대한기계학회 2000년도 춘계학술대회논문집 B pp. 835~840 KSME 00S293

관로에서 점성유체 유동의 압력파 전달에 관한 연구

김형오*· 나기대· 모양우**

A Study on the Pressure Wave Propagation of Viscous Fluid Flow in a Pipe Line

H.O.Kim, G.D.Na, Y.W.Mo

Key Words: pressure wave propagation, Pulsating flow, Wave propagation vector, viscous fluid flow, Prandtl number.

Abstract

The objective of the present study is to investigate the characteristics of pressure wave propagation of viscous fluid flow in a circular pipe line. The goal of this study is to select the best frequency of each control factor of a circular pipe. We intend to approach a formalized mathematical model by a very exact and reasonable polynomial for fluid transmission lines. and we computed this mathematical model by computer.

The results show that the oil viscosity decreased as the length of the circular pipe increases. and The energy of pressure wave propagation decreased as the pipe diameter decreases. The factor is that density of oil was changed resonant frequency. It has been found the viscosity characteristics is changed largely by length of hydraulic pipe and volume of cavity tank.

기호설명

c : Acoustic velocity	$cm/\sec$
b : Thickness of Pipe	cm
d : Diameter at inside of pipe	cm
E : Volume elasticity	kg_f/cm^2
A : Area of Pipe	cm^2
l : Length of Pipe	cm
r : Radius of Pipe ($d/2$)	cm
R_f : Resistance ($32\nu/d^2$)	$1/\sec$
T_s : l/c	sec
V_2 : Volume of Output Tank	cm^3
β_0 : Compress-ratio of Oil	
ρ : Density of Oil	kg_f/cm^3
ν : Kinematic viscosity of Oil	$cm^2/\sec$
K : Modulous of elasticity	
$Z(s)$: Impedance	
σ : Prandtl number ($=\mu C_p/\lambda$)	

* 조선대학교 정밀기계공학과
** 조선대학교 공과대학 기계공학부

1. 서 론

고속, 고압의 환경에서 운전되어지고 있는 많은 유압기기들은 항상 급격한 압력변동과 관로내에서 유체유동이 변화하는 비정상 유체력에 노출되어 있다. 이러한 현상들은 기계수명의 단축과 산업현장에서의 재해로 직결되기 때문에 보다 안정성 있고 향상된 성능을 갖춘 유체기계를 설계하기 위해서는 관로에서의 내부유동특성을 이해하는 것이 필요하다.

과거의 원형관내 유체의 운동에 관한 연구 내용의 개략은 Sexl[1] 은 비압축성 유체의 축대칭

유동에 대하여 대류가속도(convective acceleration)를 무시한 운동량방정식을 이용하여 강관(rigid tube)내 진동 유동에 대한 압력 구배와 속도장내의 관계를 연구하였고, Uchida[2]는 원형관 내의 완전히 발달한 정상유동에 진동 유동이 가해진 층류 유동에 대하여 Hagen-Poiseuille 유동과 Sexl[1]에 의해 계산된 속도분포 해를 대신하는 엄밀 해를 제시하였다. Atabek 등[3]은 선형화 기법을 이용하여 점성유체의 층류, 맥동유동에 대한 입구효과를 분석함으로써 강관에 대한 Navier-Stokes식을 해석하였으며, Linford[4]는 유동장내에 투입된 잉크에 대한 動畫像으로부터 얻은 속도 Data에 의하여 강관 내 진동유동에 대한 운동방정식을 확인하였다. Brown[6]은 유체관로에서 Laplace 영역 2차원 점성유동 파동방정식을 역변환시켜, 반무한 관로에서 Step 전파해석과 과도응답특성을 Impedance 함수로 하여 이론적으로 해석하였다. Ruterbories 등[7]은 강관과 유연관(flexible tube) 내의 유동이 서로 다르다고 단언하고, 熱線風速計를 이용하여 비정상유동 속도를 측정함으로써 혈관내의 유동을 시뮬레이션하였다. 그들은 진동이 어떤 영역에서 減幅하는 동안 다른 영역에서는 增幅하고 유동이 실제적으로 난류로의 遷移의 초기단계에서 일어난다고 가정하였으나 실제 통과유량에 대한 Reynolds 수는 1200보다 작게 나타났다. 横田, 中野[8]는 유압관로에서 동특성을 이용해서 비정상유량을 측정하는 방법을 이론적으로 연구하여 발표하였고 Yokoda등[9]은 맥동유동에서 고주파특성을 실험적으로 제시하였다.

본 연구에서는 유압관로의 동력전달이 유량과 압력과의 상호작용을 할 때 유압조작자(actuator)의 회전운동이나 왕복운동 때문에 주기적으로 전달되는 압력전달특성을 수학적으로 모델링을 하였으며, 이 모델링의 검증을 위하여 여러 조건에서 수치해석을 하였다. 이는 유압기계에서 동력전달을 하는데 있어서 산업현장에 설치되어 응용되고 있는 각종 유압장치를 이용하여 제어하고자 할 때 보다 정확한 신호전달체계를 이해하고 적용하도록 기본자료를 제공하기 위해서이다.

2. 이 론 해 석

원형 관로내에서 주파수의 변화에 따라 변화하는 점성유체 유동의 해석을 하기 위해서 본 연구에서는 Fig. 1과 같이 축방향 좌표 x, 반지름방향 좌표 r인 원통형 좌표계를 이용한다. 열적 효과를 무시하여 관의 전 단면에 걸쳐 점성계수가 일정하다고 가정하고 중력 등의 외부력을 무시하면, 이에 대한 지배 방정식은 다음과 같이 정의된다.

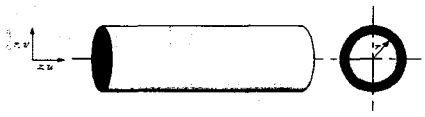


Fig. 1 Cylindrical Coordinates and Velocity Components

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\rho}{A}\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{R}{A}q \tag{1}$$

$$-\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{A}{K}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{2}$$

두 식을 이용하여 압력에 대한 식으로 표현하기 위해 (1)식을 x로 미분하여 정리하면 아래 (3)식과 같이 된다.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{R}{K}\frac{\partial p}{\partial t}=0 \tag{3}$$

(3)식을 Laplace 변환하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 P(x,s)}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\left(s^2+\frac{R}{\rho}s\right)P(x,s)=0$$

윗식에서 $\frac{1}{c^2}\left(s^2+\frac{R}{\rho}s\right)=\gamma^2$이라면 $P(x,s)=C_1e^{\gamma(s)\cdot x}+C_2e^{-\gamma(s)\cdot x}$이고 같은 방법으로 유량에 대하여 풀면

$Q(x,s)=\frac{1}{Z_0(s)}[C_1e^{\gamma(s)\cdot x}-C_2e^{-\gamma(s)\cdot x}]$의 일반해를 얻는다.

초기조건

$x=0$: $P(0,s)=P_1(s)$, $Q(0,s)=Q_1(s)$

$x=l$: $P(l,s)=P_2(s)$, $Q(l,s)=Q_2(s)$

을 이용하여 전달행렬식을 구한다.

길이 l, 내경 d, 단면적 A인 관로의 입구압력을 p_1, 입구유량을 q_1, 출구값을 각각 p_2, q_2라고 하고 이것을 각각 라프라스 변환 한 것을 $P_1(s)$, $Q_1(S)$, $P_2(s)$, $Q_2(s)$라고 한다. 관로내의 유동은 층류유동이고 점성저항은 정상유동의 저항값을 이용하여 운동방정식과 연속방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$P_1(s)=P_2(s)\cosh\gamma(s)l+Z_0Q_2(s)\sinh\gamma(s)l \quad (4)$$

$$Q_1(s)=P_2(s)(1/Z_0)\sinh\gamma(s)l + Q_2(s)\cosh\gamma(s)l \quad (5)$$

윗식을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} P_1(s) \\ Q_1(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\gamma(s)l & Z_0\sinh\gamma(s)l \\ \frac{1}{Z_0(s)}\sinh\gamma(s)l & \cosh\gamma(s)l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2(s) \\ Q_2(s) \end{pmatrix} \quad (6)$$

여기에서

$$\gamma(s)=\frac{1}{c}\sqrt{s^2+R_f s} \quad (7)$$

$$R_f=32\frac{\nu}{d^2}$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\rho\left(\beta_0+\frac{d}{bE}\right)}}$$

$Z_0=\frac{\rho a^2\gamma(s)}{As}$ 이고 c는 음속 Z_0는 임피던스, γ는 전달함수이다.

비정상 층류 유동이라고 가정할 때 점성저항을 사용할 경우 식 (4), (5)는 완전히 같지만 식 (7)의 전달함수 $\gamma(s)$는 다음 식으로 정의된다.

$$\gamma(s)=\frac{s}{c}\eta(s)$$

$$\eta(s)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2J_1(jr\sqrt{s/\nu})}{jr\sqrt{s/\nu}J_0(jr\sqrt{s/\nu})}}} \quad (8)$$

관로의 출구 부분에 용량탱크를 부착하였을 경우 용량탱크 탄성을 기름의 압축성에 비교해서 무시하면 다음 식이 성립된다.

$$q_2=\beta_0V_2\frac{dp_2}{dt} \quad (9)$$

이것을 라플라스 변환하면 다음과 같다.

$$Q_2(s)=\beta_0V_2sP_2(s) \quad (10)$$

이 식을 식 (4)에 대입하면 관로 입구압력과 출구압력을 입력, 출력으로 하는 전달 함수가 다음과 같이 된다.

$$G(s)=\frac{P_2(s)}{P_1(s)} = \frac{1}{\cosh\gamma(s)l+(C_2/C_1)\gamma(s)l\sinh\gamma(s)l} \quad (11)$$

여기에서 $C_1=\frac{A}{\rho c^2}$, $C_2=\frac{\beta_0V_2}{l}$ 이다. $G(s)$를 무한곱으로 표시하면 다음과 같다.

$$G(s)=\frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}(s^2/\omega_{nk}^2+2\zeta_k s/\omega_{nk}+1)} \quad (12)$$

여기에서 $\omega_{nk}=\varepsilon_k/T_e$, $\zeta_k=R_fT_e/2\varepsilon_k$, $T_e=l/c$ 이다. ε_k는 $\gamma(s)l$의 허수부분으로

$\varepsilon\tan\varepsilon=C_1/C_2$

를 만족하는 양(+)의 값이다. C_2/C_1, R_fT_e는 무차원양으로 무차원 용량비, 무차원 점성 감쇄율이다. 식 (11)에서 주파수 전달함수는 다음과 같다.

$$G(j\omega)=\frac{P_2(j\omega)}{P_1(j\omega)} = \frac{1}{\cosh\gamma(j\omega)l+(C_2/C_1)\gamma(j\omega)l\sinh\gamma(j\omega)l} \quad (13)$$

위 식을 변형하면 다음과 같다.

$$G(j\omega)=\frac{1}{A^*+jB^*} \quad (14)$$

$$\therefore |G(j\omega)|=1/\sqrt{A^{*2}+B^{*2}},$$

$$\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}(B^*/A^*) \quad (15)$$

여기에서

$$A^*=\cosh\alpha^*\cos\beta^*+(C_2/C_1)(\alpha^*\sinh\alpha^*\cos\beta^* - \beta^*\cosh\alpha^*\sin\beta^*)$$

$$B^*=\sinh\alpha^*\sin\beta^{*+}(C_2/C_1)(\alpha^*\cosh\alpha^*\sin\beta^* + \beta^*\sinh\alpha^*\cos\beta^*) \quad (16)$$

α^*, β^*는 $\gamma(j\omega)l$의 실수부와 허수부 이다. 정상층류의 점성저항을 이용하면 α^*, β^* 다음과 같다.

$$\alpha^*=T_e\omega\left\{1+\left(\frac{R_f}{\omega}\right)^2\right\}^{1/4}\sin\left\{\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{R_f}{\omega}\right)\right\}$$

$$\beta^*=T_e\omega\left\{1+\left(\frac{R_f}{\omega}\right)^2\right\}^{1/4} \cos\left\{\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{R_f}{\omega}\right)\right\} \quad (17)$$

$R_f/\omega\ll1$인 경우 α^*, β^*는 다음과 같이 된다.

$$\alpha^*\fallingdotseq T_eR_f/2,\quad \beta^*=T_e\omega \quad (18)$$

일반적으로 $\alpha^*\ll1$으로 되면 A^*와 B^*는 다음과 같이 근사된다.

$$A^*\fallingdotseq\cos\beta^*-(C_2/C_1)\beta^*\sin\beta^*,$$

$$B^*\fallingdotseq\alpha^*[\sin\beta^* + (C_2/C_1)(\sin\beta^*+\beta^*\cos\beta^*)] \quad (19)$$

식 (8)에 표시한 전달함수에 의해 진폭과 위상 지연은 다음과 같이 된다.

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{(1-(\omega/\omega_{nk})^2)^2+(2\zeta_k\omega/\omega_{nk})^2}} \quad (20)$$

$$\angle G(j\omega) = -\sum_{k=0}^{\infty}\tan^{-1}\frac{2\zeta_k\omega/\omega_{nk}}{1-(\omega/\omega_{nk})^2} \quad (21)$$

3. 결과 및 고찰

본 연구에서는 이론적으로 도출된 전달함수의 정확성을 실험이 아닌 컴퓨터 시뮬레이션(Simulation)을 통해서 검증하고자 하였고, 여기에 사용된 컴퓨터 프로그래밍 언어는 Matlab 5.x를 사용하였다.

또한 시뮬레이션(Simulation)의 정확도를 위하여 각종 변수들의 초기값은 실제 실험에서 사용하고 있는 물성치들을 사용하였으며 유압유의 경우는 산업현장에서 사용하고 있는 유압기기 작동유의 물성치를 사용하였다. 이러한 시뮬레이션의 해석대상으로 정한 관로와 Surge Tank, 작동유체의 제원은 Table 1.과 같으며, 식 (19)과 (20)을 이용하여 이론적으로 해석을 하였으며 그 결과는 Fig. 2부터 Fig. 5에 나타내었다.

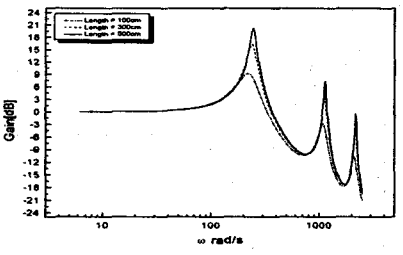
Unit	Modulus	Value
Pipe	Diameter	1.00㎝, 2.00㎝
	Thickness	0.25㎝
	Modulus of elasticity	2.15×10^{6}kg/㎠
Surge Tank	Volume	485㎤, 785㎤
Oil	Density	888.2×10^{-6}kg/㎤
	Kinematic viscosity	$900\times10^{-2}cm^2/s$
Water	Density	998.2×10^{-6}kg/㎤
	Kinematic viscosity	$1.006\times10^{-2}cm^2/s$

Table 1. Dimensions of a Pipe, Tank and Fluid

Fig. 2의 Bode선도는 관로의 길이가 작을수록 Gain값이 작고 관로의 길이가 증가함에 따라 Gain값이 증가하고 있으며, 공진의 Peak값 발생 각속도는 100rad/sec에서 150rad/sec로 증가하고 있다. 여기서 관로의 길이가 커짐에 따라 Gain값이 커지는 것은 관로 내부에 흐르는 유체의 질량유량의 증가에 의한 Impedance의 상승 현상이다.

관로의 길이가 증가함에 따라 Gain의 Peak값이 높아지는 것은 운동량의 전달이 증가하는 것을 의미하는데, 이로 인하여 관로에 운동량이 작용할 경우 물리적인 진동을 유발시킬 수도 있으며 진동 때문에 소음이 발생하여 시스템의 오작동을 일으킬 수 있다. 공진값을 나타내는 주파수대역에서 결과곡선의 폭이 좁을수록 짧은 시간에 운동량을 유체에 전달하여 유체 점성의 크기에 영향을 받아 소멸한다.

관로의 길이가 길어질수록 공진 주파수에 의한 Gain값이 증가하는데 이 증가된 Gain값은 관로내 유체에 전달되어 열로 흡수된다. 그러므로 공진 주파수에 의한 Gain값이 클수록 열을 많이 발생하게 되며, 이와 같은 이유로 유압 관로는 가능한 길이를 작게 하는 것이 열의 발생에 의한 점도 저하를 예방하며, 작동유체의 누설을 방지하고, 온도상승에 따른 밀도의 변화를 억제할 수 있기 때문에 신호 전달에 있어서는 정확한 값을 전달할 수 있다.



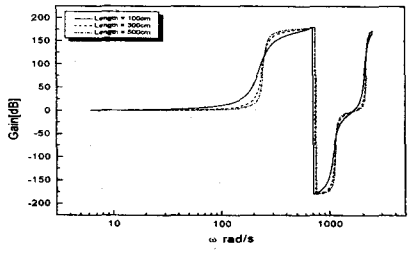


Fig 2. Frequency Characteristics in Oil
(D = 1㎝, Tank Volume = 485㎤)

위상지연은 관로의 길이가 길어질수록 압력강하량이 많아져 저항을 많이 받아 유체 유동량이 감소하기 때문에 유체입자간의 충돌에 의한 위상지연 영향은 줄어들고 있다.

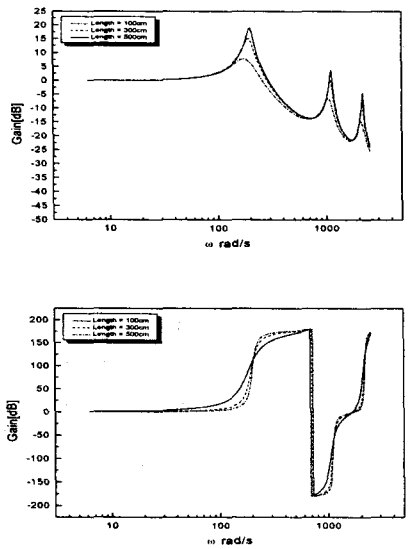


Fig 3. Frequency Characteristics in Oil
(D = 1㎝, Tank Volume = 785㎤)

Fig. 2와 Fig. 3은 관로에서 전달되는 압력파가 관로의 끝 부분에서 반사되어 되돌아오는 반사파의 영향을 줄이기 위해 관로의 끝단에 Surge Tank를 부착할 경우 주파수 변화에 대한 변화를 연구하기 위해 체적이 485㎤과 785㎤를 부착한 경우를 비교하였다. Surge tank의 크기가 변할지라도 공진주파수 영역은 변하지 않았는데 그 이유는 관의 직경에 비하여 Surge tank의 크기가 크기 때문에 상대적으로 관로의 내부로 반사되는 압력파 성분이 작기 때문이다.

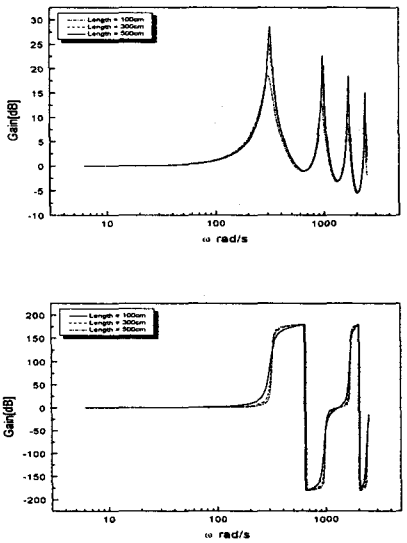


Fig 4. Frequency Characteristics in Oil
(D = 2㎝, Tank Volume = 485㎤)

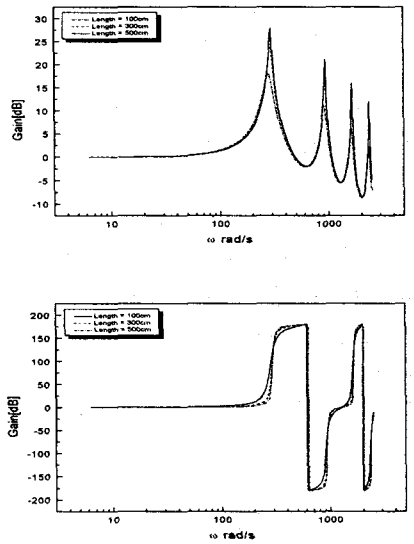


Fig 5. Frequency Characteristics in Oil
(D = 2㎝, Tank Volume = 785㎤)

관로의 직경을 1㎝에서 2㎝로 교환했을 경우 관직경이 1㎝인 경우와 비교해서 Gain값이 증가했다. 또한 관의 직경이 증가하면 관로 내부에 흐르는 임피던스의 증가와 파수벡터의 상승으로 인하여 Gain이 증가되면서 공진이 발생하는 각속도는 Fig. 4와 Fig. 5에서 보여주듯이 300rad/sec 정도로 증가하게 되는데, 계략적인 고유진동수가 질량의 제곱근에 반비례하기 때문에 체적유량의 증가로 공진 발생 각속도가 증가한 것으로 판단된다. 같은 유량과 같은 압력상태에서 관의 직경이 커지면 상대적으로 관성력이 커지기 때문에 관성의 효과로 나타나는 위상지연 현상도 높은 각속도 영역에서 발생하였다.

4. 결 론

단면이 원형인 직관에서 점성유체의 유동에 따른 주파수 변화에 대한 동특성을 이론적으로 해석하고 수치 시뮬레이션을 해본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 관로의 길이가 길어질수록 공진 주파수에 의한 Gain값이 증가하는데 이 증가된 Gain값이 유체에 열을 발생시켜 점도를 저하시킨다.
2. 관의 길이가 길고 관의 직경이 작을수록 공진에 의한 영향을 크게 받는데 이 공진에 의한 영향은 관로내 유체밀도를 변화시켜 압력파 전달에 의한 에너지 값이 떨어진다.
3. 관로의 직경이 증가할수록 관로 내부에 흐르는 Impedance의 증가와 파수벡터의 상승으로 인하여 Gain이 증가하기 때문에 유압동력의 관점에서 해석하면 유압 관로의 직경을 작게 하는 것이 좋다.
4. 공진 발생에 의한 진동과 소음을 억제하여 안정적으로 동력을 전달하기 위해서는 관의 길이는 짧게하고 관의 직경은 크게하는 것이 양호하다.

위와 같은 결과를 확인하기 위해 실험에 의한 연구의 필요성이 있다.

참고문헌

(1) Sexl T., "Uber den von E. G. Richardson Entdeckten 'Annular-effekt'", Aeitscchrift fur Physik, Vol. 61, pp. 349, 1930.

(2) Uchida S., "The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion of incompressible fluid in a circular pipe", Aeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik, Vol. 7, p. 403, 1956.

(3) Atabek, H. B. and Chang C. C., "Oscillating flow near the entry of circular tube", Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, Vol. 12, pp. 185, 1961.

(4) Lindford R. G., "Pulsating flow phenomenon", Ph. D. Thesis University of Utah, 1961.

(5) Atabek H. B. and Chang C. C. and Fingerson L. M., "Measurement of laminar oscillatory flow in the inlet length of circular tube", Physics in Medicine and Biology, Vol. 9, pp. 219, 1964.

(6) Brown F. T., "Step response of liquid lines with frequency-dependent effects of viscous", J. of Basic Engineering, pp. 504-510, 1965.

(7) Ruterbories B. H. and Ostrach S., "Velocity and pressure measurements of pulsating flow in a flexible tube", FTAS/TR-66/10, Case Institute of Technology, 1966.

(8) 横田, 中野, "圓管內 助走區間における 振動流壓", 空氣壓 12-3, pp. 69-73, 1981.

(9) Yokota, Suzuki, Do-Tae Kim, "An Approach Extending the Potential of the Remote Measurement Method for Unsteady Flow Rate Using Hydraulic Pipeline Dynamics" JSME International Journal Series C, Vol. 38. No. 3 1995.