

벡터유한요소법과 모드정합법을 이용한 불연속 구조를 갖는 평면형 선로의 효율적 계산

김영태\*, 김철수, 박준석, 안달, 김형석  
 순천향대학교 정보기술공학부

Efficient Calculation of a Step Discontinuity for Planar Transmission Line Using Vector Finite Element Method and Mode Matching Method

Young-Tae Kim\*, Chul-Soo Kim, Jun-Seok Park, Dal Ahn, Hyeong-Seok Kim  
 Division of Information Technology Eng., Soonchunhyang University

**Abstract** - For an efficient calculation of scattering matrix of planar transmission line with step discontinuity, Mode Matching Method combined with Vector Finite Element Method is adopted. Calculating effective widths are replaced with their respective equivalent planar waveguide corresponding to the microstrip width. Propagation Constant is calculated from the Vector finite element. Mode matching method is used for deriving scattering parameters.

1. 서 론

이동통신분야가 발달함에 따라 RF 대역 및 마이크로 파 대역에서 설계소자의 특성을 계산하기 위해서 유한요소법[1], 시간영역 분할차분법[2]등 다양한 수치해석 방법들이 사용되고 있다. 일반적으로 불연속 구조를 갖는 도파관 구조의 해석을 위해 모드정합법[3][4]이 많이 사용되고 있으나 불연속 구조를 갖고 있는 마이크로 스트립 구조와 같은 평면형 결합선로에서는 직접적으로 모드정합법을 이용하여 해석하기가 힘들다. 이와 같은 이유로 마이크로 스트립 구조를 도파관 구조로 변환하여 모드정합법을 이용하였다. 그러나 이 방법을 쓰기 위해서는 도파관 구조로 변환하기 위한 유효 유전율 및 유효 스트립 폭을 계산해야 한다. 현재까지는 대부분 실험식을 이용하여 유효 유전율과 유효 스트립 폭을 결정[5]하였다. 실제 모드정합법을 이용하여 도파관 구조로 변환하는 과정에서 유효 유전율과 유효 스트립 폭을 정확히 계산해야만 실제 도파관 구조로 변환하여 모드정합법을 이용하는데 정확한 계산값을 얻을 수 있다. 본 논문에서는 마이크로 스트립 구조의 불연속지점에서 좀 더 정확한 산란행렬의 추출을 위해서 벡터유한요소법[6]을 사용하여 각 주파수에서의 전파상수를 계산하여 유효유전율 및 유효 스트립폭을 결정하여 모드정합법을 적용하는 방법을 이용하였다.

2. 본 론

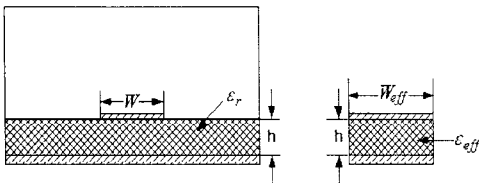


그림. 1 마이크로스트립 구조와 등가 도파관 모델

2.1 마이크로스트립 불연속 구조의 도파관 변환

마이크로스트립 선로의 불연속 구조를 해석하기 위해 그림1과 같은 등가 도파관 모델을 사용한다. 등가 도파관 모델을 변환을 위해서 마이크로스트립 선로의 가장자리 효과를 고려한 유효 유전율 및 유효 폭을 결정해야 한다. 일반적으로 유효 유전율과 유효 폭을 결정하는데 있어서 실험식을 이용하였지만 본 논문에서는 벡터유한요소법을 이용하여 결정하였다. 벡터유한요소법을 이용하여 전파상수(β) 계산하였다. 계산된 전파상수를 이용하여 식(2.1)과 식(2.2)을 이용하여 등가 도파관 구조의 유효 유전율과 유효 폭을 결정하였다.

$$\epsilon_{eff} = (\beta/k_0)^2 \tag{2.1}$$

$$Z = (120 \pi / \sqrt{\epsilon_{eff}}) (h / W_{eff}) \tag{2.2}$$

여기서  $k_0$ 는 진공중의 파수(wavenumber)를 말하며  $Z$ 는 특성임피던스이며  $h$ 는 마이크로스트립 구조의 유전체 높이를 말하며  $W_{eff}$ 는 마이크로스트립 구조의 도파관 구조 변화를 위한 유효 실효폭을 말한다. 위의 과정을 통해 도파관 구조로 변환된 다음 과정으로 모드정합법을 이용하여 계산하게 된다.

2.2 벡터유한요소법

마이크로스트립 구조를 등가 도파관 구조로 변환하는 과정에서 실험식이 아닌 전자파 해석을 하여 좀 더 정확한 계산을 위해서 벡터유한요소법을 이용하였다. 벡터유한요소법을 활용하기 위해서 시간적인 변화를 갖는 계에 대한 맥스웰방정식 2개를 표현하면

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{2.4}$$

와 같이 표현되며 복소표이저형식으로 다시 표현하면

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mu_r \mathbf{H} \tag{2.5}$$

가 되며 자유공간내에서의 전자파동을 고찰하므로 전하 밀도  $\rho_c = 0$ , 전류밀도  $\mathbf{J} = 0$ 인 경우의 맥스웰 방정식을 생각하므로 식(2.4)을 대입하여 정리하면

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0\epsilon_r \mathbf{E} \tag{2.6}$$

라고 표현할 수 있다.

자계  $\mathbf{E}$ 에 대한 벡터 헬름홀츠 방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = 0 \tag{2.7}$$

자계  $\mathbf{H}$ 에 대한 벡터 헬름홀츠 방정식도 위와 동일한 방법으로 유도할 수 있다.

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) - k_0^2 \mu_r \mathbf{H} = 0 \quad (2.8)$$

벡터유한요소법을 이용해서 전장벡터  $\mathbf{E}$ 을 해석하기 위해서 식(2.7)을 횡(transverse) 성분과 종(longitudinal) 성분으로 나누어서 표현하면

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \mathbf{E}_t \right) - \frac{1}{\mu_r} (j\beta \nabla_t E_z - \beta^2 \mathbf{E}_t) \\ = k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E}_t \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\mu_r} [ \nabla_t \cdot ( \nabla_t E_z + j\beta \mathbf{E}_t ) ] \\ = k_0^2 \epsilon_r E_z \end{aligned} \quad (2.10)$$

여기서  $\mathbf{E}_t$ 는  $\mathbf{E}_t = (E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}) \exp(-j\beta z)$ 로 표현되며  $\mathbf{E}$  field의 횡파 즉  $x, y$ 성분을 나타낸다.  $\beta$ 와  $k_0^2$ 을 분리하고 복소수값(complex value)가 아닌 실수값을 얻기 위해서  $\vec{e}_t = \beta \mathbf{E}_t$ ,  $e_z = -j E_z$ 로 놓고 갤러킨 방법(Galerkin method)을 적용하기 위해서 벡터형상함수(vector weighting function)  $W_i$ 을 곱하고 스칼라형상함수(scalar weighting function)  $L_j$ 을 곱하여 도파관의 cross section( $\Gamma$ )에 대해서 적분을 취하면

$$\begin{aligned} \int \int_{\Gamma} [ W_i \cdot \nabla_t \times \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \vec{e}_t \right) \\ + \frac{\beta^2}{\mu_r} ( W_i \cdot \nabla_t e_z + W_i \cdot \vec{e}_t ) ] ds \\ = k_0^2 \epsilon_r \int \int_{\Gamma} W_i \cdot \vec{e}_t ds \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\mu_r} \int \int_{\Gamma} L_j [ \nabla_t \cdot ( \nabla_t e_z + \vec{e}_t ) ] \\ = k_0^2 \epsilon_r \int \int_{\Gamma} L_j e_z ds \end{aligned} \quad (2.12)$$

과 같이 된다.

벡터등식과 발산정리를 이용하여 식(2.11)와 식(2.12)을 weak form 형태로 표현하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_r} \int \int_{\Gamma} [ ( \nabla_t \times W_i ) \cdot ( \nabla_t \times \vec{e}_t ) \\ + ( \beta^2 W_i \cdot \nabla_t e_z + \beta^2 W_i \cdot \vec{e}_t ) ] ds \\ = k_0^2 \epsilon_r \int \int_{\Gamma} W_i \cdot \vec{e}_t ds \\ - \frac{1}{\mu_r} \int_{\partial \Gamma} W_i \cdot ( \hat{n} \times \nabla_t \times \vec{e}_t ) ds \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_r} \int \int_{\Gamma} ( \nabla_t L_j \cdot \nabla_t e_z + \nabla_t L_j \cdot \vec{e}_t ) ds \\ = k_0^2 \epsilon_r \int \int_{\Gamma} L_j e_z ds \\ + \frac{1}{\mu_r} \int_{\partial \Gamma} ( L_j \frac{\partial e_z}{\partial n} + L_j \hat{n} \cdot \vec{e}_t ) ds \end{aligned} \quad (2.14)$$

도파관의 경계조건을 완전도체로 적용하고 행렬의 대칭을 위해서 식(2.14)에  $\beta^2$ 을 곱하여 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_r} \sum_{m=1}^3 \int \int_{\Gamma} ( \nabla_t \times W_{tm} ) \cdot ( \nabla_t \times W_{tn} ) e_{tm} ds \\ - k_0^2 \sum_{m=1}^3 \epsilon_r \int \int_{\Gamma} ( W_{tm} \cdot W_{tn} ) e_{tm} ds \\ = -\beta^2 [ \frac{1}{\mu_r} \sum_{m=1}^3 \int \int_{\Gamma} ( W_{tm} \cdot \nabla L_j ) e_{zj} ds \\ + \frac{1}{\mu_r} \sum_{m=1}^3 \int \int_{\Gamma} ( W_{tm} \cdot W_{tn} ) e_{tm} ds ] \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2}{\mu_r} \sum_{i=1}^3 \int \int_{\Delta} ( \nabla L_i \cdot \nabla L_j ) e_{zj} ds \\ + \frac{\beta^2}{\mu_r} \sum_{i=1}^3 \int \int_{\Delta} ( \nabla L_i \cdot W_{tn} ) e_{tm} ds \\ = \beta^2 \sum_{i=1}^3 k_0^2 \epsilon_r \int \int_{\Delta} L_i L_j e_{zj} ds \end{aligned} \quad (2.16)$$

와 같은 식을 얻을 수 있다.

계산의 정확성을 높이기 위해서 2차 벡터형상함수를 적용하였다.

최종적으로 행렬 형태로 조합하면

$$\begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_t \\ e_z \end{bmatrix} = (-\beta^2) \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_t \\ e_z \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

와 같은 형태가 된다.

### 2.3 모드정합법

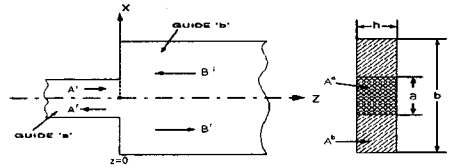


그림. 2 마이크로스트립 구조에서의 평면도와 도파관 구조의 측면도

마이크로스트립 선로의 불연속 구조를 해석하기 위해 그림2와 같은 도파관 모델을 사용한다. 이때 위와 아래 벽은 전기벽, 좌우벽은 자기벽이 되도록 고려한다.

유전체 두께가 파장보다 매우 작으므로,  $y$ 방향으로 전자계의 변화가 없다고 가정한다. 본 논문에서는  $TEM$  모드와  $TE_{m0}$ 모드만 존재한다고 해석한다.

모드정합법을 사용하기 위해  $z=0$ 에서의 경계조건은

$$H_t^b = 0 \quad (\text{영역 } A^b - A^a) \quad (2.18)$$

$$H_t^a = H_t^b \quad (\text{영역 } A^a) \quad (2.19)$$

$$E_t^a = E_t^b \quad (\text{영역 } A^b) \quad (2.20)$$

여기서 아래첨자  $t$ 는 전자계의 접선성분을 가리킨다. 도파관 구조에서 전자계 접선성분을 구체적으로 표현하면

$$E_t = \sum_{m=0}^{\infty} U_{m0} [ \hat{z} \times \nabla_t \Psi_{m0}(x, y) ] \quad (2.21)$$

$$H_t = \sum_{m=0}^{\infty} I_{m0} [ -\nabla_t \Psi_{m0}(x, y) ] \quad (2.22)$$

와 같다. 여기서  $U_{m0}$ ,  $I_{m0}$ 와  $m$ 은  $TE$ 모드의 크기와 모드가 개수를 의미한다.

$\Psi_{m0}$ 는  $TE$ 모드의 스칼라 포텐셜을 의미하고 영역  $A^a$ 에 대해서만 구체적으로 표현하면

$$\Psi_{m0}^a = \begin{cases} \frac{1}{W_{eff} h} \left( x + \frac{W_{eff}}{2} \right) \\ \sqrt{\frac{2}{W_{eff} h}} \left( \frac{W_{eff}}{m\pi} \right) \sin \left[ \frac{m\pi}{W_{eff}} \left( x + \frac{W_{eff}}{2} \right) \right] \end{cases} \quad (2.23)$$

식(2.20)에  $\hat{z} \times \nabla_t \Psi_{m0}(x, y)$ 을 곱하고 영역  $A^a$ 에 대해 적분을 하면

$$U_{M0}^a = \int \int_{A^a} E_t^b \cdot (\hat{z} \times \nabla_t \Psi_{M0}^a) dA \quad (2.24)$$

이 되며 유사한 방법으로  $I_{M0}^a$ 을 표현하면

$$I_{M0}^a = \int \int_{A^a} H_t^b \cdot (-\nabla_t \Psi_{M0}^a) dA \quad (2.25)$$

과 같이 표현된다.

식(2.21)와 식(2.22)로부터  $E_t^b$ 와  $H_t^b$ 의 관계식으로부터  $U_{M0}^a$ 와  $I_{M0}^a$ 의 관계식을 식(2.26)와 식(2.27)와 같이 유도할 수 있다.

$$U_{M0}^a = \sum_{\rho=0}^{\infty} U_{\rho 0}^b K_{(M0)(\rho 0)} \quad (2.26)$$

$$I_{M0}^a = \sum_{m=0}^{\infty} I_{m 0}^b K_{(m 0)(P0)} \quad (2.27)$$

와 같이 표현할 수 있다.

계수  $K$ 를 구체적으로 표현하면

$$K_{(M0)(\rho 0)} = \int \int_{A^a} (\hat{z} \times \nabla_t \Psi_{\rho 0}^b) \cdot (\hat{z} \times \nabla_t \Psi_{M0}^a) dA \quad (2.28)$$

$$K_{(m 0)(P0)} = \int \int_{A^a} (\nabla_t \Psi_{m 0}^a) \cdot (\nabla_t \Psi_{P0}^b) dA \quad (2.29)$$

와 같이 된다.

최종적으로 산란행렬의 시스템 행렬을 표현하면

$$\begin{aligned} \sqrt{Z_{M0}^a} (A_{M0}^i + A_{M0}^r) &= \sum_{\rho=0}^{\infty} \sqrt{Z_{\rho 0}^b} K_{(M0)(\rho 0)} (B_{\rho 0}^i + B_{\rho 0}^r) \\ \sqrt{Y_{P0}^b} (B_{P0}^i + B_{P0}^r) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{Y_{m 0}^a} K_{(m 0)(P0)} (A_{m 0}^i + A_{m 0}^r) \end{aligned} \quad (2.30)$$

과 같이 되면 행렬 형태는

$$\begin{bmatrix} A^r \\ B^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^i \\ B^i \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

와 같이 표현할 수 있다.

## 2.4 적용 사례

그림 3과 같은 불연속 구조를 갖는 마이크로스트립 구조에 벡터유한요소법과 모드정합법을 이용하여 산란행렬을 추출하였다.



그림 3 모드정합법을 이용하기 위한 불연속 구조를 갖는 마이크로 스트립 형상

영역 A와 B에서의 유효 실효폭( $W_e$ )는 0.5[mm],  $W_b$ 는 1.5[mm]이고 유전체 높이( $h$ )는 0.635[mm]이며 유전율( $\epsilon_r$ )은 9.7이다.

그림 4은 벡터유한요소법을 이용하여 각 주파수에 해당하는 전파상수를 계산한 결과이다.

그림 5은 AnSoft사의 HFSS 7.0을 이용하여 계산한 결과와 모드정합법을 이용한 산란행렬 결과이다.

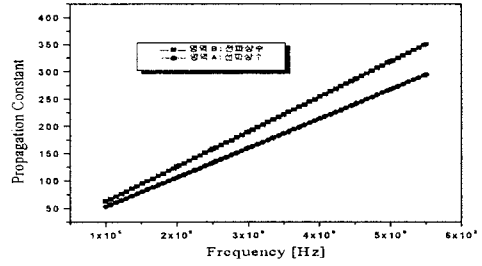


그림 4 벡터유한요소법을 이용한 마이크로스트립 구조의 전파상수 값

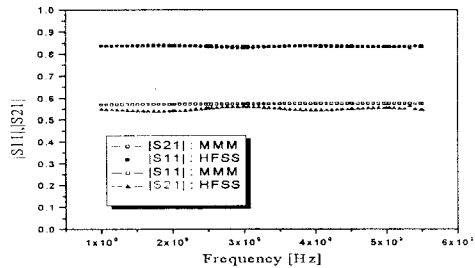


그림 5 모드정합법(MMM)과 HFSS를 이용한 산란행렬

그림 5에서 보는 바와 같이 HFSS와 벡터유한요소법과 모드정합법을 활용하여 계산한 산란행렬을 비교했을 때 비교적 잘 일치함을 알 수 있었다.

## 3. 결 론

벡터유한요소법과 모드정합법을 이용하여 계단형 불연속 구조를 갖는 마이크로스트립 선로의 산란행렬을 계산하였다. 가장자리 효과를 고려한 등가 도파관 구조의 변환과정에서 전파상수를 구하기 위해 벡터유한요소법을 적용하였으며 산란행렬을 추출하기 과정은 모드정합법을 이용하였다. 본 연구를 통한 산란행렬을 추출 과정은 컴퓨터의 계산시간 측면에서 여러 다른 수치해석 알고리즘에 비해 효율적이다. 향후 마이크로스트립 구조뿐만 아니라 불연속 구조를 갖는 스트립 구조, 리지(ridge)도파관 구조 등 다양한 구조의 산란행렬을 효율적으로 계산할 수 있을 것으로 판단된다.

### (참 고 문 헌)

- [1] Jianming Jin, "The Finite Element Method in Electromagnetics", Wiley & Sons, 1993
- [2] Allen Taflov, "Computational Electrodynamics The Finite-Difference Time Domain Method", Artech House, 1995
- [3] T.Itoh, "Numerical techniques for microwave & millimeter-wave passive structure", Wiley & Sons, pp. 448-472, 1989
- [4] J.Uher, "Waveguide components for antenna feed systems: theory and CAD", Artech house, pp. 9-49, 1993
- [5] Kompa, G., "S-matrix Computation of Microstrip Discontinuities with a Planar Waveguide Model", Archiv. Elektr. Ubertr., vol.30, pp.58-64, 1976
- [6] J.F.Lee, D.K.Sun, and Z.J.Cendes, "Tangential vector finite elements for electromagnetic field computation", IEEE Trans. on Magnetics, vol. MAG-27, pp. 4032-4035, Sep. 1991