} M_{13} \delta u_3^* \\ \Delta t M_{21} M_{12} \delta u_2^* + \Delta t M_{13} M_{21} \delta u_3^* + \Delta t M_{22} M_{23} \delta u_3^* \\ \Delta t M_{31} M_{12} \delta u_2^* + \Delta t M_{13} M_{31} \delta u_3^* + \Delta t M_{32} M_{23} \delta u_3^* \end{pmatrix} \quad (15)$$

식 (14)에서 각각의 중간 단계의 속도 성분들은 새로운 중간단계의 속도 성분  $\delta u_1^{**}$ ,  $\delta u_2^{**}$ 를 도입하여 아래와 같은 계산 단계에서 독립적으로 구해 질 수 있다.

$$\frac{1}{\Delta t} (I + \Delta t M_{11}) \delta u_1^{**} = RHS_1 \quad (16a)$$

$$\frac{1}{\Delta t} (I + \Delta t M_{22}) \delta u_2^{**} = RHS_2 - M_{21} \delta u_1^{**} \quad (16b)$$

$$\frac{1}{\Delta t} (I + \Delta t M_{33}) \delta u_3^* = RHS_3 - M_{31} \delta u_1^{**} - M_{32} \delta u_2^{**} \quad (16c)$$

$$\delta u_2^* = \delta u_2^{**} - \Delta t M_{23} \delta u_3^* \quad (16d)$$

$$\delta u_1^* = \delta u_1^{**} - \Delta t M_{12} \delta u_2^* - \Delta t M_{13} \delta u_3^* \quad (16e)$$

$$u_i^* = u_i^n + \delta u_i^* \quad (i=1,2,3) \quad (16f)$$

식 (13)을 직접 풀어서 속도 성분을 구하려면 각각의 모멘텀 방정식을 반복적으로 계산하여 속도 성분을 구해야 한다. 그러나 본 연구에서 제시한 방법은 속도 성분을 구함에 있어서 각각 단 한번의 간단한 TDMA (Tri-diagonal matrix algorithm) 형태의 행렬식만(식 (16a)-(16c))의 역행렬을 계산하게 되는 효율적인 방법이다.

## 2.4 전체적인 계산절차

앞 절들에서는 속도와 압력을 분리하는 방법과 완전 내재적 시간전진의 경우에 각각의 속도 성분들을 분리하는 분리방법을 제시하였다. 모든 미지수, 즉 압력, 각각의 속도 성분들이 분리된 부분단계법의 전체적인 계산 절차를 요약하면 아래와 같다.

1. 식 (16)에서 각각의 중간 단계의 속도 성분들을 구한다.
2. 식 (11b)에서 중간단계의 속도장을 이용하여 압력에 대한 식을 푼다.
3. 식 (11c)에서 중간단계의 속도장을 divergence free vector field에 projection을 하여 새로운 시간단계에서의 속도장을 구한다.

## 3. 수치적 결과

본 연구에서 제시한 압력과 각각의 속도성분까지 분리하는 완전 내재적 분리방법을 이용하고, 일정한 질량 유량을 유지하는 평균압력 구배 결정법 [14]을 사용하여 공간에 대해 주기성을 가지는 난류 채널 유동을 직접수

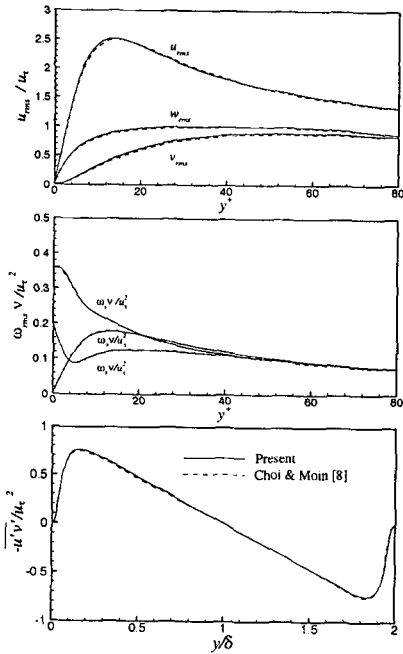


Fig.1 Comparison of the predicted turbulence statistics with those of Choi and Moin [8]

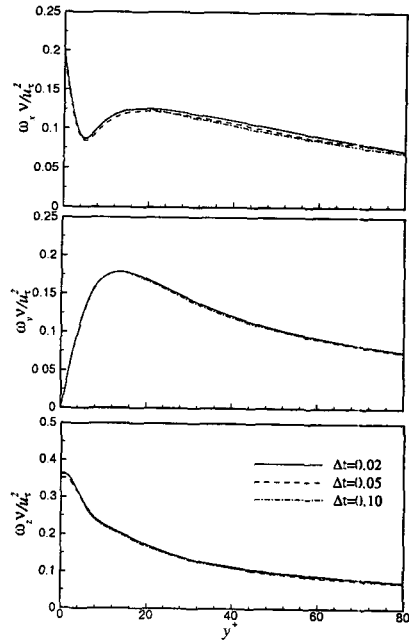


Fig.2 Effect of the computational time step on root-mean-square vorticity fluctuations.

치모사 하였다. 층류유동의 중심 속도  $U_i$  과 채널 절반 두께의 길이  $\delta$ 로 무차원화된 레이놀즈 수,  $Re_r=4200$ 에서의 유동에 대한 직접수치모사를 수행하였다. 이 경우, 벽면 마찰 속도  $u_r$  와 채널 절반 두께의 길이  $\delta$ 로 무차원화된 레이놀즈 수( $Re_r$ )는 대략  $Re_r=180$ 이 된다. 주 흐름방향으로 (약 570 벽단위), 채널 폭 방향으로는 0.289 (약 160 벽단위) 크기의 계산 영역에서  $x, y, z$  방향으로  $16 \times 129 \times 32$  개의 격자가 사용되었다. 주 흐름 방향과 채널 폭 방향으로는 동일한 격자 크기를 갖도록 하여, 각각의 격자의 크기는  $\Delta x^+ = \Delta x_r / \nu = 35, \Delta z^+ = \Delta z_r / \nu = 5$  이다. 그리고 벽면에 수직인  $y$  방향으로는 hyperbolic tangent 함수를 이용한 격자 분포를 사용하였다.  $y$  방향의 첫 번째 격자의 위치가 벽단위로  $y_{1st}^+ = y_{ur} / \nu = 0.18$ 이며, 채널 중심에서 가장 큰  $y$  방향의 격자 크기는 벽단위로 대략 7.2이다. 층류 속도 분포에 임의의 교란을 주고  $\Delta t U_i / \delta = 0.02$  ( $\Delta t^+ = 0.16$ )로 시간 전진을 하여 난류 유동으로 발전하게 하였다.

이러한 계산결과를 초기 조건으로 하여, 계산 시간 간격을 Choi & Moin [8]이 제시한 난류 채널 유동의 직접수치모사에 요구되는 최대 허용 계산 시간 간격인  $\Delta t U_i / \delta = 0.05$  ( $\Delta t^+ = 0.4$ )로 시간 전진을 하였다.  $x, z$  방향으로 평균한 물리량들이 통계적으로 정상상태에 도달한 후에, 여러 통계적인 물리량들의 시간 평균을 구하기 위해  $1000 \delta / U_i$ 의 시간 동안 평균을 취하였다. Fig. 1에서는 각각의 속도 성분의 섭동량의 rms

(root-mean-square) 값과 와도 섭동량의 rms값, 레이놀즈 전단 응력의 rms값들을 나타내었다. Choi & Moin [8]의 결과와 거의 정확한 일치를 보이고 있다. 본 연구에서 제시된 새로운 완전 내재적 분리방법으로 난류 채널 유동의 직접수치모사를 수행하여 타당한 결과를 얻었으며, 이로써 대류항의 선형화, 속도성분의 분리를 위한 계수행렬의 근사적인 LU decomposition 등의 과정이 타당함을 확인하였다.

Fig. 2는 다양한 계산 시간 간격( $\Delta t U_i / \delta = 0.02, 0.05, 0.10$ )에 따른 속도성분의 섭동량의 rms 값을 나타내고 있다. 각각의 계산 시간 간격에 해당하는 CFL 수는 대략 0.5, 1.0, 2.0이다. 대류항의 내재적인 처리로 인하여 CFL수가 2 이상인 경우에서도 안정한 해를 얻을 수 있음을 확인하였고,  $\Delta t U_i / \delta = 0.05$  ( $\Delta t^+ = 0.4$ )이내의 시간 간격으로 계산을 수행할 경우, 난류량을 제대로 예측함을 확인하였다.[8]

마지막으로 본 연구에서 제시한 분리방법의 시간에 대한 정확도를 조사하였다. 다양한 계산 시간 간격에 대하여, 가장 작은 계산 시간간격으로 전진하여 얻은 유동장과의 차이의 rms값을 오차로 정의하였다. Fig. 3에서 알 수 있듯이 속도성분과 압력이 시간에 대해 2차의 정확도를 가짐을 확인하였다.

#### 4. 결론

비정상, 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 속도와 압

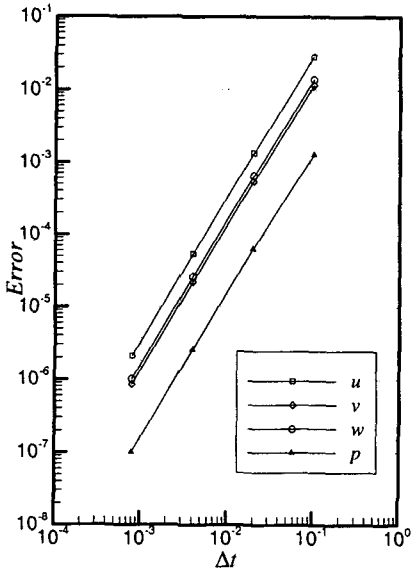


Fig.3 Temporal convergence of the velocity and pressure errors

력뿐만 아니라 대류항의 내재적인 처리로 인해 야기되는 속도 성분의 결합을 분리시키는 새로운 완전 내재적 분리방법이 제시되었다. 각각의 모멘텀 방정식에서 내재적으로 결합되어 있는 속도성분을 반복적인 계산을 통하여 구하는 기존의 방법과는 달리, 속도 성분들을 분리하여 각각 독립적으로 계산하는 계산 단계를 제시함으로써, 보다 효율적인 수치 방법을 고안하였다. 난류 채널 유동에 대한 직접수치모사를 수행하여 난류 유동 해석의 타당성과 본 수치방법이 시간에 대해 2차의 정확도를 유지함을 조사하였다. 본 연구에서 제시된 완전 내재적 속도-압력 분리 방법이 복잡한 난류 유동의 직접 수치모사에서 정확성을 가질 뿐만 아니라, 완전내재적 방법의 사용 시 결합되는 속도 성분의 반복적인 계산을 하지 않으므로 그에 상응하는 계산시간을 단축시키는 효율적인 수치방법을 제시하였다.

### 후 기

이 연구는 과학기술부 국가지정연구실 사업의 일환으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

### 참고문헌

[1] Temam, R., 1979, *Navier-Stokes Equations* :

*Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, New York.

[2] Chorin, A. J., 1968, "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations," *Math Comput.*, Vol. 22, pp. 745-762.

[3] Kim, J. and Moin, P., 1985, "Application of a Fractional Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 59, pp. 308-323.

[4] Van Kan, J., 1986, A Second-Order Accurate Pressure Correction Scheme for Viscous Incompressible Flow," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 7, p. 870-891.

[5] Bell, J., Collea, P. and Glaz, H., 1989, "A Second-Order Projection Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 85, pp. 257-283.

[6] Le, H. and Moin, P., 1991, An Improvement of Fractional Step Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 92, pp. 369-379.

[7] Choi, H., Moin, P. and Kim, J., 1993, "Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow over Riblets," *J. Fluid Mech.*, Vol. 255, pp. 503-539.

[8] Choi, H. and Moin, P., 1994, "Effects of the Computational Time Step on Numerical Solutions of Turbulent Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol. 114, pp. 1-4.

[9] Hahn, S. and Choi, H., 1997, "Unsteady Simulation of Jets in a Cross Flow," *J. Comput. Phys.*, Vol. 134, pp. 342-356.

[10] Perot, J., 1993, "An Analysis of Fractional Step Method," *J. Comput. Phys.*, Vol. 108, pp. 51-58.

[11] Dukowicz, J. and Dvinsky, A., 1992, Approximate Factorization as a High Order Splitting for the Implicit Incompressible Flow Equations," *J. Comput. Phys.*, Vol. 102, pp. 336-347.

[12] Beam, R. M. and Warming, R. F., 1978, "An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations," *AIAA J.* Vol. 16, pp. 393-402.

[13] Rosenfeld, M., 1996, "Uncoupled Temporally Second-order Accurate Implicit Solver of Incompressible Navier-Stokes Equations," *AIAA J.*, Vol. 34, No. 9, pp. 1829-1834.

[14] You, J., Choi, H. and You, J. Y., 1999, "Modified fractional step method of keeping a constant mass flow rate in channel and pipe flows," *KSME Int. J.*, Vol. 14, No. 5, pp. 547-552.