

## CNC공작기계에 NURBS 보간 알고리즘 적용을 위한 시뮬레이션 분석

김태훈\*(영남대 대학원 기계공학과), 고태조, 김희술(영남대 기계공학과)

### Simulation Study for the Application of NURBS Interpolator

T. H. Kim (Dept. of Mech. Eng., Yeungnam Univ.), T. J. Ko (Dept. of Mech. Eng., Yeungnam Univ.),  
H. S. Kim (Dept. of Mech. Eng., Yeungnam Univ.)

#### ABSTRACT

In CNC machining, demands on precision machining of free formed surface model are increasing. Most of the CAD/CAM systems provide the NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline) interpolator. NURBS is defined with NURBS parameter by control point, weight value and knot value. This paper shows the realtime NURBS interpolation algorithms and compared with each other. One is based on the equal length of curve segments rather than equal increment of the parameter  $\Delta t$ . The other is to limit the interpolation error to any desired level by adjusting the feedrate considering the curvature of the shape and sampling time.

**Key Words** Free formed surface model(자유형상곡면모델), NURBS interpolator(NURBS 보간기), Machining Precision(가공 정밀도), curvature(곡률)

#### 1. 서론

CNC공작기계는 Mechatronics기술과 컴퓨터의 발달에 힘입어 고속, 고정도 가공과 다양하고 복잡한 기능을 가지게 되었다. 또한, 현재의 CNC에서의 자유 곡면 가공은 CAD/CAM 시스템에서 출력한 미소 직선의 연결 형식인 직선 보간(G01)이나 작은 원호들로 구성된 원호 보간(G02, G03)을 이용하여 가공경로를 생성한다. 이런 미소직선 근사시에는 tolerance(곡선과 근사직선과의 오차)를 지정하여 그 오차안에 들 때까지 직선(line segment)의 수를 감소 시킨다. 그러나, 이러한 방법은 CNC지령 자체에 형상오차가 포함되고 NC data의 방대화, 고속 전송프로그램의 필요, 가공면에 단을 발생, 긴 가공시간등의 문제점을 가져온다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 방법 중 한가지가 NURBS 방정식을 이용하는 것이다.

NURBS방정식은 Spline 곡선의 상위개념으로, 조점점(control point), 가중치(weight) 그리고 노트구간값(knot span value)을 이용하여 곡선이나 곡면을 모델링하는 방정식이며, 형상이 정해지지 않은 함수의 곡선이라고도 표현할 수 있다. NURBS 곡선은 다양

한 불규칙 곡선뿐만 아니라 직선, 곡은선(polyline), 원, 타원 등 규칙적인 곡선까지도 직은 수의 파라미터로 형상을 표현할 수 있는 장점을 가지며, 이런 장점으로 자유곡면 뿐만 아니라 해석적 곡면 등의 모델링을 완벽하게 해냄으로서 현재 사용하는 대부분의 CAD/CAM시스템은 NURBS모델을 지원하고 있다. CNC에 이러한 NURBS 곡선의 위치정보를 NURBS 파라미터들로 전달하면 가공 NC-data의 감소를 가져오고 그에 따른 고속의 프로그램 전송장치가 필요 없게 되어 가공 프로그램 해석기의 처리속도를 향상시키지 않고도 가공정밀도와 생산성을 높일 수 있다.

이에 본 논문에서는 NURBS 방정식을 사용해 제안된 알고리즘으로 그 각각의 보간법에 따라 시뮬레이션을 수행하여 실제 CNC공작기계에의 적용을 위한 성능을 비교하였다.

#### 2. NURBS 방정식

NURBS방정식이란 Non-Uniform Rational B-Spline 방정식을 의미하는데, B-Spline 곡선에서 매듭값

의 간격이 일정치 않을 때 유도되는 non-uniform B-spline 함수를 블렌딩함수로 사용한다는 점에서는 비균일 B-spline 곡선과 다른 점이 없다. 그러나 비균일 B-spline 곡선에서는 조정점의 x, y, z좌표를 각각 이들 블렌딩 함수로 섞어주면 되지만, NURBS곡선에서는 조정점을 동차좌표를 사용하여 각각을  $(x_i \cdot h_i, y_i \cdot h_i, z_i \cdot h_i, h_i)$ 의 형태로 표시하고 네 개의 좌표를 블렌딩함수로 섞어 주도록 한다 다시말해 NURBS 곡선상의 점을  $(x \cdot h, y \cdot h, z \cdot h, h)$ 라 하면

$$x \cdot h = \sum_{i=0}^n (h_i \cdot x_i) N_{i,k}(u) \quad (1)$$

$$y \cdot h = \sum_{i=0}^n (h_i \cdot y_i) N_{i,k}(u) \quad (2)$$

$$z \cdot h = \sum_{i=0}^n (h_i \cdot z_i) N_{i,k}(u) \quad (3)$$

$$h = \sum_{i=0}^n h_i N_{i,k}(u) \quad (4)$$

에 의해 얻어진다. 그런데 NURBS 곡선상의 점 x, y, z좌표는 식(1), (2), (3)를 식(4)로 나누어 주면 되므로, NURBS곡선의 방정식 P(u)는 다음과 같이 유도된다.

$$P(u) = \frac{\sum_{i=0}^n h_i P_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n h_i N_{i,k}(u)} \quad (5)$$

$$(0 \leq u \leq n-k+2)$$

위 식에서  $P_i$ 는 다각형의 꼭지점으로 i번째의 조정점(control point)이라 하며 이에 따라 이들 꼭지점으로 이루어진 다각형도 조정 다각형(control polygon)이라 부른다. 왜냐하면 이들이 곡선의 형상을 조정하기 때문이다.  $h_i$ 는 동차좌표값으로 가중치라 하며 곡선이 조정점으로 얼마나를 당겨지는가를 나타내며,  $N_{i,k}$ 는 블렌딩 함수(blending function)라 하며 이들 다각형 꼭지점들의 영향을 각각 해당하는 블렌딩함수로 섞어서 곡선을 형성한다. 또한, 모든 블렌딩함수는 매개변수 u의 전체범위중 각 각 서로 다른 일정 범위에서만 값을 갖도록 하여, 매개변수의 일정범위에 해당되는 곡선부위에서는 그 범위에서 0이 안되는 블렌딩 함수와 짝이 되는 한정된 개수의 조정점들만 형상에 영향을 줄 수 있어야 한다.

$$N_{i,1} = \begin{cases} 1 & t_i \leq u \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u-t_i)N_{i,k-1}(u)}{t_{i+1}-t_i} + \frac{(t_{i+k}-u)N_{i+1,k-1}(u)}{t_{i+k}-t_i}$$

여기서  $t_i$ 는 u의 범위안에 존재하는 매듭값(knot value)이라 하는데 u를 여러개의 범위로 나누어서 각각의 블렌딩 함수가 0이되지 않는 범위의 경계가 되는 u값이다<sup>(2,4)</sup>.  $t_i$ 는 곡선을 변형시키다 보면 새로운 매듭값을 추가하기도 하고 빼기도 하는 데 결과적으로 매듭값간의 간격이 일정하지 않은 경우가 발생하는 데 이러한 경우를 비균일(non-uniform) B-spline curve이라 한다. 이러한 NURBS를 정의식(5)에 의해 도식화 한 것이 Fig 1이다.

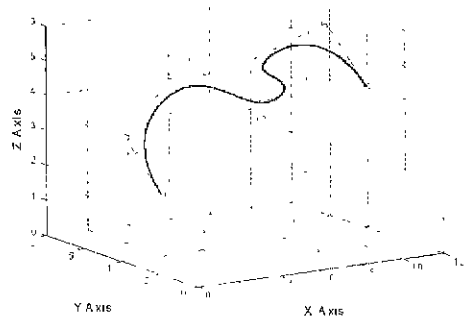


Fig. 1 3D NURBS curve and Control Point

## 2. NURBS 보간 알고리즘

CNC공작기계의 제어방법에는 Sampled Data method와 Reference Pluse method로 나눌 수 있다. 메인 터미트마다 보낼 위치지령을 Pluse신호로 보내주는 Reference Pluse 방식은 고정밀의 보간이 가능하지만 보간속도에 제한을 받아 실제 가공의 적용에 어려움이 있다. 반면에 대부분의 상용 CNC의 제어방식으로 채택되고 있고 Sampling Time(보간주기)마다 이동해야할 위치와 속도를 소프트웨어적으로 계산해서 지령을 보내는 Sampled Data 방식은 고속의 보간이 가능해서 고속가공에 유리하나 큰 오차를 발생시킨다. 하지만 NURBS로 표현할 경우 오차를 줄일 수 있고, CNC의 가공기능을 증대시킬 수 있다. 본 논문에서는 보간주기마다 위치와 속도지령을 보낼 수 있는 Sampled Data 방식을 채택했다. 이 방식으로 적용할 수 있는 NURBS 보간 알고리즘은 다음과 같은 것이 있다.

### 2.1 일정 segment길이에 기초한 알고리즘

이 방법은 각 segment간 길이를 일정하게 유지하는 알고리즘이다. 즉, 주어진 샘플링 시간동안 움직이는 거리가 일정하게 되어야 함으로 일정한 이송속도 V(mm/min)로 파라미터 u의 증분치  $\Delta u$ 를 구하는 보간 알고리즘이다.

NURBS 방정식의 매개변수는 시간 T가 아니라

parameter  $u$  에 의해 제어되어야 하므로 파라미터  $u$  에 따른 속도를 표현하면,

$$V(u) = \frac{ds}{dt} = \left( \frac{ds}{du} \right) \left( \frac{du}{dt} \right) \quad (7)$$

or  $\frac{du}{dt} = \frac{V}{ds/du}$ ,  $\frac{ds}{du} = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$

$$x' = \frac{dx}{du} \quad y' = \frac{dy}{du} \quad z' = \frac{dz}{du}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{V}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}} \quad (8)$$

로 나타낼 수 있으며 3차원에서의 Parametric curve interpolation 미소 증분치는 식(5)를 수치해법의 근사치방법(approximation)중의 하나인 Taylor's 급수로 전개하여 나타낼 수 있다. 식(5)을 전개하면 다항식부분과 나머지부분으로 나눌 수 있다

$$u_{k+1} = u_k + \frac{du}{dt} (u_{k+1} - u_k) + \frac{d^2u}{dt^2} \frac{(u_{k+1} - u_k)^2}{2!} + \dots + R_{n+1}$$

또한,  $(u_{k+1} - u_k)$ 는 다음 보간점까지의 간격을 나타내므로 보간주기(Sampling Time)  $\Delta T$ 로 표현할 수 있다 1차원 근사식으로 Taylor's Expansion에서 첫 번째 도함수까지만 선택하고 유도하면,

$$u_{k+1} = u_k + \frac{V \cdot \Delta T}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}} \quad (9)$$

의 증가치를 유도할 수 있다

식(9)에 주어진 이송속도  $V$ 와  $\Delta T$ 를 적용해서 다음 보간점  $P(u_{k+1})$ 을 구한다.

## 2.2 보간오차를 최대 허용 보간 오차 이내로 제한하는 알고리즘

이 방법은 주어진 이송속도  $V$ 를 다음 보간점까지의 곡률값<sup>(4)</sup> 과 선정된 최대 보간 오차  $h_{max}$ 에 의해 segment간의 속도를 변화시킴으로써  $u$ 의 증분치를 구하는 보간 알고리즘이다.

속도값  $V_h$ 을 주어진 최대보간오차  $h_{max}$ 와 곡률반경(radius of the curvature)  $r$ 에 관한 식으로 유도하면 식(10)와 같다.

$$\Delta L = V_h \cdot \Delta T = \sqrt{\frac{8 \cdot h_{max}}{(1/r)}} \quad (10)$$

$$V_h = \frac{1}{\Delta T} \sqrt{\frac{8 \cdot h_{max}}{(1/r)}}$$

식(10)에서 구한 속도값  $V_h$ 를 식(9)에 대입시키면 다음 보간점  $P(u_{k+1})$ 을 구한다

## 3. 속도제어

속도 제어를 위해 먼저 NURBS curve의 수치적 절이(s)를 계산하고 가감속시간( $t_a$ )을 구해 총 이동시간( $t_s$ )을 구한다

$$t_a = \frac{v}{a}, \quad t_s = 2t_a + \frac{s - vt_a}{v}$$

총 이동시간동안 Sampling Time당 속도값  $V_h$ 를 아래 식으로 구한다

$$V_h = a(kT + \frac{T}{2}) \quad (t < t_a)$$

$$V_h = v \quad (t_a < t < t_s - t_a) \quad (10)$$

$$V_h = a(t_a - kT - \frac{T}{2}) \quad (t_s - t_a < t < t_s)$$

여기서  $a$ 는 가속도,  $k$ 는  $\Delta T$ 의 interval number이다. 최종적으로 식(9)에 대입하면 다음 보간점  $P(u_{k+1})$ 를 구한다

## 4. 시뮬레이션 결과

본 절에서는 앞서 유도된 NURBS 보간 알고리즘들을 비교·평가하기 위한 시뮬레이션을 수행하였다. 8개의 조정점을 갖는 임의의 3D곡선을 선정했고 시뮬레이션을 위한 보간주기  $\Delta T$ 는 8msec, 최대 허용 보간 오차  $h_{max}$ 는 0.2 $\mu$ m, 초기 이송속도  $V$ 는 33.3mm/sec, 가속도  $a$ 는 300mm/sec<sup>2</sup>로 가정하였다.

### 4.1 보간오차

Fig. 2는 일정 이송속도를 적용했을 때의 NURBS 보간 오차를 나타내었고, Fig. 3은 임의의 선정된 최대 보간오차와 각 segment마다의 곡률에 의해 생성된 속도를 적용했을 때의 나타난 보간오차이다. Fig. 2에서는 2 $\mu$ m정도의 오차가 발생했고, Fig. 3에서는 0.2 $\mu$ m이내로 제한됨으로써 선정된 최대 허용 보간오차를 만족함을 보인다.

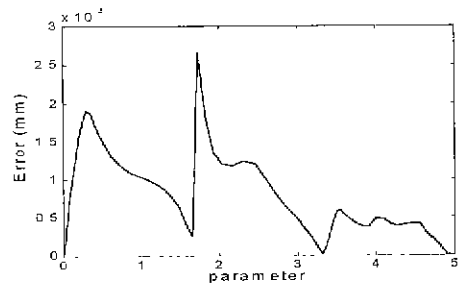


Fig. 2 NURBS interpolation error by the constant feedrate

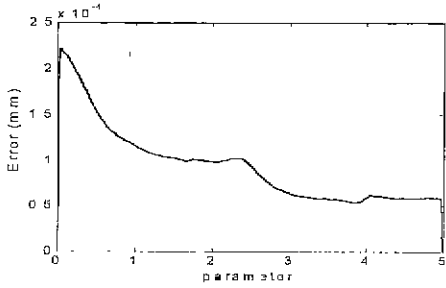


Fig 3 NURBS interpolation error by application of the changed feedrate( $h_{max} = 0.2\mu m$ )

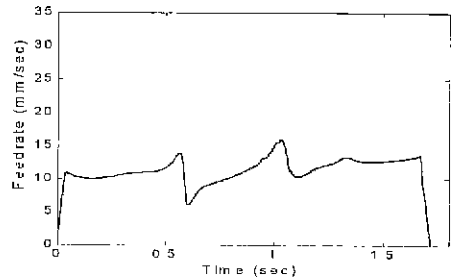


Fig. 6 Feedrate by application of the changed feedrate ( $h_{max} = 0.2\mu m$ )

## 4.2 보간속도

Fig 4는 NURBS 곡선의 곡률(Curvature)을 나타내며, Fig. 5는 곡선의 곡률과는 무관한 속도값을 sampling time에 따라 나타내고, Fig. 6은 최대 허용보간 오차와 곡률에 따른 속도제어를 수행한 최적 보간 속도값을 나타낸 것이다. Fig 5에서는 일정 속도로 보간수행시는 보간오차가 곡률에 비례하고, Fig.6에서는 곡률이 큰 곳에서는 이송속도가 저하되고, 곡률이 작은 곳에서는 이송속도가 상승함을 보여준다.

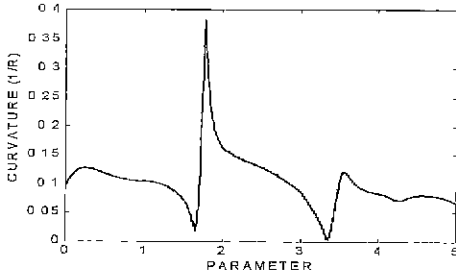


Fig. 4 Curvature of Fig. 1

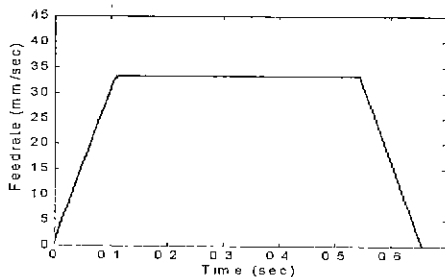


Fig. 5 Feedrate by application of the by the constant feedrate

## 5. 결론

본 논문에서는 자유곡면을 갖는 형상을 CNC공작 기계에서 가공을 할 때, 기존의 가공방법인 점 데이터를 이용한 적선보간 가공법의 단점인 대량의 데이터와 전송문제, 그리고 가공정밀도 향상을 위해 NURBS 방정식을 이용한 보간법들을 비교·검증하기 위한 시뮬레이션을 수행하였다.

시뮬레이션 검증결과, 일정한 속도와 샘플링 시간에 의해 segment 간격을 동일하게 유지할 수 있도록 하는 적용이 가능함과 곡률에 따른 최적 속도값을 적용함으로써 최대허용보간오차 이내로 정밀성을 유지함을 확인하였다.

## 참고문헌

1. Qiyi G. Zhang, R. Bryan Greenway, "Development and implementation of a NURBS curve motion interpolator", Robotics and Computer-Intergrated Manufacturing, Vol 14, pp 27-36, 1998.
2. Les Piegl, Wayne Tiller, "The NURBS Book", Springer, pp 47-79, 117-139, 1995.
3. 김민중, 송진일, 권동수, "고속·고정도 CNC가공을 위한 NURBS보간 알고리즘", 한국정밀공학회지, 제17권, 제1호, pp.192-197, 2000.
4. Byoung K. Choi, "Surface Modeling for CAD/CAM", Elsevier Science Publishers B V, pp.52-65, 1991.
5. M Shpitalni, Y Koren, C C Lo, "Realtime curve interpolators", Computer-Aided Design, Vol. 26, pp.832-838, 1994