

**비선형 및 Eddy Current 효과를 고려한
전자기 시스템의 위상 최적 설계**

강제남*, 왕세명*
광주과학기술원 기전공학과*

**Topology Optimization of Electromagnetic Systems
with Nonlinear and Eddy Current Effects**

Jenam Kang*, Semyung Wang*
Dept. of Mechatronics, K-JIST(Kwangju Institute of Science & Technology)*

Abstract - The topology optimizations of electromagnetic systems with the nonlinear and the eddy current effects are studied using the finite element method. The topology design sensitivity formulations of nonlinear magnetostatics and eddy current systems are derived using the adjoint variable method. A computer program is developed using object orient programming and applied to the topology optimization of a C-core actuator. A numerical study shows the effects of saturation and eddy current by comparing results of topology optimizations.

1. 서 론

비교적 짧은 역사에도 불구하고 위상최적설계(topology optimization)는 지금까지 많은 수학자와 공학자의 관심을 가져 왔다 [1]. 전자기 시스템의 경우에 기존의 형상 최적설계(shape optimization)는 현재 설계의 개선에 중점을 두는 반면, 위상최적설계는 초기 개념 설계에 중점을 두고 있다. 구조분야의 위상최적설계에 기초를 두고 있는 전자기 시스템에 대한 위상최적설계 연구는 수년 전에서야 비로소 시작되었지만 그 가능성이 점점 보여지고 있다 [2-3].

선행된 연구에서는 선형 정자기(magnetostatics) 시스템의 위상최적설계의 이론 연구와 실제 문제로의 적용을 보여 주었다 [4]. 본 연구에서는 비선형 및 Eddy Current의 효과가 고려된 시스템에 대한 위상최적설계 연구를 수행하였다. 연속체 방법(continuum method)과 밀도법 [2]을 이용한 위상설계 민감도 방정식(topology sensitivity equation)이 유도되었으며 ANSYS와 연결되어 민감도 계산이 가능하도록 하였다. 전체적인 프로그램의 제어와 민감도 계산을 위해 설계 프로그램(TOFEM: Topology Optimization For Electromagnetic Systems)이 개발되었다. 최적 설계 알고리즘으로는 DOT의 SLP를 사용하였으며, ANSYS를 목적함수나 구속조건을 위한 해석기로 사용하였다.

비선형 및 Eddy Current의 효과가 고려된 위상최적설계 결과들을 비교해 보기 위해서, C-core 액추에이터의 코어의 위상최적설계를 수행하였다.

2. 위상최적설계

2.1 위상최적설계

위상최적설계의 목적은 주어진 구속 조건(constraint)내에서 어떤 목적 함수(objective function)를 최대 또는 최소로 하는 최적의 재료의 배치를 구하는 것이다.

외부로부터 자계(flux) ϕ 와 전류 J_s 가 작용 하고 있는 전자기 시스템의 경우에 일반화된 비선형 위상최적설계 문제는 식(1)과 식(3)으로. Eddy Current 효과를 포함한 위상최적설계 문제는 식(2)와 식(4)로 표현되어 진다.

$$\text{minimize(maximize)} f(A, \mu) \tag{1}$$

$$\text{minimize(maximize)} f(A^*, \mu, \sigma) \tag{2}$$

$$\text{subject to } a_{\Omega}(\mu, A, \bar{A}) = l_{\Omega}(\bar{A}) \text{ for all } \bar{A} \in \bar{\mathcal{A}} \tag{3}$$

$$\text{subject to } a_{\Omega}(\mu, A^*, \bar{A}^*) = l_{\Omega}(\bar{A}^*) \text{ for all } \bar{A}^* \in \bar{\mathcal{A}}^* \tag{4}$$

여기에서 $f(A, \mu)$ 와 $f(A^*, \mu, \sigma)$ 는 자기 에너지(magnetic energy), 자기력(magnetic force), 자기 토크(magnetic torque)등과 같은 목적 함수이고, A 는 자기 벡터 포텐셜(Magnetic vector potential), \bar{A} 는 가상 자기 벡터 포텐셜. A^* 는 복소 자기 벡터 포텐셜, μ 는 투자율(permeability), σ 는 도전율(conductivity), 그리고 $a_{\Omega}(*, *)$ 는 에너지 쌍선형 형태(energy bilinear form)이고 $l_{\Omega}(*)$ 는 힘 선형 형태(load linear form)이다 [5].

2.2 전자기 시스템의 설계 민감도 해석

설계 민감도 해석은 구조 분야에서 활발하게 사용되고 있으며 전자기 분야의 경우에는 제품의 형상과 관련되어 사용되고 있다 [6-7].

다음과 같이 적분 형태로 표현되는 전자기 시스템의 목적 함수는 식(5)와 같다.

$$\Psi = \int \int \int_{\Omega} g(A, \nabla A, u) d\Omega \tag{5}$$

u 는 식(6)과 같이 투자율, 도전율, 전류 밀도 등을 포함하는 설계 벡터이다.

$$u = [\mu, \sigma, J_s]^T \tag{6}$$

보조 변수에 대한 보조 방정식은 다음과 같다.

$$a_u(\mu, \lambda, \bar{\lambda}) = \int \int \int_{\Omega} [g_A \bar{\lambda} + g_{\nabla A} \nabla \bar{\lambda}] d\Omega \tag{7}$$

식 (5)의 목적함수의 변분식과 직접 미분 결과를 이용하면 설계 민감도는 식(8)이 된다 [5].

$$\begin{aligned} \Psi' &= \int \int \int_{\Omega} [g_A A' + g_{\nabla A} \nabla A' + g_u \delta u] d\Omega \\ &= \int \int \int_{\Omega} g_u \delta u d\Omega + \int \int \int_{\Omega} [g_A A' + g_{\nabla A} \nabla A'] d\Omega \tag{8} \\ &= \int \int \int_{\Omega} g_u \delta u d\Omega + l'_{su}(\lambda) - a'_{su}(A, \lambda) \end{aligned}$$

2.3 지배 방정식과 변분식

맥스웰 방정식들로부터 유도될 수 있는 정자기장 (magnetostatic field)의 지배 방정식은 다음과 식(9)와 같이 표현된다.

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) = J_s \quad (9)$$

또한, Eddy Current 효과를 고려한 시간 조화계의 지배 방정식은 식(10)과 같이 표현된다.

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times A^* \right) + j\omega\sigma A^* = J_s \quad (10)$$

이제 적분 형태로 표현된 변분식을 구하기 위해서 식(9)와 (10)의 양변에 가상 벡터 포텐셜을 곱한 후 전 영역에 대해 적분하고 경계 조건을 대입하면, 변분식 (variational equation)을 구할 수 있다 [5].

비선형 정자기 시스템에서의 에너지 쌍선형 형태 $a_Q(\mu, A, \bar{A})$ 는

$$a_Q(\mu, A, \bar{A}) = \iint \int_Q (\nabla \times A) \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} \right) d\Omega \quad (11)$$

이고, 힘 선형 형태 $l_Q(\bar{A})$ 는 식(12)와 같다.

$$l_Q(\bar{A}) = \iint \int_Q (J_s \cdot \bar{A}) d\Omega \quad (12)$$

또한, Eddy Current 효과를 고려한 시간 조화계의 경우에는 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$\iint \int_Q \left[(\nabla \times A^*) \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A}^* \right) + j\omega\sigma A^* \cdot \bar{A}^* \right] d\Omega \quad (13)$$

$$= \iint \int_Q (J_s \cdot \bar{A}^*) d\Omega$$

2.4 비선형 정자기 시스템의 위상설계 민감도

식 (7)의 보조 방정식은 이 경우에는 $\nabla \bar{\lambda} = 0$ 이므로,

$$a_u(\mu, \lambda, \bar{\lambda}) = \iint \int_Q [g_A \bar{\lambda}] d\Omega \quad (14)$$

이 된다. 만약 등가의 전류 밀도가 $J_{eq} = g_A$ 이면, 보조 변수 λ 는 식(9)의 오른쪽 항을 다음과 같이 바꾸었을 때의 해이다.

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \lambda \right) = J_{eq} = g_A \quad (15)$$

식(8)의 설계 민감도 식과 식(11)과 식(12)의 에너지 변분식을 이용하면, 투자율에 대한 민감도 식은

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mu} = \iint \int_Q \left[g_\mu + \frac{1}{\mu^2} (\nabla \times A) \cdot (\nabla \times \lambda) \right] d\Omega \quad (16)$$

이고, 전류 밀도에 대한 민감도 식은 식(17)이 된다.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial J_s} = \iint \int_Q [g_l + \lambda] d\Omega \quad (17)$$

2.5 Eddy Current 효과를 고려한 시변 조화계의 위상설계 민감도

Eddy Current 효과를 고려한 시변 조화계에서의 위상 설계 민감도도 위와 비슷한 방법으로 유도할 수가 있다. 여기서 보조 변수 λ 는 식(18)과 같이 구할 수 있다.

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \lambda \right) + j\omega\sigma \lambda = J_{eq} = g_A \quad (18)$$

마찬가지로, 식(8)의 설계 민감도 식과 식(13)의 에너지 변분식을 이용하면, 투자율에 대한 민감도 식은

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mu} = \iint \int_Q \left[g_\mu + \frac{1}{\mu^2} (\nabla \times A^*) \cdot (\nabla \times \lambda) \right] d\Omega \quad (19)$$

이고, 도전율에 대한 민감도 식은 식(20)이 된다.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} = \iint \int_Q [g_\sigma + j\omega A^* \cdot \lambda] d\Omega \quad (20)$$

3. 수치 예제

3.1 위상 최적 설계 과정

그림 1은 위상최적설계의 과정을 나타낸다. 제안된 밀도법을 이용하는 최적 설계 프로그램(TOFEM)이 개발되었고, DOT의 SLP가 최적 설계알고리즘으로 사용되었으며, ANSYS가 목적 함수나 구속 조건의 해석기로 이용되었다.

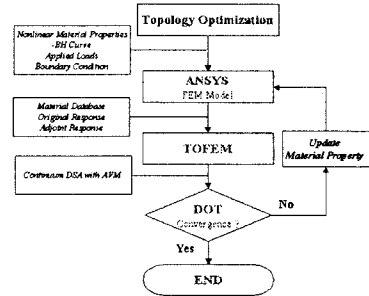


그림 1. 위상최적설계 과정

3.2 C-core 액추에이터의 위상 최적 설계

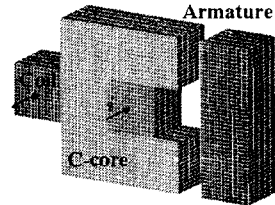


그림 2. C-core 액추에이터

그림 2와 같은 C-core 액추에이터의 목적은 코일에 전류를 가하여 전기자(armature)를 끌어당기는 것이다. 목적에 부합하기 위해서 주어진 전류로 최대의 자기력을 낼 수 있는 코어(Core)의 위상을 구하는 위상 최적 설계의 필요성이 대두된다.

따라서 다음과 같이 코어의 체적을 줄이면서 전기자에 유도되는 자기기력을 최대화하는 최적화 문제를 구성할 수 있다.

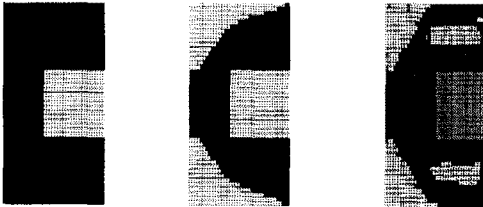
$$\text{maximize } f_x = \int \int_{\Omega_1} [B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial y}] d\Omega_1 \quad (21)$$

$$\text{subject to } g_1 = \frac{\int \int_{\Omega} \rho A t d\Omega_2}{V_r} - 1 \leq 0 \quad (22)$$

$$g_2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{NDV} (\rho_k - 0.5)^2}{NDV \cdot GI} \leq 0 \quad (23)$$

bounded to $0 \leq \rho \leq 1$, for all $\rho \in \Omega_2$

여기에서 V_r 은 최적화 후에 남아야만 하는 코어의 체적을 의미하고, GI 는 최적화 후에 코어가 가져야 하는 회색 표시 지수(gray level indicator)를 의미한다. 첫 번째 구속 조건은 체적 한계이고, 두 번째 구속 조건은 최적화 도중에 나타날 수 있는 회색 영역을 제거하기 위해 사용되었다 [4]. 코일에 가해진 전류 밀도는 2.0 A/mm^2 이며, 코어 및 전기자의 너비는 모두 20mm 이고, 코어의 전체 높이와 길이는 각각 60mm , 50mm 이다. 그림 3은 비선형 정자기 시스템의 위상최적설계 수행 후의 체적이 초기 체적의 60% 미만하도록 하고 ($V_r = 0.6V_{initial}$), 벌칙 상수 $P=2$ 일 때의 최적화 결과를 선형 시스템 것과 비교하여 나타낸 것이다.



(a) 초기 형상 (b) 선형일 경우 (c) 비선형의 경우
그림 3. C-core액추에이터의 위상최적설계 결과 I

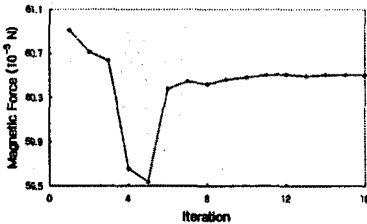


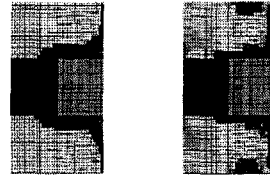
그림 4. 목적 함수의 변화 추이 I

그림 3의 최적화된 코어를 사용했을 때 그림 4에서와 같이 전기자에 유도되는 자기력은 원래의 코어를 사용했을 때 보다 약 0.67% 정도 줄어들었지만 40%의 체적을 줄임으로써 재료를 절감할 수 있다.

또한, 그림 5는 Eddy Current 효과가 고려된 시간 조화계의 위상최적설계 수행 후의 체적이 초기 체적의 20% 미만하도록 하고 ($V_r = 0.2V_{initial}$), 벌칙 상수 $P=2$ 일 때의 최적화 결과를 선형 시스템 것과 비교하여 나타낸 것이다.

그림 6에서 Eddy current를 고려한 위상최적설계를

통해 체적을 80% 줄인 반면 전기자에 유도되는 힘은 0.4% 정도 증가했음을 알 수 있다.



(a) 선형일 경우 (c) 비선형의 경우
그림 5. C-core액추에이터의 위상최적설계 결과 II

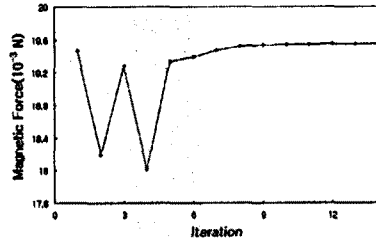


그림 6. 목적 함수의 변화 추이 II

5. 결 론

본 논문에서는 비선형 및 Eddy Current 효과를 포함한 정자기 시스템의 위상 최적 설계에 대한 연구가 수행되었다. 연속체 방법을 사용한 위상 설계 민감도식이 유도되었고, 위상 최적 설계를 수행 할 수 있는 프로그램이 개발되었다. 최적화 알고리즘으로는 DOT의 SLP가 사용되었으며, 해석기로는 ANSYS 가 사용되었다.

제안된 밀도법과 유도된 민감도식을 사용하여 개발된 프로그램을 검증하기 위해서 주어진 전류 입력에 대해서 최대의 자기력을 낼 수 있는 C-core 액추에이터 코어의 최적화된 위상을 구하는 문제에 적용하여 보았다.

(참 고 문 헌)

- [1] M.P. Bendsoe, and N. Kikuchi, Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 71, pp. 197-224, 1988
- [2] D. N. Dyck, and D. A. Lowther, Automated Design of Magnetic Devices by Optimizing Material Distribution, IEEE Transactions on Magnetics, VOL. 32, NO. 3, MAY 1996
- [3] J. Byun, and S. Hahn, Topology Optimization of Electrical Devices Using Mutual Energy and Sensitivity, INTERMAG 99, May 18-21, Kyongju, Korea
- [4] S. Wang, and Y. Kim, A Study on the Topology Optimization of Electromagnetic Systems, CEFC2000, pp. 336, 2000.
- [5] Edward J. Haug, K. K. Choi, Vadim Komkov, Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, ACADENIC PRESS, INC, 1986
- [6] S. Wang, and J. Kang, Shape Optimization of BLDC Motor Using 3-D Finite Element Method, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 35, No. 4, pp. 1159-1162, July 2000.
- [7] R. Rong, and D. A. Lowther, Applying Response Surface Methodology in the Design and Optimization of Electromagnetic Devices, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 33, No. 2, pp. 1916-1919, March 1997.