

회전관성과 전단변형을 고려한 드럼-브레이크 패드의 동적안정성

오부진*, 공용식(한밭대 대학원 기계공학부), 류봉조(한밭대 기계공학부),
이규섭((주)정상테크노), 임경빈(동양공업대학 기계과)

Dynamic Stability of a Drum-Brake Pad Considering Rotary Inertia and Shear Deformation

B. J. Oh, Y. S. Kong(Graduate School, HBNU), B. J. Ryu(Mech. Eng. Dept., HBNU),
G. S. Lee (JungSang Techno Co.) and K. B. Yin(Mech. Eng. Dept., DYTC)

ABSTRACT

This paper deals with the dynamic stability of a disc brake pad taking into account of its shear deformation and rotary inertia. A brake pad can be modeled as a beam like model subjected to distributed friction forces and having two translational springs. The study of this model is intended to provide a fundamental understanding of dynamic stability of drum brake pad. Governing equations of motion are derived from extended Hamilton's principle and their corresponding numerical solutions are obtained by applying the finite element formulation. The critical distributed friction force and the instability types are investigated by changing two translational spring constants, rotary inertia parameter and shear deformation parameter. Also, the changes of eigen-frequencies of a beam determining instability types are investigated for various combinations of two translational spring constants.

Key Words : Dynamic Instability(동적 불안정), Drum Brake Pad(드럼-브레이크 패드), Distributed Friction Force(분포마찰력), Finite Element Method(유한요소법)

1. 서론

브레이크는 건성 마찰(dry friction)을 이용하여 제동력을 얻는 기계장치로써, 자동차 등의 제동시에 브레이크 시스템에 발생하는 노이즈(noise)는 마찰력에 의한 불안정 진동현상으로 일컬어진다.

일반적으로 회전하는 디스크의 가진하에 있는 디스크 또는 드럼 브레이크 패드의 진동을 지배하는 운동방정식은 분포마찰력이 주어지는 보 모델의 운동방정식과 같은 것으로 알려져 왔다^[1-2].

Leipholz^[3]는 4개의 다양한 경계조건을 갖고, 분포 마찰력에 의해 분포종동력이 가해지는 기동 모델에 대한 동적안정성과 임계 분포마찰력 값을 구하였다. 분포종동력이 주어지는 보의 동적안정성에

관한 위의 연구들은 그 대상 보 모델이 직접 디스크-브레이크 패드에 관한 것은 아니었으나 디스크-브레이크와 관련된 실험적 연구^[4]에서 브레이크 패드와 이 패드의 경계조건이 브레이크 소음발생에 매우 중요하게 작용된다는 것이 밝혀진 이유 때문에 패드의 스트립(strip of pad)을 다양한 경계조건을 갖는 보 모델로 간주한 연구들이 이루어졌다.

이상의 연구들은 주로 디스크 또는 드럼-브레이크 패드를 세장비가 비교적 큰 Euler-Bernoulli보로 간주한 연구들이었으나, 이러한 연구들과 병행하여, 회전관성과 전단변형 효과를 고려한 보 모델에 대한 연구도 이루어져 왔다^[5].

최근 Kang과 Tan^[6]은 브레이크 패드에 주어지는 마찰력을 맥동 분포종동력으로 간주하여, 다양한

경계조건을 갖는 보 모델의 맥동 불안정(parametric instability)을 Galerkin방법을 이용하여 연구하였다.

본 연구에서는 드럼-브레이크 시스템에 있어서 caliper와 지지 브래킷(bracket) 등을 병진 스프링 지지되어 있는 것으로 간주하여, 회전관성과 전단 변형을 고려한 균일 분포마찰력을 받는 탄성지지된 보의 동적안정성을 연구하는데 그 목적이 있다.

2. 이론 해석

2.1 수학적 모델

균일한 분포 마찰력을 받으며, 양단 병진 스프링에 의해 지지된 드럼-브레이크 패드계에 대한 개략도는 Fig. 1과 같고, 이에 대한 수학적 모델은 Fig. 2와 같다.

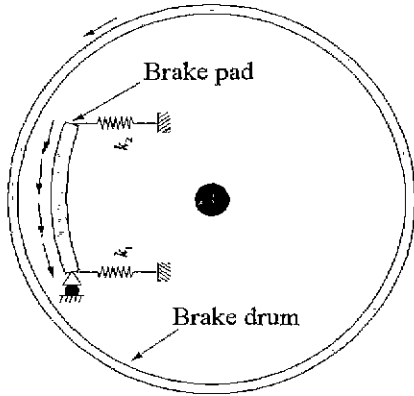


Fig. 1 A schematic diagram for a drum-brake pad system.

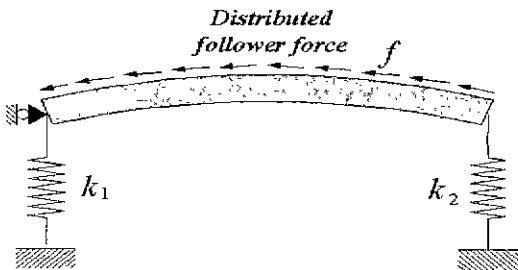


Fig. 2 A mathematical model.

2.2 지배방정식

Fig. 2의 수학적 모델에 대한 운동에너지 T 와 탄성포텐셜 에너지 V 는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + kAG \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \phi \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} k_1 y^2(0, t) + \frac{1}{2} k_2 y^2(L, t) \quad (2)$$

식(1-2)에서 ρ 는 보의 밀도, A 는 보의 횡단면적, ϕ 는 보의 굽힘기울기, y 는 보의 횡방향 변위, E 는 영률, I 는 단면의 2차 모멘트, k 는 전단 계수, G 는 전단탄성계수, k_1 와 k_2 는 각각 좌단과 우단의 병진 스프링 상수를 나타낸다.

Fig. 2의 마찰력은 비보존력으로써, 보존성분에 의한 일과 비보존성분에 의한 가상일로 분력화 될 때, 각각의 성분에 의해 하연진 일은 다음과 같다.

$$W_C = \frac{1}{2} \int_0^L f(L-x) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3)$$

$$\delta W_{NC} = -f \int_0^L \phi \delta y dx \quad (4)$$

여기서, f 는 단위길이당 분포마찰력을 나타낸다. 식(1)에서 (4)를 확장된 해밀톤 원리에 대입하고 변분을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \delta y + \rho I \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \delta \phi + EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + kAG \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \phi \right) \delta \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \phi \right) \right\} - f(L-x) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) + f \phi \delta y \right\} \right] dx + k_1 y(0, t) \delta y(0, t) + k_2 y(L, t) \delta y(L, t) = 0 \quad (5)$$

2.3 유한요소해석

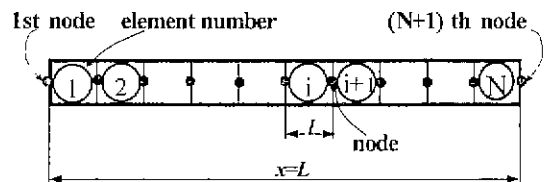


Fig. 3 A finite element model.

식(5)에 대한 이산화된 식의 도출을위해 Fig. 3

과 같이 보요소를 길이 l 인 N 개의 유한요소로 분할한다.

계산상의 편의를 위해 다음과 같은 무차원화된 좌표들

$$\eta = \frac{y}{l}, \quad x' = x - (i-1)l, \quad \xi = \frac{x'}{l} \quad (6)$$

을 이용하고, 해를

$$\eta(\xi, t) = \eta(\xi)e^{i\omega t}, \quad \phi(\xi, t) = \phi(\xi)e^{i\omega t} \quad (7)$$

와 같이 가정하면 다음과 같은 이산화된 지배방정식으로 변환된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left[-\frac{\Omega^2}{N^4} \eta(\xi)^{(i)} \delta \eta(\xi)^{(i)} - \frac{\Omega^2 R}{N^2} \phi(\xi)^{(i)} \right. \\ & \delta \phi(\xi)^{(i)} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^{(i)} \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^{(i)} + \frac{S}{N^2} \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^{(i)} \right. \\ & \left. - \phi^{(i)} \right\} \delta \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^{(i)} - \phi^{(i)} \right\} + \frac{F}{N^3} \phi^{(i)} \delta \eta^{(i)} - \frac{F}{N^3} \\ & \left. \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^{(i)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^{(i)} \right] + \frac{K_1}{N^3} \eta(0)^{(1)} \delta \eta(0)^{(1)} \\ & + \frac{K_2}{N^3} \eta(1)^{(N)} \delta \eta(1)^{(N)} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

식(8)에서 무차원화된 파라메타들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{\frac{\rho A L^4 \omega^2}{EI}}, \quad R = \frac{I}{AL^2}, \quad S = \frac{k A G L^2}{EI}, \\ F &= \frac{f L^3}{EI}, \quad K_1 = \frac{k_1 L^3}{EI}, \quad K_2 = \frac{k_2 L^3}{EI} \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)에서 Ω 는 무차원화된 진동수 파라메타, R 과 S 는 각각 보의 회전관성 및 전단변형 파라메타, F 는 분포마찰력 파라메타, K_1 과 K_2 는 각각 보의 좌단과 우단의 무차원화된 스프링 상수를 나타낸다

이제 식(8)을 N 개의 요소에 대해 조합하면 다음과 같은 고유치 방정식으로 귀결된다.

$$[[K] - \Omega^2[M]]\{U\} = \{0\} \quad (10)$$

3. 수치해석 결과 및 검토

일반적으로 보의 회전관성이나 전단변형을 고려

하지 않은 비교적 세장비가 큰 보 모델은 본 논문에서 제시된 지배방정식에 있어, 이론적으로는 보의 전단변형 파라미터 S 값이 무한대로, 보의 회전관성 파라미터 R 값이 영(zero)으로 근접할때를 일컫는다. 또한, $S=10^6$ 이상값에서는 S 값의 변화가 임계분포 마찰력값의 변화에 미치는 영향이 거의 없었으므로 $R=0.0$, $S=10^6$ 의 조건은 충분히 Euler-Bernoulli보 모델의 조건으로 타당하다. 한편, 본 논문에서 가정된 보의 보의 전단변형과 회전관성을 고려한 Timoshenko보 모델로써 보의 회전관성 파라미터 R 값이 $R=0.01$, 보의 전단변형 파라미터 S 값이 $S=32.05$, 프와송 비 $\nu=0.3$, 보의 전단계수 k 값이 $k=0.833$ 인 입력 값을 사용하였다.

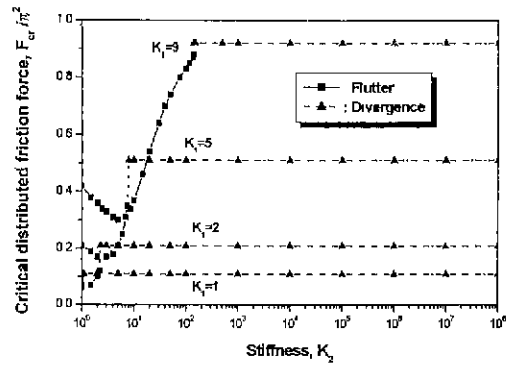


Fig. 4 Instability transitions depending on the spring stiffness($K_1 = 1, 2, 5, 9$ and K_2).

Fig. 4는 보의 좌측단의 스프링 상수값이 $K_1=1, 2, 5, 9$ 의 고정된 값에 대해 우측단의 스프링 상수값 K_2 의 변화에 따른 불안정 형태와 임계분포 마찰력 값을 나타낸 그림이다. 이 경우 각각의 K_1 스프링 상수값에 대해 K_2 의 어떤 특정값에서 플러터 불안정으로부터 발산형 불안정으로의 천이가 일어남을 알 수 있으며, K_1 값이 증가됨에 따라 더 큰 K_2 의 값에서 플러터로부터 발산형으로 불안정 형태의 천이가 일어남을 알 수 있다.

Fig. 5는 $K_1=10, 12, 28$ 에 대해 우측단 스프링 상수 K_2 의 변화에 따른 불안정 형태와 임계분포 마찰력값을 나타낸다. 이 경우는 K_2 의 어떤 변화에 대해서도 항상 플러터 형태의 불안정만 일어남을 알 수 있고, K_2 값이 $K_2 \geq 10^3$ 에서는 임계분포 마찰력값의 변화가 거의 없음을 알 수 있다.

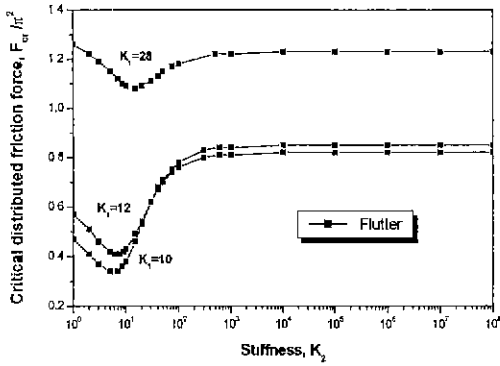


Fig. 5 Instability transitions depending on the spring stiffness($K_1 = 10, 12, 28$ and K_2).

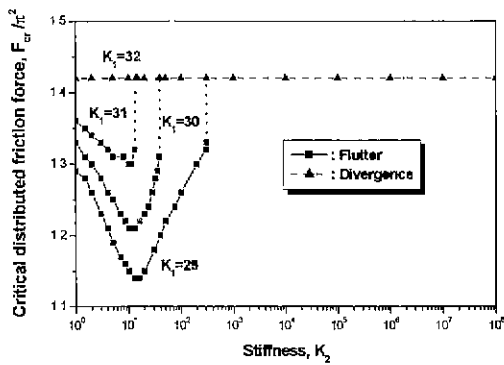


Fig. 6 Instability transitions depending on the spring stiffness($K_1 = 29, 30, 31, 32$ and K_2).

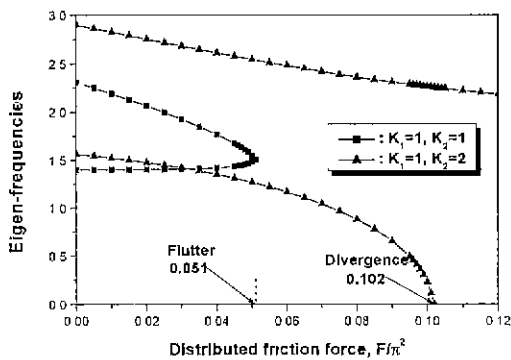


Fig. 7 Variations of eigen-frequencies with spring stiffness($K_1 = 1$; $K_2 = 1$ and 2).

Fig. 6은 $K_1=29, 30, 31, 32$ 일 때, K_2 값의 변화에 따른 불안정 형태와 임계분포 마찰력값을 보여준다. $29 \leq K_1 \leq 31$ 에 있어서는 K_2 의 증가와 함께

불안정 형태가 플러터 형태에서 발산형으로 천이되지만, $K_1=32$ 에서는 오로지 발산형태의 불안정만이 일어남을 알 수 있다. 또한, 불안정 천이가 일어나는 스프링 상수값 $29 \leq K_1 \leq 31$ 에 있어서, K_1 값이 증가할수록 불안정 형태의 천이점은 Fig. 4에서와는 달리 더 낮은 K_2 값에서 나타남을 알 수 있다.

Fig. 7은 $K_1=1$ 일 때 K_2 값이 각각 $K_2=1, K_2=2$ 인 경우에 대해 분포마찰력값의 변화에 따른 고유치 변화를 상세히 나타낸 그림이다. 이 그림을 통하여 K_2 값의 미소한 변화에 대해서도 불안정 형태가 천이되는 것을 알 수 있다.

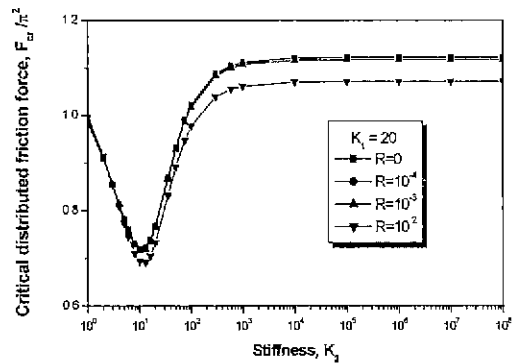


Fig. 8 Critical distributed friction force depending on the rotary inertia parameter.

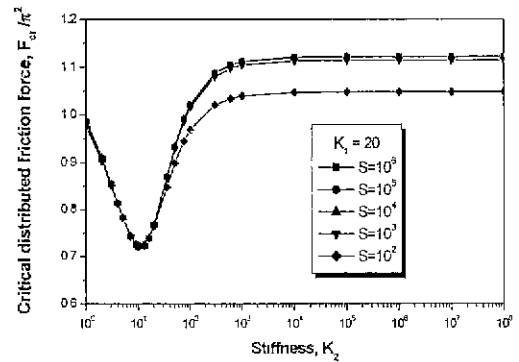


Fig. 9 Critical distributed friction force depending on the shear deformation parameter.

Fig. 8은 보의 전단변형 파라미터 S 값이 $S=10^6$, 보의 좌단 스프링 상수값 $K_1=20$ 일 때, 보의 회전관성 파라미터 R 값과 K_2 스프링 상수값 변화에 따른 임계분포 마찰력 값의 변화를 나타낸 그

림이다. 이 경우 R 값이 $R \leq 10^{-3}$ 에 있어서는 K_2 값의 변화에 대해 임계분포 마찰력 값의 변화가 거의 없음을 알 수 있고, 어떤 R 값에 대해서도 $K_2 \geq 10^5$ 에서는 K_2 값의 변화에 따른 임계분포 마찰력 값의 변화는 없음을 알 수 있다.

Fig. 9는 스프링 상수 $K_1=20$, 보의 회전관성 파라미터 값이 $R=0.0$ 인 상태에서, 보의 전단변형 파라미터 S 값과 보의 우단 스프링 상수 K_2 값의 변화에 따른 임계 분포마찰력 값의 변화를 나타낸 그림이다. 이 그림에서, 우선 S 값이 증가됨에 따라 임계분포 마찰력 값은 증가됨을 알 수 있고, $S \geq 10^3$ 에 있어서는 K_2 값의 변화에 대해 임계분포 마찰력 값의 변화가 거의 없음을 알 수 있다. 또한, K_2 가 $K_2 \geq 10^3$ 에 있어서는 K_2 값의 변화에 따른 임계분포 마찰력 값의 변화는 없음을 알 수 있다.

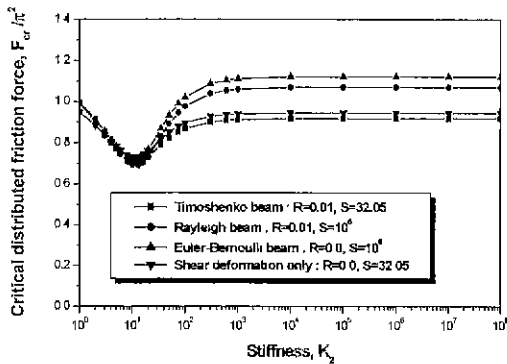


Fig. 10 Critical distributed friction force depending on the various kinds of beams.

Fig. 10은 $K_1=20$ 에 있어, K_2 값의 변화와 다양한 보의 종류에 따른 임계분포 마찰력 값의 변화를 보여준다. 이 경우, K_2 값이 $K_2 < 40$ 에 있어서는 K_2 값의 변화에 대해 임계분포 마찰력 값의 변화가 거의 없으나, $K_2 \geq 40$ 에 있어서는 K_2 값의 변화에 대해 Timoshenko보, 전단변형만을 고려한 보, Rayleigh보, Euler-Bernoulli보 순으로 임계분포 마찰력의 크기가 증가됨을 알 수 있다.

4. 결론

전단변형과 회전관성의 효과를 고려한 드럼-브레

이크 패드의 동적 안정성에 대한 수치해석 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 보의 전단변형 파라미터 S 값이 $S \geq 10^5$, 우단 스프링 상수 값 K_2 가 $K_2 \geq 10^5$ 에 있어서 S 값과 K_2 값의 변화가 임계분포 마찰력 값에 미치는 영향은 거의 없다.
2. 보의 회전관성 파라미터 R 값이 $R \leq 10^{-3}$, K_2 값이 $K_2 \geq 10^3$ 에 있어서 R 값과 K_2 값의 변화가 임계분포 마찰력 값에 미치는 영향은 거의 없다.
3. Timoshenko 보의 경우, 보의 좌단 스프링 상수 K_1 값이 $10 \leq K_1 \leq 28$ 에 있어서는 항상 플러터 형태의 불안정만이 발생되고, $K_1 < 10$, $29 \leq K_1 \leq 31$ 에서는 K_2 값의 증가와 함께 플러터 형태의 불안정에서 발산형태로의 천이가 일어난다. 한편, $K_1 \geq 32$ 에 있어서는 K_2 의 어떤 값에 대해서도 발산형태의 불안정만이 일어난다.

참고문헌

1. Leipholz, H. H. E., "On the Sufficiency of the Energy Criterion for the Stability of Certain Nonconservative Systems of the Follower-Load Type". ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 39, pp.717-722, 1972.
2. Leipholz, H. H. E., "Stability of Elastic Systems", Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1980.
3. Leipholz, H. H. E. "On Principles of Stationarity for Non-self-adjoint Rod Problems", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 59, pp.215-226, 1986.
4. Tan, C. A. and Kang, B., "A Study on the Root Causes of Disc Brake Squeal", Ford Motor Company Technical Report, No. TAN/TR-98-02, 1998
5. Ryu, B. J., Katayama, K. and Sugiyama, Y., "Dynamic Stability of Cantilevered Timoshenko Columns Subjected to Subtangential Forces", Computers and Structures, Vol. 68, pp.499-512, 1998.
6. Kang, B. and Tan, C. A., "Parametric Instability of a Leipholz Column under Periodic Excitation". Journal of Sound and Vibration. Vol. 229, pp 1097-1113, 2000.