

수정된 민감도 기법을 이용한 선형계획법 기반의 무효전력 최적배분

김태권, 김병설, 김민수, 신종린
건국대학교 전기공학과

Linear Programming based Optimal Reactive Power Dispatch using Modified Sensitivity Method

Tae-Kwon Kim, Byung-Seop Kim, Min-Soo Kim, Joong-Rin Shin
Dept. of Electrical Eng. Konkuk Univ.
Email : jrshin@konkuk.ac.kr

Abstract - This paper presents a linear programming based Optimal Reactive Power Dispatch (ORPD) problem using modified sensitivity method. The proposed model minimizes the real power losses and improves the voltage profiles in the system with consideration of voltage and reactive power constraints. The method employs modified sensitivity relationships of power systems to establish both the objective function for minimizing the system losses and the system performance sensitivities relating dependent and control variables. The proposed algorithm has been evaluated with the IEEE 6-bus and IEEE 30-bus systems.

1. 서 론

대규모 전력계통의 합리적인 운영이라는 측면에서 경제운전(economic operation)의 중요성에 대한 관심은 더욱 높아지고 있다. 특히 수백 메가와트([MW]) 단위로 운전되는 대 전력 설비의 합리적인 운영을 통한 계통의 송전손실 경감은 경제운전 분야의 주관심사가 되고 있다. 기존의 무효전력 최적배분(ORPD)에 관한 연구는 주로 수치해법에 기반한 선형계획법(LP)[1,2], 비선형 계획법(NLP)과 확률적 탐색방법에 기반한 AI기법[3] 등이 주를 이루고 있다. 특히 선형계획법 기반의 알고리즘은 실시간 운용에의 적용가능성이 높기 때문에 비교적 다양한 연구가 진행되어 왔다.

본 논문에서는 ORPD 문제에 이러한 선형계획법을 적용하였으며, 수정된 민감도 기법을 기반으로 하는 새로운 알고리즘을 제안하였다. 제안된 방법은 상태변수와 제어변수의 정밀한 민감도를 기반으로 하는 방법과 새로운 자료비판의 변화식을 기반으로 조류계산의 반복수행을 배제하는 민감도 구성 방법 등이다. 제안된 알고리즘은 IEEE 6보선과 IEEE 30보선에 적용하여 효율성을 제시하였다.

2. 문제의 정식화

본 연구에서는 ORPD 문제를 정식화함에 있어 발전보선의 전압크기, 변압기 텁, 각 보선의 무효전력 보상량을 제어변수로 선택하였으며 부하보선의 전압크기, 발전보선의 무효전력 크기를 상태변수로 취급하여 다음과 같은 최적화 문제(optimization problem)로 정식화하였다.

2.1 목적함수

본 연구의 목적함수는 식(1)과 같이 전체 계통의 송전 손실을 최소화하도록 하였다.

$$\min P_{loss} = \sum_{i,j \in N_E} G_{ij}(V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos \theta_{ij}) \quad (1)$$

여기서,

N_E : 계통내 모든 선로의 집합

2.2 제약조건

1) 등호제약조건 (Equality constraint)

$$\begin{aligned} \Delta P_i &= P_{Gi} - P_{Li} \\ -V_i \sum V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) &= 0, \quad i \in N-1 \\ \Delta Q_i &= Q_{Gi} - Q_{Li} \\ -V_i \sum V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) &= 0, \quad i \in N_L \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,

P_{Gi} , Q_{Gi}	: 모선i의 유효 및 무효전력 발전
P_{Li} , Q_{Li}	: 모선i의 유효 및 무효전력 부하
G_{ij} , B_{ij}	: 모선 i,j 간 커넥턴스 및 셜던스
V_i	: 모선i의 전압크기
$N-1$: 슬랙을 제외한 모선집합
N_L	: 부하모선 집합

2) 부등호 제약 조건 (Inequality constraint)

최적화 문제를 위한 제어변수(U) 및 상태변수(X)는 각각에 대하여 다음과 같은 한계영역을 갖게된다.

$$(U, X)^{\min} \leq V_{Gi}, t_{ij}, Q_{ci}, V_{Li}, Q_{Gi} \leq (U, X)^{\max} \quad (3)$$

여기서,

V_{Gi}	: 발전보선i의 전압크기
t_{ij}	: 모선ij간의 변압기 텁 설정값
Q_{ci}	: 모선i의 무효전력 보상량
V_{Li}	: 부하보선i의 전압크기
Q_{Gi}	: 모선i의 무효전력 발전

3. 선형계획법을 이용한 최적화

3.1 선형계획법을 이용한 ORPD 문제의 정식화

전력계통의 무효전력 재배분 문제는 계통 전압을 허용 범위 내로 유지시킴과 동시에 계통 내의 손실을 감소시켜 계통의 전력 손실 경감에 따른 계통의 운전비용을 최소화하는 문제이다. ORPD의 목적함수 및 제약조건 등은 전형적인 비선형 문제에 해당되며, 확실성(certainty)과 선형성(linearity) 등의 조건을 요구하는 선형계획법 기반의 알고리즘을 적용하기 위해서는 적절한 선형근사화 기법을 사용해야 한다. 본 논문에서는 이러한 선형근사화 기법으로 테일러 급수의 1 차 근사화 기법을 사용하였으며, 이에 따른 목적함수와 제약조건에 대한 선형 정식화 형태는 식(4),(5)에 각각 나타내었다. 다음 식에 표현된 민감도 행렬은 본 논문에서 제안된 수정된 민감도 계산방법 (I), (II)를 이용하여 계산된다.

본문 전체에서 표현되는 $S_{a,b}$ 의 의미는 특정 벡터 b 에 대한 특정 벡터 a 의 민감도 행렬을 의미하며, "0"과 "I"는 각각 영행렬(null matrix)과 단위행렬(unit matrix)을 의미한다.

$$\min \Delta P_L = \begin{bmatrix} S_{P_L, V_G} & S_{P_L, I_c} & S_{P_L, Q_c} \end{bmatrix}$$

$$U_j = \begin{cases} U_{step}, & \text{if } (S_{P_L, U} < 0) \\ -U_{step}, & \text{if } (S_{P_L, U} > 0) \end{cases}$$

U_{step} : 제어변수의 이동 한계(move limit)

$$\begin{array}{c} \Delta Q_G^{\min} \\ \Delta V_L^{\min} \\ \Delta V_G^{\min} \\ \Delta t_{ij}^{\min} \\ \Delta Q_c^{\min} \end{array} \leq \begin{array}{c} S_{Q_G, V_G} & S_{Q_G, I_c} & S_{Q_G, Q_c} \\ S_{V_L, V_G} & S_{V_L, I_c} & S_{V_L, Q_c} \\ \hline & I & \end{array} \leq \begin{array}{c} \Delta V_G \\ \Delta t_{ij} \\ \Delta Q_c \\ \Delta V_G^{\max} \\ \Delta t_{ij}^{\max} \\ \Delta Q_c^{\max} \end{array}$$

(4)

단계 2 : 새로운 제어변수 U^{new} 에 대하여 조류계산을 수행하고 모든 상태변수의 변화량 (ΔX)을 식(7)과 같이 구한다.

$$\Delta X = X^{new} - X^{old} \quad (7)$$

단계 3 : 선택한 제어변수에 대한 모든 상태변수의 민감도를 식(8)과 같이 구한다.

$$S_{X_i, U} = \begin{cases} \frac{\Delta X}{\Delta U}, & \text{if } (S_{P_L, U} < 0) \\ -\frac{\Delta X}{\Delta U}, & \text{if } (S_{P_L, U} > 0) \end{cases} \quad (8)$$

단계 4 : 단계 1에서 선택한 제어변수를 다시 초기 운전점의 상태로 초기화한 후에 선택하지 않은 새로운 제어변수를 선택하여 단계 1,2,3을 반복해서 수행한다.

단계 5 : 단계 1,2,3,4의 과정을 통하여 계산한 민감도를 이용하여 식(4),(5)와 같이 선형정식화 한다.

3.3 민감도 계산 방법(II)에 의한 선형정식화

민감도 계산 방법(I)은 기존의 선형근사화 기법에 비하여 개선된 해의 탐색이 가능하지만, 모든 제어변수에 대한 민감도를 구성하기 위해서는 전력조류계산의 수행횟수가 많아지는 단점이 있다. 이러한 과다한 계산시간의 단점을 보완하기 위하여 민감도 계산 방법(II)에서는 비교적 개선된 해의 탐색이 가능하며, 신속한 수렴시간을 보장할 수 있는 기법을 제안하였다.

(1) 자코비안의 변화식

제안된 방법(II)은 조류계산을 수행하지 않으면서 변화된 제어변수에 대한 상태변수의 감도를 계산하는 방법이다. 일반적으로 기존의 순차 선형계획법 기반의 ORPD 연구에서는 LP 알고리즘에 의한 목적함수의 결과가 제어변수의 상태변화로 기인되는 계통의 새로운 운전점에서 균사 목적함수에 해당한다는 가정을 기반으로 하고 있다. 본 방법(II)에서도 이와 같은 가정을 기반으로 하고 있으며, 새로운 계통상태의 자코비안 행렬을 구성하기 위하여 다음 식(9)같이 제어변수의 변화량에 따른 자코비안 (J)의 감도를 이용하는 자코비안의 변화식을 사용하였다.

$$J^{(i+1)} = J^{(i)} + \Delta J \quad (9)$$

여기서,

$$\Delta J_{11} = \frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)$$

$$\Delta J_{12} = \frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)$$

$$\Delta J_{21} = \frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta} \right)$$

$$\Delta J_{22} = \frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{\partial Q}{\partial V} \right)$$

(2) 민감도 행렬의 구성

민감도 행렬을 구성하기 위하여 자코비안의 변화식(9)의 역행렬을 이용하여 다음과 같이 $\Delta P_{N-1}, \Delta Q_L$ 에 대한 $\Delta \theta_{N-1}, \Delta V_L$ 의 관계식을 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta_{N-1} \\ \Delta V_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{-1} \\ \Delta V_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_{N-1} \\ \Delta Q_L \end{bmatrix} \quad (10)$$

3.2 민감도 계산 방법(I)에 의한 선형정식화

ORPD 문제는 비선형 문제이므로 제어변수와 상태변수와의 민감도를 계산하기 위해서는 선형근사화를 위한 몇 가지의 가정과 오차를 수반하게 된다. 민감도 계산 방법(I)은 초기 운전점과 미소 변화된 임의의 운전점을 연결하는 기울기를 이용하는 방법이며 이를 ORPD 문제에 적용하였다. 그림1은 민감도 방향의 선택 방법에 대한 수학적 의미를 도식화하여 보여주고 있다.

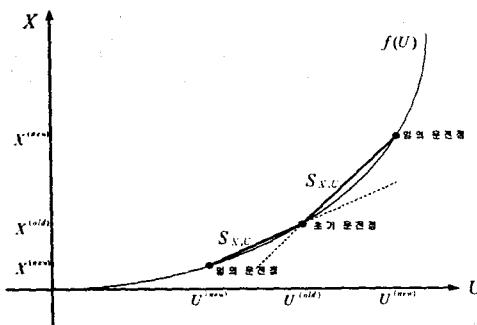


그림 1 민감도 계산 방법(I)의 도식화

Fig. 1 Representation of sensitivity valuation method I

그림의 표현식에서,

$$\Delta U = [\Delta V_G, \Delta t_{ij}, \Delta Q_c]$$

$$\Delta X = [\Delta P_L, \Delta V_L, \Delta Q_c]$$

단계 1 : 선형화 과정의 오차를 최소화하고 제어변수에 대한 정밀한 민감도를 결정하기 위하여 초기 운전점에서 임의의 제어변수 i 를 선택하고, 민감도 방향의 선택방법에 기반하여 식(6)과 같이 결정되며, 이를 전방향감도(forward sensitivity) 선택방법이라고 할 수 있다.

$$U^{new} = \begin{cases} U^{old}, & \text{if } U^{min} < U^{old} < U^{max} \\ U^{min}, & \text{if } U^{min} \geq U^{old} \\ U^{max}, & \text{if } U^{max} \leq U^{old} \end{cases} \quad (6)$$

여기서,

$$U^{old} = U^{old} + U_f$$

식(10)에서 ΔP_{N-1} , ΔQ_L 는 제어변수(ΔV_G , Δt_{ij} , ΔQ_c)와의 관계식인 식(11)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Delta P_{N-1} \\ \Delta Q_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial P}{\partial V_G} & -\frac{\partial P}{\partial t_{ij}} & 0 \\ -\frac{\partial Q}{\partial V_G} & -\frac{\partial Q}{\partial t_{ij}} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_G \\ \Delta t_{ij} \\ \Delta Q_c \end{bmatrix} \quad (11)$$

식(10)과 식(11)를 이용하여 $\Delta \theta_{N-1}$, ΔV_L 와 제어변수에 대한 관계식을 식(13)처럼 표현할 수 있다. 이를 통하여 제어변수에 대한 부하전압의 민감도 계수 S_{V_L, V_G} , $S_{V_L, t_{ij}}$, S_{V_L, Q_c} 를 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta_{N-1} \\ \Delta V_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\theta, V_G} & S_{\theta, t_{ij}} & S_{\theta, Q_c} \\ S_{V_L, V_G} & S_{V_L, t_{ij}} & S_{V_L, Q_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_G \\ \Delta t_{ij} \\ \Delta Q_c \end{bmatrix} \quad (12)$$

다음으로 제어변수에 대한 나머지 상태변수의 민감도를 정식화한다. 이를 위하여 먼저 ΔQ_G , ΔP_L 과 ΔV_G , $\Delta \theta_{N-1}$, ΔV_L 의 관계식을 식(13)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_G \\ \Delta P_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_G}{\partial V_G} & \frac{\partial Q_G}{\partial \theta} & \frac{\partial Q_G}{\partial V_L} \\ \frac{\partial P_L}{\partial V_G} & \frac{\partial P_L}{\partial \theta} & \frac{\partial P_L}{\partial V_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_G \\ \Delta \theta_{N-1} \\ \Delta V_L \end{bmatrix} \quad (13)$$

식(13)과 식(14)를 이용하여 식(15)를 계산하고, 최종적인 제어변수에 관한 나머지 상태변수의 민감도를 식(15)과 같이 표현할 수 있다. 식(15)에서 S_{Q_G, V_G} , $S_{Q_G, t_{ij}}$, S_{Q_G, Q_c} , S_{P_L, V_G} , $S_{P_L, t_{ij}}$, S_{P_L, Q_c} 를 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_G \\ \Delta P_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_G}{\partial V_G} & \frac{\partial Q_G}{\partial \theta} & \frac{\partial Q_G}{\partial V_L} \\ \frac{\partial P_L}{\partial V_G} & \frac{\partial P_L}{\partial \theta} & \frac{\partial P_L}{\partial V_L} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ S_{\theta, V_G} & S_{\theta, t_{ij}} & S_{\theta, Q_c} \\ S_{V_L, V_G} & S_{V_L, t_{ij}} & S_{V_L, Q_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_G \\ \Delta t_{ij} \\ \Delta Q_c \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_G \\ \Delta P_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{Q_G, V_G} & S_{Q_G, t_{ij}} & S_{Q_G, Q_c} \\ S_{P_L, V_G} & S_{P_L, t_{ij}} & S_{P_L, Q_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_G \\ \Delta t_{ij} \\ \Delta Q_c \end{bmatrix} \quad (15)$$

최종적으로 식(12), (15)에서 구한 민감도를 이용하여 식(4), (5)와 같이 선형정식화 한다.

(3) 제어변수의 변화량

방법(II)에서 사용되는 제어변수의 변화량은 기본적으로 제어변수의 변화량 한계(U_{step})를 기반으로 다음과 같은 수식으로 특정 운전점에서의 변화량이 결정되도록 하였다.

$$U_x \leq \Delta U \leq U_k \quad (16)$$

여기서

$$\Delta U^{\min} = U^{\min} - U, \quad \Delta U^{\max} = U^{\max} - U$$

$$U_x = \begin{cases} \Delta U^{\min}, & \text{if } (\Delta U^{\min} > U_{step}) \\ -U_{step}, & \text{if } (\Delta U^{\min} < -U_{step}) \end{cases}$$

$$U_k = \begin{cases} \Delta U^{\max}, & \text{if } (\Delta U^{\max} < U_{step}) \\ U_{step}, & \text{if } (\Delta U^{\max} > U_{step}) \end{cases}$$

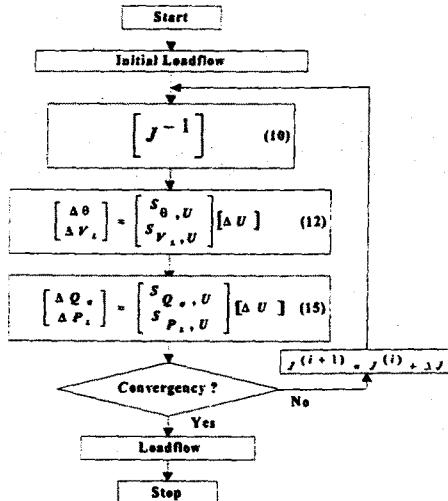


그림 2. 제안방법(II)의 흐름도

Fig. 2 Flowchart of the proposed method II

4. 사례연구

본 논문에서는 제안된 알고리즘의 효용성을 검증하기 위하여 IEEE 6모선[1]과 IEEE 30모선[4] 계통에서 사례연구를 수행하였다. ORPD의 수행방법은 민감도 계산 방법(I)에 의한 경우는 “방법(I)”로 표현하였고, 민감도 계산 방법(II)에 의한 경우는 “방법(II)”로 표현하였다.

4.1 민감도 선택방향에 따른 수렴특성의 비교

방법(I)에서는 선택한 제어변수를 임의의 운전점으로 변화시킬 때, 손실 민감도에 따른 식(6)의 방법을 사용하였다. 본 논문에서 제안된 민감도 선택방향의 타당성을 검증하기 위하여 식(6)의 방법과 반대로 민감도 방향을 선택하는 경우를 후방향 감도(backward sensitivity)로 정의하여 이를 양자를 비교하였다. 사례연구의 U_{step} 은 $V_G : 0.01$, $t_{ij} : 0.02$, Q_c : 제한없음 등으로 설정하였다. 결과를 통하여 식(6)을 사용하는 경우의 수렴특성이 우수함을 확인할 수 있었다.

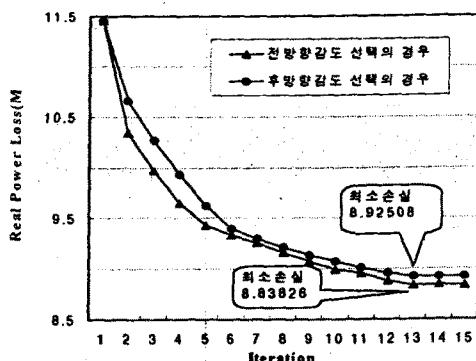


그림 3. 민감도 선택에 따른 수렴특성

Fig. 3. Convergency by sensitivity selection

4.2 IEEE 6모선의 사례연구 결과

제안된 방법(I)의 효용성을 검증하기 위하여 참고문헌[1]의 결과와 비교하였다. 동일한 조건의 결과비교를 위하여 참고문헌[4]과 동일한 U_{step} ($V_G : 0.025$, $t_{ij} : 0.05$, Q_c : 제한없음)와 제약변수의 한계영역(표 1)을 사용하였으며, 시뮬레이션 결과는 표 2에서 보여주고 있다. 다만, 방법(II)은 동일한 U_{step} 에서의 비교는 생략하였다.

표 1 6모선 계통의 제약변수 한계영역

Table 1 Limit value for constrained variable

	V_1	V_2	t_{ij}	Q_1	Q_6	V_L	Q_G
min	1.00	1.10	0.90	0.00	0.00	0.90	20.0
max	1.10	1.15	1.10	5.00	5.50	1.00	100

표 2 제안한 방법과 기존 연구의 결과 비교

Table 2 Result comparison of study case

iteration	기존연구[1]	방법(I)
초기상태	11.45	11.45
1	12.03	9.66
2	11.25	8.97
3	10.50	8.85
4	9.88	9.12
5	9.39	8.86
6	9.26	9.25
7	8.97	8.87
8	8.99	9.07
9	8.93	8.87
10	8.99	
11	8.93	

선형계획법을 사용하는 비선형 최적화 문제에서는 U_{step} 의 크기 결정이 최적해 탐색에 많은 영향을 주고 있다. 본 논문에서는 다양한 U_{step} 의 크기로 시뮬레이션을 수행하였으며 매우 적은 step size를 사용하여 많은 반복을 수행하게 되면 거의 비슷한 최적해를 탐색하는 것을 확인할 수 있었다. 따라서 본 논문에서는 비교적 적은 반복횟수와 최적해 수렴특성을 보장할 수 있는 적절한 범위의 U_{step} 을 $V_G : 0.001$, $t_{ij} : 0.002$, $Q_c : 0.5$ 등으로 선택하였다. IEEE 6모선 계통의 최종 수렴결과의 비교는 다음과 같다.

표 3 6모선 계통의 시뮬레이션 결과

Table 3 Simulation result of 6 bus system

변수	초기 상태	ORPD 결과	
		방법 I	방법 II
변압기 템	$t_{6,5}$	1.025	0.947
	$t_{4,3}$	1.100	0.982
발전모선 전압	V_1	1.050	1.095
	V_2	1.100	1.135
무효전력원 [MVar]	Q_4	0.000	5.000
	Q_6	0.000	5.500
발전기 무효전력	Q_1	37.070	37.460
	Q_2	34.280	15.164
부하모선 전압	V_3	0.858	1.000
	V_4	0.955	1.000
	V_5	0.902	1.000
	V_6	0.935	0.980
계통 손실[MW]	11.45	8.834	8.834
시간[sec]		0.29	0.09

4.3 IEEE 30모선의 ORPD 결과

IEEE 30모선의 사례연구를 위한 U_{step} 은 $V_G : 0.0005$, $t_{ij} : 0.0015$, $Q_c : 0.5$ 등을 사용하였다. 표 4는 시뮬레이션 수행에 사용된 30모선 계통의 제약변수 한계 영역을 나타내고 있으며, 표 5는 30모선 계통의 시뮬레이션 수행 결과를 나타내고 있다. IEEE 30모선의 결과로부터 제안 방법(I)은 정밀한 최적해를 탐

색하고 있는 반면 알고리즘의 수행시간이 지연되는 단점이 있으며, 이에 반하여 방법(II)의 결과는 비교적 정밀한 최적해 탐색 능력과 신속한 알고리즘의 수렴특성을 확인할 수 있다.

표 4 30모선 계통의 제약변수 한계영역

Table 4 Limit value for constrained variable

	V_L	V_G	t_{ij}	$Q_c[\text{Mvar}]$
min	0.95	0.9	0.95	10.00
max	1.05	1.1	1.05	30.00

표 5 30모선 계통의 ORPD 결과

Table 5 ORPD result of 30 bus system

변수	초기 상태	ORPD 결과	
		방법(I)	방법(II)
변압기 템	$t_{6,9}$	1.0155	1.0253
	$t_{6,10}$	0.9629	0.9500
	$t_{1,12}$	1.0129	0.9779
	$t_{28,27}$	0.9581	0.9685
발전모선 전압	V_1	1.0500	1.0758
	V_2	1.0338	1.0607
	V_5	1.0058	1.0323
	V_8	1.0230	1.0408
	V_{11}	1.0913	1.0904
	V_{13}	1.0883	1.0594
무효전력원	Q_{10}	0.0000	8.1891
[MVar]	Q_{24}	0.0000	7.5479
특정 부하모선 전압	V_3	1.0334	1.0500
	V_9	1.0459	1.0500
	V_{12}	1.0478	1.0500
계통 손실[MW]		7.1110	6.7586
시간[sec]			15.15
			1.38

5. 결론

본 논문에서는 수정된 면감도 기법을 적용하여 전력계통의 무효전력 최적 배분 문제를 위한 새로운 알고리즘을 제안하였다. 제안된 방법(I)은 기존의 선형계획법 기반의 논문에서 보였던 선형 균사화 과정의 오차를 최소화 할 수 있는 방법으로 제안되었으며, 기존 연구와의 비교를 통하여 최적해 탐색 능력이 향상되었음을 검증하였다. 제안된 방법(II)에서는 방법(I)에서 보이는 조류 계산의 반복수행에 따른 과다한 계산시간의 단점을 효과적으로 해결하면서, 유사한 최적해 탐색능력을 유지함을 확인하였다. 제안된 알고리즘은 IEEE 시험모선에서 그 효용성을 입증하였다. 향후 대규모 계통의 적용을 통하여 알고리즘의 신뢰성을 향상 할 것이다.

[참고문헌]

- K. R. C. Mamandur, R. D. Chenoweth, "Optimal Control of Reactive Power Flow for Improvements in Voltage Profiles and for Real Power Loss Minimization", IEEE Transactions on PAS, Vol. PAS-100, NO. 7, July, 1981
- E. Hobson, "Network Constrained Reactive Power Control Using Linear Programming", Paper F79 214-8 presented at the 1979 IEEE Power Engineering Society Winter Meeting, New York, New York
- Byung-Seop Kim, Myung-Suk Chae, Joong-Rin Shin, "Optimal Reactive Power Dispatch based on Genetic Algorithm with Voltage Dependent Load Models.", International Conference(ICEE) Proceeding, Vol. 1, pp.167~170, Kyongju, Korea, July 21~25, 1998.
- M. A. Pai, "Computer Techniques in Power System Analysis" McGraw-Hill pp. 210~212