대한기계학회 2000년도 춘계학술대회논문집 B pp. 144~147 KSME 00S181

최대엔트로피법을 이용한 역열전도문제의 해석

김선경* • 이우일**

Analysis of an Inverse Heat Conduction Problem Using Maximum Entropy Method

Sun Kyoung Kim and Woo Il Lee

Key Words : maximum entropy method, inverse heat conduction problem, sequential quadratic programming

Abstract

A numerical method for the solution of one-dimensional inverse heat conduction problem is established and its performance is demonstrated with computational results. The present work introduces the maximum entropy method in order to build a robust formulation of the inverse problem. The maximum entropy method finds the solution that maximizes the entropy functional under given temperature measurement. The philosophy of the method is to seek the most likely inverse solution. The maximum entropy method converts the inverse problem to a non-linear constrained optimization problem of which constraint is the statistical consistency between the measured temperature and the estimated temperature. The successive quadratic programming facilitates the maximum entropy estimation. The gradient required for the optimization procedure is provided by solving the adjoint problem. The characteristic feature of the maximum entropy method is discussed with the illustrated results. The presented results show considerable resolution enhancement and bias reduction in comparison with the conventional methods.

1. 서 론

최근에 이르러 열전달 여러 분야에서 새로운 경향이 나타나고 있다. 이른바 역해석 기법을 이용한 것으로 이론 및 실제 분야에서 널리 사용되고 있다. 특히, 열열전도문제는 가장 많이 연구되는 것으로, 표면의 열적 경계조건[1,2]이나, 경계의 위치[3], 혹은 열적 물성치[4]등을 온도 측정을 통해 추정하고자 하는 것이다. 특히 표면의 열적 경계조건의 추정에 관해서는 센서의 접근이 어려움 등으로 직접적인 측정이 불가능한 경우가 많다. 이러한 경우, 역열전도 방법은 효과적으로 적용되어 목적한 조건들을 구해낼 수 있다.

역열전도 문제는 측정오차에 민감한 특징이 있는데, 이 것을 극복하기 위해 그동안 많은 연구가 이루어져 왔다. 특히, Beck[1] 과 Alifanov[2]는 계산 효율면에서 뛰어나면서도, 상당한 유용성이 있는 방법들을 제안한 바 있다. 그러나 이 방법들은 방법자체가 가진 해상력의 한계 때문에, 일정정도의 해의 왜곡은 피할 수 없다. 본 연구에서는 이런 해의 왜곡을 극복하는 수단으로 최대엔트로피법을 도입하여 안정성과 정확도, 이 두 가지 측면을 모두 만족시키는 방법을 제안하고자 한다.

최대엔트로피 방법은 그 동안 역해석의 여러 분야에 사용되어져 왔으나 역열전도문제에는 기존의 연구에서는 사용된 바가 없다. 최대엔트로피 방법은 Shannon [5]이 통신공학에 관한 연구 도중 발견한 함수의 수학적인 특징이 통계열역학적 엔트로피와 비슷함에 착안하여 정보엔트로피라 이름 붙인 것이 그 시작점이다. 최대엔트로피법은 Jaynes[6]가 이 정보엔트로피를 통계역학 분야에 이용하는 방법을 제안하면서 본격적으로 연구되었다. 특히, 훼손된 상의 복원 [7]이나 계량경제학 [8] 등의 분야에서 집중적으로 사용되었다.

본 연구에서는 최대엔트로피법의 구현을 위해 SQP(successive quadratic programming) [9]을 사용하였다. 본 연구의 방법으로 구해진 표면열유속을

* 서울대학교 대학원
** 서울대학교 기계공학과

기존의 방법과 비교하였으며, 최대엔트로피법이 적용된 역열전도 문제의 여러 특성을 규명하고자 하였다.

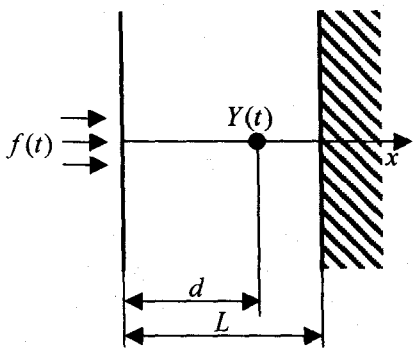


Fig. 1 Domain considered for one dimensional IHCP

2. 문제 정의

2.1 직접문제

Figure.1 에 보인 것과 같은 길이 L 의 일차원 영역을 해석하고자 한다. 영역의 왼쪽에서는 $f(t)$의 크기를 가진 시간에 따라 변동하는 열유속이 작용하고 하고 있고, 오른쪽은 단열되어 있다. 왼쪽으로부터 d 만큼 떨어진 곳에서 온도 $Y(t)$가 측정되어 기록된다. 이와 같은 문제는 역열전도문제 들 중 가장 많이 연구되는 것 중 하나이다. 이 문제의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad 0<x<L \tag{1a}$$

여기서 T는 온도이고, α는 열확산계수이다. 관련된 경계조건 및 초기 조건은 다음과 같다.

$$T(x,0)=T_o(x) \tag{1b}$$

여기서 $T_o(x)$ 는 초기 온도 분포이다.

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}=f(t) \tag{1c}$$

여기서 k 는 열전도계수이다.

$$\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=L}=0 \tag{1d}$$

2.2 역문제

측정된 온도와 계산된 온도의 일치도는 아래와 같은 식으로 평가할 수 있다.

$$J=\int_0^{t_f}[T(d,t)-Y(t)]^2\,dt \tag{2}$$

위의 식을 아래의 식으로 표현된 구간안에서 조정하는 것은 타당하다 [10].

$$\left|J-N\sigma^2\Delta t\right|\le\sqrt{2N}\sigma^2\Delta t \tag{3}$$

여기서 N는 측정점의 개수이고, σ는 측정데이타의 표준편차이고, Δt 는 측정간격이다.

3. 최대엔트로피법

3.1 최대엔트로피원리

N 개의 에너지양자를 담을 수 있는 방을 생각하고, i 번째 방에는 f_i 개의 에너지양자가 저장된다고 하자. 이때 에너지 양자의 총합은 아래의 식으로 간단히 표현된다.

$$F=\sum_i f_i \tag{4}$$

이 에너지양자의 총합은 미리 알려져야 한다. 이 경우 이 에너지 양자를 각 방에 분배하는 방법들 중 확률적으로 가장 높은 방법은 그 확률을 Striling 식을 이용해서 근사하고 낮은 차수의 항들을 무시하면 아래와 같은 식이 최대가 될 때, 확률적으로 가능성이 가장 높은 에너지 분포가 얻어짐을 알 수 있다.

$$H(\mathbf{f})\equiv-\sum_{i=1}^{N}f_i\ln\frac{f_i}{F} \tag{12}$$

위의 식을 정보엔트로피라고 한다.

3.2 예비해석

일반적인 역열전도 문제에 있어서 F 를 미리 알 수 없는 경우들이 있다. 이 경우 예비해석을 통해 이 값을 미리 추정하는 과정이 필요하다. 이를 위해 기존의 역해석 방법중 반복기법을 이용한 방법 [2] 을 이용하여 총합 F 를 구해내고자 한다. 이 방법은 CGM(conjugate gradient method)라고도 하는데, 자세한 내용은 생략한다. 일반적인 최적화 문제의 conjugate gradient method 와 유사한데, 두가지 특징이 있다. 연계문제와 민감도 문제의 해를 통해, 구배와 그 구배방향으로의 step size 가 결정된다는 점이다. Beck 의 방법과 더불어 기존의 많은 연구가 이 방법에 기초하고 있다. Beck 의 방법에 비해 비선형문제에 유리한 특징을 가지고 있다.

3.3 역열전도문제의 최적화문제로의 공식화

최대엔트로피법을 이용한 역열전도문제에 있어서의 최적화문제는 구속조건이 두개 있는 비선형문제가 된다. 해당되는 최적화 문제는 아래와 같다.

Maximize the object $H(\mathbf{f})$

Subject to Nonlinear equality constraint

$$C_1(\mathbf{f}) \equiv J - N\sigma^2\Delta t = 0 \tag{13}$$

With the maximum violation $\sqrt{2N}\sigma^2\Delta t$

Linear equality constraint

$$C_2(\mathbf{f}) \equiv \sum_i f_i - F = 0 \tag{14}$$

Bounds

$$0 < f_i \le F \tag{15}$$

3.4 해법

기술된 최적화 문제의 해를 효율적으로 도출하기 위해 SQP(successive quadratic programming)를 사용하였다. SQP 는 구배와 Hessian 을 필요로 한다. 엔트로피의 구배와 Hessian 은 미분을 통해 쉽게 얻어진다. 특히, Hessian 의 경우 대각행렬이 얻어지므로 문제의 특성에 유리하게 작용한다. 그러나, J 의 경우에는 구배는 연계문제(adjoint problem)를 통해 얻어지나, Hessian 을 구하는 것은 어려운 문제가 된다. 따라서 J 의 Hessian 행렬을 구하는 문제에 대해서는 BFGS (Broyden-Flecher-Goldfarb-Shanno) 방법을 사용하였다.

4. 결과와 논의

4.1 Impulse 시험

Raynaud 와 Beck [11]이 제시한 역열전도방법을 평가하는 문제인 impluse 시험을 통해 제시된 방법을 검증하고자 한다. 측정데이타는 수치모사를 통해 얻어진 해를 이용하였으며, 필요한 경우 난수 오차를 삽입하였다.

Figure 2 와 3 에서 CGM 과 비교하여 , 제시된 역해석 방법이 기존의 방법에 비해 높은 해상력을 가짐을 알 수 있다.

4.2 삼각형 열유속 시험

Figure 3 에서 삼각형 열유속 시험의 결과를 볼 수 있다. MEM 에 의한 해석이 우위에 있음을 알 수 있다.

4.3 사각형 열유속 시험

Figure 5 에서 볼 수 있듯이, 사각형 열유속의 경우에도 MEM 이 가장 우수한 결과를 보이고 있으나, 그 결과의 우위는 Impluse 시험과 삼각형 열유속 시험의 경우와 비교하여 볼 때, 격차는 줄어드는 것을 확인해 볼 수 있다.

5. 결 론

최대엔트로피법을 도입하여 역열전도 문제를 해석하였다. 그 결과를 기존방법과 비교하여 검증하였다. 해상도의 우수성이 입증되었으며, 다른 역열전도 문제로의 적용에서도 향상된 결과가 기대된다.

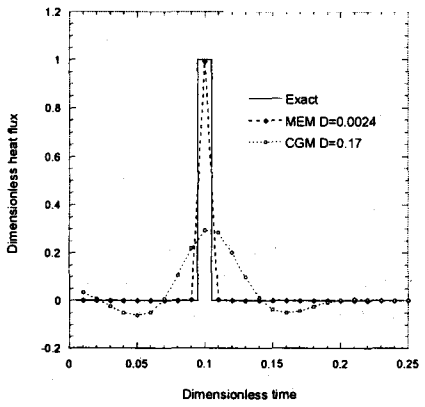


Fig. 2 Comparison between the heat fluxes estimated by MEM and CGM for the single impulse case.

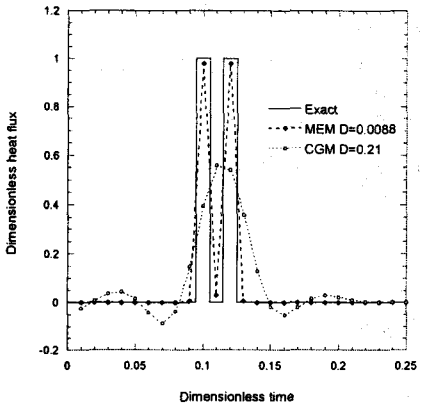
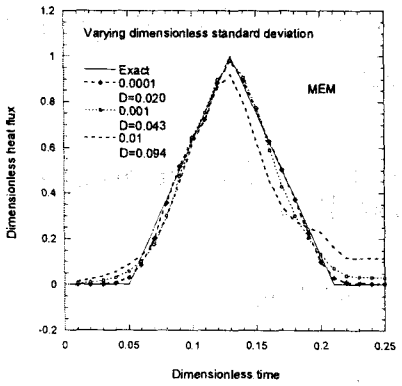
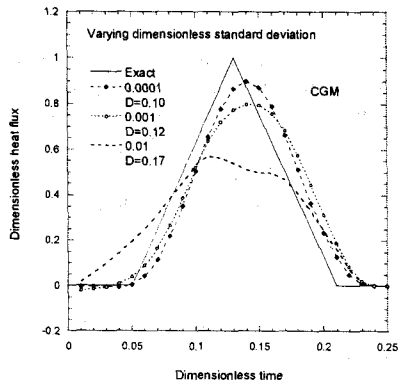


Fig. 3 Comparison between the heat fluxes estimated by MEM and CGM for the two adjacent impulses

case.

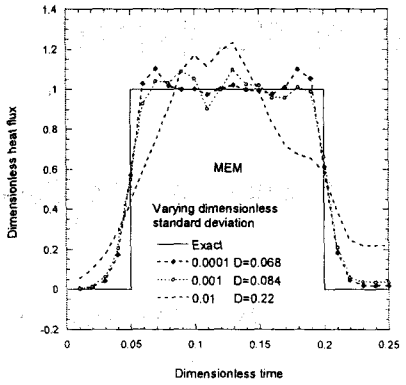


(a)

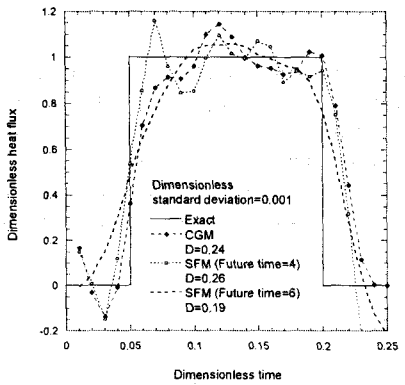


(b)

Fig. 4 Estimation of the triangular heat flux by (a) MEM and (b) CGM using analytically simulated noisy measurement data with varying error level.



(a)



(b)

Fig. 5 Estimation of the rectangular heat flux by (a) MEM and (b) CGM using analytically simulated noisy measurement data with varying error level.

참고문헌

(1) Beck, J. V., Blackwell, B., and St. Clair, C. R., Jr., Inverse Heat Conduction, Wiley 1985

(2) Alifanov, O. M., *Inverse Heat Transfer Problem,* Springer-Verlag, 1994.

(3) Hsieh , C. K., and Kassab , A. J., *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 29, No.1, pp. 47-58, 1986.

(4) Flach, G. P. and Özişik, M. N., , *Num. Heat Transfer, Part A*, vol. 16, pp. 249-266, 1989.

(5) Shannon, C. E., *Bell System Tech. J.*, Vol. 27, pp. 379-423, 1948.

(6) Jaynes, E. T, *Physics Review*, Vol. 106, pp. 620-630, 1957.

(7) Cornwell, T. J., and Evans, K. F., *Astronomy and Astrophysics*, vol. 143, pp. 77-83, 1985.

(8) Golan, A., and Judge, G., *Review of Economics and Statistics*, Vol. 76, pp. 541-549, 1994.

(9) Reklaitis, G. V., Ravindran, A., and Ragsdell, K. M., *Engineering Optimization*, Wiley, 1983.

(10) Graham, N. Y., *Bell System Tech. J.* Vol. 62, pp. 101-110, 1983

(11) Raynaud, M., and Beck, J. V., *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 110,. pp. 30-37, 1988.