

개선된 개방경계조건을 도입한 분리유한요소법

오승훈* · 민태기** · 유정열***

Segregated finite element method by introducing a improved open boundary condition

Seunghun Oh (Graduate School, Seoul Nat. Univ.), Taegee Min (Graduate School, Seoul Nat. Univ.) and Jung Yul Yoo (School of Mech. & Aero. Engineering, Seoul Nat. Univ.)

Key Words: Open boundary condition (개방경계조건), Traction-free condition (무응력조건), Entrainment (질량유입), Body force (체적력), Convective condition (대류경계조건)

Abstract

In a computational fluid dynamics, the imposition of open boundary condition has an important part of the accuracy but it is not easy to find the optimal boundary condition. This difficulty is introduced by making artificial boundary in unbounded domains. Such open boundary requires us to ensure the continuity of all primitive variables because the nature is in continuum. Here we introduce a revised well-conditioned open boundary condition particularly in FEM and apply it to various problems - entrainment, body force, short domains.

	기호설명	
\bar{Q}	검사체적	ρ 밀도
Ω	검사체적의 내부	ν 동점성 계수
Γ	검사체적의 외부경계	윗첨자
Γ_1	닫힌 경계	n 임의의 시간전진 단계
Γ_2	개방 경계	하첨자
f	체적력	∞ 자유대류 (free stream)
D	평면제트의 노즐 길이, 실린더 반지름	
\hat{u}, u^*	매개속도	
Re	레이놀즈수	
St	스트라올수 (fD/u_∞)	
Ri	리차드슨수 (Gr/Re^2)	

1. 서론

개방경계에 대한 어떠한 조건의 부과는 수치계산의 정확성을 좌우하는 중요한 부분이 될 수 있다. 하지만, 최적의 경계조건을 찾기란 쉬운 일이 아니다. 이러한 어려움은 경계가 없는 영역 (unbounded domain)에 인위적인 경계 (artificial boundary)를 만드는 데에서 시발한다. 일반적으로 분리유한요소법에서는 잘못된 경계조건의 부과는 물리적 속도와 매개속도의 접선방향 속도

* 서울대학교 대학원
 ** 서울대학교 대학원
 *** 서울대학교 기계항공 공학부

차이로 인하여 부과-와류생성 등을 유발 할 수 있다. 분리투사방법의 정확성을 좌우하는 또 하나의 인자는 잘못된 경계조건의 적용으로 인한 오차접선속도(spurious slip velocity)를 최소화하는 것이라고 일컬을 수도 있다. 또한 체적력을 고려할 경우의 경계조건의 해석은 한층 더 복잡해지며, 현재까지 FEM에서 이렇다 할만한 경계조건은 정립되어 있지 않은 상태이다. Kim & Moin¹⁾은 fractional step 방법의 매개속도의 두가지 비교를 통하여, 매개속도의 경계조건에 따른 해의 정확성을 비교한 바 있다. 보다 폭넓은 유한 요소의 경계조건에 대한 분석은 Gresho²⁾에 의하여 이루어졌다. Gresho²⁾는 준내재적 투사방법에 대한 유한요소의 경계조건을 해석하였다. 이후, Sani & Gresho³⁾는 개방경계조건 심포지엄에서 연구자들의 다양한 경계조건 적용을 정리하면서, 개방경계 조건의 처리의 어려움을 지적하였다.

2. 지배 방정식 및 수치 기법

2.1 지배 방정식

2차원 비정상 비압축성 층류 유동에 관한 Navier-Stokes 방정식과 에너지 방정식을 정리하면 다음과 같다. 부력의 영향을 고려하기 위해 Boussinesq 가정을 사용하였고, 이 가정이 타당성을 갖는 범위내에서 문제를 해석하였다.

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{u} + \frac{Gr}{Re^2} \Delta T \hat{k} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u} T) = \frac{1}{Pr Re} \nabla^2 T \quad (3)$$

여기서, \hat{k} 는 중력방향의 단위벡터이고, 모든 원천 변수들(primitive variables)은 무차원화된 형태이며, Boussinesq 가정을 사용하였으므로, 모든 물성치는 일정한 상수로 간주한다.

2.2 지배 방정식의 차분화

본 연구에서 사용한 수치기법은 완전 내재적 fractional 4-step method (Choi & Moin 1994)를 사용하였다. Brezzi-Babuska condition(이하 BB 조건으로 명명한다.)을 만족시키기 위한 여러 분

리(splitting)방법중 fractional 4 step 방법은 연속 방정식에서 유발되는 분리오차(splitting error)를 최소화함으로써 수치적 소산을 줄이고, 계산의 정확성을 높일 수 있는 장점이 있다.

2.3 수치 기법

본 연구에서는 메모리의 절감을 위해 CSR(Compressible Sparse Row) 형태로 DAE(Differential Algebraic Equation)를 구성하였고, 운동량 방정식에는 BICGSTAB이, 무용력조건과의 비교를 위한 Poisson 방정식에는 SSOR preconditioned CGS를, 경계에서의 간단한 mass matrix(FDM에서는 단위행렬로 간주)에 대하여는 lumped mass method를 이용하였다.

3. 경계 조건

3.1 대류경계조건과 무용력조건의 물리적 해석
일반적으로 Navier-Stokes 방정식은 물질미분을 고려하여 다음과 같이 재정리 할 수 있다.

$$\frac{Du}{Dt} = \nabla \cdot (-P + \frac{1}{Re} \nabla u) \quad (4)$$

개방경계에서의 유체질점에 가해지는 힘의 source가 없는 한, 유체질점에 가해지는 가속도는 0이 되어야 한다. 이를 근거로 위의 식을 적분하여 Gauss 정리를 적용하여 2차원에서는 선적분 형태로 바꿀 수 있다. 이 때 (4)의 좌변을 사용하면, 대류경계조건으로 간주할 수 있고, 우변을 적용하면 무용력조건이 된다. 그러나 대류경계 조건 적용시 대표속도(reference velocity)의 올바른 물리적 정의에 대한 어려움과 FEM의 경우 NBC(natural boundary condition)을 만족하지 않기 때문에 FEM에선 우변을 쓰는 것이 타당하다. 둘의 이론적 근거는 위에서 알 수 있듯이 동일함을 알 수 있다.

3.2 Navier-Stokes 방정식의 경계조건

본 연구는 비압축성 유동에 대해 수치방법을 이용하여 수행되었고, 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 u + f \quad (5)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (6)$$

$$u = w \text{ on } \Gamma_1 \quad (7)$$

$$-P + \frac{1}{Re} \frac{\partial u_n}{\partial n} = F_n, \quad \frac{1}{Re} \frac{\partial u_t}{\partial n} = F_t \text{ on } \Gamma_2 \quad (8)$$

여기서, Γ_2 에 적용된 경계조건은 준응력조건 (pseudo-traction condition)으로도 불리운다. F_n 과 F_t 는 경계에 수직한 방향과 접하는 방향의 견인력(traction force)의 성분이며, 체적력을 고려하지 않을 경우, 이 항을 무시한 경우가 무응력 조건($n_i \sigma_{ij} = 0$)에 해당한다.

(5)의 양변에 $\nabla \cdot$ 를 적용하면 다음의 PPE(Pressure Poisson Equation)과 수반되는 경계 조건을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 P = \nabla \cdot (f - u \cdot \nabla u) \quad (9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = n \cdot \left(\frac{1}{Re} \nabla^2 u + f - \frac{\partial u}{\partial t} - u \cdot \nabla u \right) \text{ on } \Gamma_1 \quad (10)$$

$$P = \frac{1}{Re} \frac{\partial u_n}{\partial n} - F_n \text{ on } \Gamma_2 \quad (11)$$

위의 압력 방정식의 경계 조건중 (10)는 운동량 방정식의 경계에서의 수직방향성분에서 유도되는 것인데, 운동량 방정식의 접선방향의 성분마저 고려하게 된다면 위의 압력 방정식은 과잉결정된 문제가 되어 해가 존재하지 않는다. 또한, 운동량 방정식의 접선방향성분은 (11)을 통한 압력 방정식 (9)를 풀면서 자동적으로 일치하게 된다.

3.3 Taylor 전개를 이용한 경계조건의 해석 해석을 위한 몇가지 정의

1) 해석의 용이성을 위하여 시간진전 n 일 때의 변수의 값을 하첨자 0로 표시한다.

2) 운동량 방정식에서 별다른 설명이 없는 한, 대류항($u \cdot \nabla u$)을 f 에 포함되는 항이라 보고, 체적력은 일단 배제하며 이는 나중에 다시 고려하도록 한다.

이상의 해석방식은 Gresho²⁾가 제시한 최적경계 이론을 제시한 방법을 토대로 적용한 해석법에 기반을 두고 있다.

우선, u_0 과 \hat{u} 의 초기조건과 Taylor 전개를 이용한 정의를 하면 다음과 같다.

$$\hat{u}_0 = u_0 \quad (12)$$

$$u(t) = u_0 + \Delta t \dot{u}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_0 + O(\Delta t^3) \quad (13)$$

$$\hat{u}(t) = \hat{u}_0 + \Delta t \hat{u}_0' + \frac{\Delta t^2}{2} \hat{u}_0'' + O(\Delta t^3) \quad (14)$$

분리투사방법의 첫 단계는 매개속도의 정의에 따라 크게 아래의 두 가지로 나눌 수 있다.

$$\text{가) } \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \hat{u} + \hat{f} \quad (15)$$

$$\text{나) } \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \hat{u} + \hat{f} - \nabla P_0 \quad (16)$$

가)의 경우

$$\dot{u}_0 = \frac{1}{Re} \nabla^2 u_0 + f_0 - \nabla P_0 \quad (17)$$

$$\hat{u}_0' = \frac{1}{Re} \nabla^2 u_0 + f_0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \therefore \hat{u}(t) &= \hat{u}_0 + \Delta t \hat{u}_0' + O(\Delta t^2) \\ &= u_0 + \Delta t \left(\frac{1}{Re} \nabla^2 u_0 + f_0 \right) + O(\Delta t^2) \\ &= u_0 + \Delta t (\dot{u}_0 + \nabla P_0) + O(\Delta t^2) \\ &= u + \Delta t \nabla P_0 + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (19)$$

즉, 경계에서 $\hat{u}_i = u_i^{n+1} + \Delta t \frac{\partial P^n}{\partial x_i}$ 를 적용하면,

$\hat{u} = u^{n+1}$ 을 적용한 것에 비하여, 좀 더 나은 결과를 얻을 수 있다. 실제로 이러한 경계조건은 Kim & Moin¹⁾이 유도한 결과와 일치하며, 이러한 경계조건을 적용하여 $\hat{u} = u^{n+1}$ 보다 나은 결과를 얻은 바 있다.

나)의 경우

$$\dot{u}_0 = \hat{u}_0' = \frac{1}{Re} \nabla^2 u_0 + f_0 - \nabla P_0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \therefore \hat{u}(t) &= \hat{u}_0 + \Delta t \hat{u}_0' + O(\Delta t^2) \\ &= u_0 + \Delta t \left(\frac{1}{Re} \nabla^2 u_0 + f_0 - P_0 \right) + O(\Delta t^2) \\ &= u_0 + \Delta t \dot{u}_0 + O(\Delta t^2) = u + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (21)$$

이상에서 나)의 경우, 경계에서의 $\hat{u} = u^{n+1}$ 의 적용이 올바른 경계조건이 됨을 확인할 수 있다.

3.3.1 개방 경계에서의 압력에 관한 경계 조건

분리투사방법에서 압력 경계조건의 부과시 기인되는 어려움은 압력증분이 자연적으로 전파되지 않는다는 것이다. 즉, $P^n = \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial n}$ 이지만,

$P^{n+1} = \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{u}_n^{n+1}}{\partial n}$ 이다. 따라서, 개방 경계에서의 압력의 경계조건은 시간전진에 따른 어떠한 압력의 전파를 모사할 수 있어야 한다.

체적력을 고려하지 않는 경우

먼저, 시간전진에 따른 압력의 근사는 $P = P_0 + \Delta t \dot{P}_0 + O(\frac{\Delta t^2}{2})$ 가 된다. 개방경계에서

$$P_0 = \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial n} \quad \text{이므로} \quad \dot{P}_0 = \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial n} \quad \text{이 된다.}$$

여기에 $\hat{u}_n = \frac{\hat{u}_n - u_{n0}}{\Delta t}$ 를 이용하면,

$$\begin{aligned} \dot{P}_0 &\approx \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{Re} \frac{\partial (\hat{u}_n - u_{n0})}{\partial n} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial n} - \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{Re} n \cdot \nabla (n \cdot u) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} \quad \text{이 되고, 이를 압력의 시간 증분} \end{aligned}$$

항에 대입하면 다음과 같다.

$$\therefore P \approx P_0 + \Delta t \dot{P}_0 = P_0 + \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} \quad (22)$$

만일 fractional 4-step 방법에 일반적인 'traction-free' 조건을 수정없이 적용시, 즉 식 (22)에서 P_0 을 미고려시, 매번 압력의 잘못된 갱신으로 인하여 일종의 압력벽 현상을 보이게 된다.

체적력을 고려할 경우

$\hat{f}_0 = \dot{f}_0$ 를 이용하면, $P_0 = \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial n} + \hat{f}_0$ 에서 $\dot{P}_0 = \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial n} + \dot{f}_0$ 이 된다. 여기에 $\dot{f}_0 \approx \frac{f - f_0}{\Delta t}$ 를 이용하여 위와 같은 방식으로 정리하면 아래와 같은 일반적인 경계조건식을 얻을 수 있다.

$$P \approx P_0 + \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial n} + f_n - f_0 \quad (23)$$

일례로, 온도 방정식만을 체적력으로 고려하는 경우의 경계조건은 다음과 같다.

$$P \approx P_0 + \frac{1}{Re} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial n} + \frac{Gr}{Re^2} (T - T_0) \quad (24)$$

4. 수치 예를 통한 검증

4.1. 상사해가 존재하는 평면 제트

상사해의 무차원화

평면 제트에 관한 상사해는 Schlichting⁴⁾이 유도하였다. 그는 주변유체의 압력구배는 제트에 영향을 미치지 때문에 압력구배항을 무시하는 가정하에, 식을 유도하였다. 상사해의 수치해와의 비교를 위하여, $Re = \frac{u_m l}{\nu} \Big|_{x=0}$ 로 정의하였다. 여기서, u_m 과 l 은 각각 제트가 나오는 입구에서의 평균속도와 입구의 길이이다. 수치해와의 비교를 위하여 Re 와 중심선(center line)에서의 속도로 윗 식을 무차원화하여 이용하였었다. Andrade⁶⁾의 평면 제트 실험에 의하면, 평면 제트가 층류를 유지하는 범위는 $Re_c \approx 30$ 까지이다. 이를 고려하여, 본 연구에서는 $Re = 25$ 에서 수행하였다.

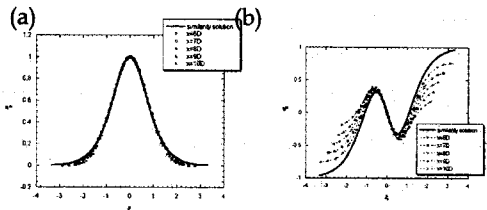


Fig. 1. Velocity profiles along axial distance

(a) streamwise velocity

(b) vertical velocity

상사해에서의 입구조건을 점으로 가정한다면, 수치해에서의 좌표계는 가상원점(virtual origin point)을 찾아서 이동해야 한다. 이를 위하여, 제트의 폭을 D 라 하였을 때, $0.2D$ 의 거리를 가상원점이라 가정하였다. 속도 분포의 자체유사성의 확인을 위하여 여러 가지 거리에서의 무차원화된 속도 분포의 비교를 Fig. 1에 나타내었다.

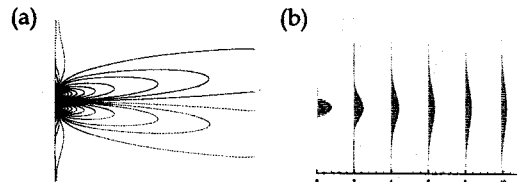


Fig. 2. Vorticity and velocity plot

(a) vorticity contour

(b) velocity contour

주유동방향 속도 분포의 경우 자체 유사성을 뚜렷이 확인할 수 있는 반면, v 의 경우 어느 정도

의 오차가 있는 것은 지배방정식의 차이뿐만 아니라 입구조건의 부과의 문제에도 기인한다.

본 연구에서는 9603개의 격자점과 18816개의 요소를 사용하였다. 계산 결과의 등와도선 및 속도 분포등은 Fig. 2에 제시되어있으며, 유선의 그림에서 보듯이 질량유입을 확인할 수 있었다.

4.2. 부력을 고려한 원형실린더 주위 유동

실린더 주위의 주기적인 보텍스 shedding(vortex shedding)은 유동 흐름에 수직 방향으로 주기적인 힘을 가하고, 항력을 증가시키는 구조를 가지고 있다. 본 연구에서는 입구외의 세 면에 대하여 유도된 개방경계조건을 사용하였다. 원형 실린더의 경우 $Re \approx 170$ 부터는 3차원성의 개입으로 인하여, $St-Re$ 의 발연속점이 존재하게 되므로, 여기서의 Re 는 모든 경우 100으로 고정하였다. 총 격자수는 12289개의 삼각형 요소를 사용하였고, 한번의 시간전진당 걸리는 시간은 CRAY T3E에서 약 9초이며, 시간전진 간격($\Delta t u_{\infty}/d$)은 0.06을 사용하였다.

4.2.1 유동의 검증 및 해석

본 계산의 타당성 검증을 위하여 기존의 여러 연구자들의 부력효과를 무시한 경우의 C_p 곡선과 Nu 곡선을 Fig. 3에 비교하였다. 여기서 확인할 수 있듯이 기존의 연구와 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. $Re = 100$ 에서 상응하는 $St = 0.164$ 로서 Williamson⁵⁾이 제시한 0.164와 일치함을 볼 수 있다.

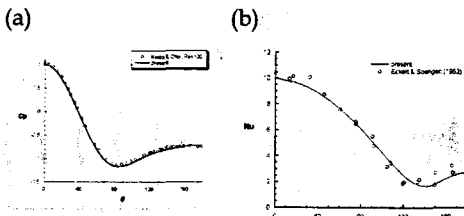


Fig. 3. Validation of boundary condition without buoyancy effect

- (a) time-averaged pressure coefficient
- (b) Nu distribution

레이놀즈 수가 100인 원형 실린더 주위의 주기

적인 shedding은 실험적으로 임계 $Gr (\approx 1500)$ 에서부터 정상 twin-vortex 형태로 변형되어진다. 여기서는 가열된 실린더를 중력 방향을 바꾸어가며 계산하였는데 중력방향과 유동방향이 같은 경우는 Gr 를 양수로, 다른 경우는 음수로 처리하였다. 이는 혼합대류내에서 실린더를 가열 혹은 냉각시키는 경우의 물리적 현상과 많은 유사성을 지닌다.

Gr 가 음수인 경우 이는 실린더를 가열시키는 효과와 유사하게 해석할 수 있는데, 후류에서의 속도가 주변의 가열된 유체의 부력효과로 인하여 활성화되고 이는 전단층을 강화시킨다. 전단층의 강화는 곧 shedding 주기를 늘리게 되고 이리하여 St 는 감소하게 된다.

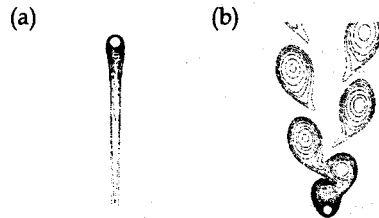


Fig. 4. Isotherm maps

- (a) $Gr = 5000$, (b) $Gr = -5000$

Fig. 4는 $Gr = \pm 5000$ 에서의 등온도선을 나타내는 데, 부력효과가 없는 경우와 비교하여, shedding 폭이 증가한 것을 볼 수 있다. Gr 가 양수인 경우 위의 경우와 반대의 효과를 나타내게 된다.

4.2.2 계산영역의 시험

현재의 경계조건을 사용시 주유동의 경계의 감소에 따른 변화를 알아보기 위하여 아래의 여러 격자크기에 대하여 조사해 보았다. 또한, 계산격자의 형상의 보존과 불규칙적인 경계에서의 적용가능성을 위하여, 격자구조를 보존한채로 영역을 잘라내었다.



Fig. 5. Reduced domains for various domains

- (a) $25D \times 20D$, (b) $30D \times 20D$
- (c) $30D \times 30D$

각각의 격자 구조는 Table 1에 제시되어 있으며, 이는 다시 Fig. 5에 가시화되어 있다. 여기서 제안된 경계조건을 적용한 A,B,C 각 경우의 원천 변수들의 등고선을 비교시 경계에서의 wiggle이 거의 발생하지 않음을 알 수 있었다. 또한, Fig. 5의 격자구조에서 보듯이 임의의 불규칙한 경계에서도 제안된 경계조건 적용이 가능함을 알 수 있다.

Table 1. Grid system in short domains.

(Label) 격자수 / 요소수	계산영역(-a<x<2D, y <b)	St
(A) 9398 / 18552	a = 5D , b = 10D	0.1695
(B) 9528 / 18822	a = 10D, b = 10D	0.1684
(C) 10016 / 19792	a = 10D, b = 15D	0.1661

5. 결론

본 논문에서는 개방경계에 대하여 일반적으로 적용할 수 있는 경계조건을 제안, 여러 가지 경우에 대하여 적용해 보았다. 체적력을 고려하는 원형실린더, 질량유입(entrainment)이 있는 평면 제트 문제들의 적용에서 알 수 있듯이, 위의 수정된 무응력조건 fractional 4 step의 적용은 성공적이라 할 수 있다. 안정성면에서 제고해보면, 속도를 이용하여 개방경계에 적용할 때에는 속도의 두가지 방향에 대하여 서로 일치성(compatibility)을 갖도록 결정해야 되는 어려움이 있는 반면, 압력을 이용하여 개방경계조건을 적용시 속도의 두 성분엔 전파가 되는 장점이 있다. 즉, 속도를 경계조건으로 사용할 경우, 속도의 두가지 성분의 확실한 부여가 필요하며, 만일 한 성분의 어느정도 잘못된 경계조건 부과는 압력값에 오차로 계속해서 누적되게 된다. 그러나 잘 구성된(well-conditioned) 압력조건을 개방 경계조건으로 적용할 경우 속도의 양방향으로 자연적으로 전파가 되기 때문에 적용의 용이성에서 장점을 가지게 된다.

참고문헌

- (1) Kim J. and Moin P., 1985, "Application of a Fractional-step Method to Incompressible Navier-Stokes Equation," *J. of Comp. Physics*, Vol. 59, pp. 308~523
- (2) Gresho, P. M., 1990, "On the Theory of Semi-implicit Projection Methods for Viscous Incompressible Flow and Its Implementation via a Finite Element Method that also Introduces a Nearly Consistent Mass Matrix," *Int J. Num. methods in fluids*, Vol. 11, pp. 587~620.
- (3) Sani, R. L. and Gresho, P. M., 1994, "Resume and Remarks on the Open Boundary Condition Minisymposium," *Int. J. Num. Methods in fluids*, Vol. 18, pp. 983~1008.
- (4) Schlichting H., 1933, Laminare Strahlenausbreitung. *ZAMM*, Vol. 13, pp. 260 ~ 263
- (5) Williamson, C. H. K., 1989, "Oblique and Parallel Modes of Vortex Shedding in the Wake of a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers," *J. Fluid Mech.*, Vol. 206, pp. 579.
- (6) Andrade E. N., 1939, "The velocity distribution in a liquid-into-liquid jet," *Proc. Phys. Soc. London*, Vol. 51, pp. 784 ~ 793
- (7) Boersma, B. J. et al., 1997, "A numerical investigation on the effect of the inflow conditions on the self-similar region of a round jet," *Phys. Fluids*, Vol. 10, pp. 899~909.
- (8) Chang, K. and Sa, J., 1990, "The Effect of Buoyancy on Vortex Shedding in the Near Wake of a Circular in Cylinder," *J. Fluid Mech.*, Vol. 220, pp. 253~266.
- (9) Gresho, P. M., 1991, "Incompressible Fluid Dynamics: Some fundamental formulation issues," *Annu. Rev. Fluid Mech* Vol. 23, pp. 413~453
- (10) Jain, P. C. and Lohar, B. L., 1979, "Unsteady Mixed Convection Heat Transfer from a Horizontal Circular Cylinder," *Journal of Heat Transfer*, Vol. 19, pp. 126~131.