

지반-말뚝 상호작용계의 강제진동해석

A Forced Vibration Analysis of Soil-Pile Interaction System

김민규*

최용택**

임윤묵***

김문겸****

Kim, Min Kyu Choi, Young Taek Lim, Yun Mook Kim, Moon Kyum

ABSTRACT

In this study, a numerical analysis for soil-pile interaction systems in multi-layered half planes under a forced vibration is presented. The soil-pile interaction system is divided into two parts, so called near field and far field. The near field soil using finite elements and piles using beam elements are modeled. The far field soil media is implemented using boundary elements those can automatically satisfy the condition of wave radiation. These two fields are numerically coupled by imposing displacement compatibility condition at the interface between the near field and the far field. For the verification, the forced vibration test was simulated and the response under horizontal and vertical harmonic loads at the pile cap in the layered half plane was determined. The results are compared to the theoretical and experimental results of the literatures to verify the proposed soil-pile interaction analysis formulation.

1. 서 론

말뚝이 구조물의 기초로서 사용된 것은 수백년에 이른다. 그러나 말뚝의 동적인 거동에 대한 고찰이 있은 것은 30년에 불과하다. 그것은 기존에는 말뚝의 사용이 필요없는 좋은 부지에서의 건설이 주로 이루어져오다가 최근 지반조건이 좋지 않은 곳에도 구조물의 건설이 필요하게 되었고, 또한 끊임없이 동적 하중을 받는 대형 해양구조물 또는 원자력발전소와 같이 지진에 대한 대비가 반드시 필요한 구조물의 건설이 이루어지면서 말뚝기초의 동적거동에 대한 고찰의 반드시 필요하게 되었기 때문이다. 뿐만 아니라 1997년의 고베지역에서 발생한 지진에 이어 2000년에는 대만에서, 2001년에는 인도에서 대규모의 지진이 발생함으로 인해서 국내에서도 각종 구조물의 동적 거동에 대한 연구가 점점 활발해지고 있는 실정이다.

이와 관련하여 기계기초로 사용되는 말뚝기초의 경우 말뚝두부에 동적 하중을 가진하여 기초의 동적 특성을 파악하는 강제진동해석을 수행하여 그 동적특성을 파악하고 있다. 강제진동해석의 방법은 실험에 의한 방법과 이론식에 의한 방법 그리고 수치해석에 의한 방법으로 연구가 진행되고 있다. 실험에 의한 방법은 Novak 등^[1]에 의하여 처음으로 연구되었는데, Novak은 점착성 모래질 흙으로 구성되어 있는 부지를 선택하여 실제규모보다 작은 6.1cm 와 8.9cm 의 말뚝을 대상으로 실험을 수행하였다. 실험은 8.9cm 직경의 단말뚝, 6.1cm 직경의 단말뚝, 그리고 6.1cm 직

* 연세대학교 토목공학과 박사과정, 학생회원

** 연세대학교 토목공학과 석사졸업

*** 연세대학교 토목공학과 조교수, 정회원

**** 연세대학교 토목공학과 교수, 정회원

경 말뚝 4개에 의한 군말뚝을 대상으로 하였고 각각 수평방향과 수직방향으로 동하중을 가진하여 주파수별 응답을 구하도록 하였다. 후에 El-Marshafawi 등^[2]은 앞선 실험에 비해 좀 더 큰 말뚝의 경우에 대한 강제진동 실험을 수행하였다. 실험에 의한 방법은 가장 정확한 결과를 얻을 수 있다는 장점이 있으나 그 실험이 모형실험으로 이루어질 경우 실제 구조물과 크기의 다름에 의한 차 이를 극복해야 하고 모든 경우의 실험이 불가능하다는 점에서 한계가 있다고 할 수 있다.

기계기초에 대한 이론식에 의한 동적거동연구는 일찍부터 시작되었다. 수직방향 하중을 받는 선단지지말뚝의 경우 Richart^[3]는 1962년에 말뚝의 재질과 길이에 따른 공진주파수를 구할 수 있도록 하였다. 군말뚝의 경우는 각 단말뚝의 경우를 단순한 합산에 의하여 응답을 구할 수 없으며 말뚝의 직경과 말뚝간의 거리에 따라서 그 결과가 달라지게 되는데, Novak^[4]은 1977년의 연구에서 말뚝이 인접하게 위치하고 있을 경우 개개 말뚝에서의 변위는 증가하고 반대로 전체그룹의 강성과 감쇠는 증가한다는 것을 제시하였다. 수평방향하중에 대해서는 수직방향하중이 작용할때와 유사한 방법으로 Novak^[5] 및 Novak 과 El-Sharnouby 등^[6]이 횡방향 강성과 감쇠를 유도하였고 이를 군말뚝의 경우로 확장하였다. 이러한 이론식에 의한 결과는 현재 가장 널리 사용하고 있는 방법이고 타당한 근거를 제시하여 주고 있지만 식의 전개과정에서 실제로 지반조건을 잘 반영하고 있지 못한다는 단점이 있다.

수치해석에 의한 방법은 90년대에 들어서면서 컴퓨터의 발달과 함께 널리 연구되기 시작하였으며, 이 방법은 특히 지반과 말뚝의 접합면에서 발생하는 분리현상과 미끄러짐 현상들을 모형화하는데 효과적이므로 말뚝의 동적특성을 예측하는데 널리 사용되었다. 해석방법으로는 Winkler 가정을 이용한 방법, 유한요소해석, 경계요소해석 및 유한요소-경계요소 조합해석등의 방법이 사용되었다. Penzen 등^[7] 과 Prakash 그리고 Chandrasekaran^[8]은 스프링을 이용하여 지반을 모형화하고 집중질량과 감쇠기를 사용하여 관성에 의한 질량의 동적 작용과 파의 감쇠 효과를 고려하였다. Naggar 와 Novak^[9]은 말뚝과 인접한 지반을 근역으로, 말뚝으로부터 멀리 떨어진 지반을 원역으로 설정하여 각각에 대한 강성스프링과 감쇠기를 설치하여 해석할 수 있는 기법을 개발하였다. Kuhlemeyer^[10], Blaney^[11], Wolf^[12] 등은 유한요소법에 의한 해석을 실시하였고 Banerjee 와 Sen^[13] 등은 경계요소법에 의한 해석을 실시하였다. 국내에서는 수치해석에 의한 방법이 주로 연구되었는데 김문겸 등^[14]은 유한요소-경계요소를 조합하여 횡방향 하중을 받는 단말뚝의 거동을 연구하였다.

이상에서 살펴본 여러 방법들 중 Winkler 가정에 의한 방법은 다양한 수치 모형화가 가능하다는 장점이 있는 반면 지반의 영향을 정확하게 대변하고 있다고 보기에는 어려운 점이 있다. 또한 유한요소법에서는 복잡한 구조형상을 효과적으로 모형화 하고 자유로운 해석이 가능한 반면 파의 방사조건을 만족시키는 경계조건을 설정하는 것이 여전히 숙제로 남는다. 경계요소법을 사용한 경우는 방사조건을 만족시키는 데는 유리하고 말뚝머리에 하중이 가해지는 경우의 해석은 가능하지만 주변 지반에 하중이 가해질 경우 해석의 어려운 점이 있고, 말뚝과 주변 지반의 자유로운 수치모형 구성에 어려움이 있다. 따라서 본 연구에서는 말뚝과 인접 지반을 내부영역으로 설정하여 유한요소로 모형화 하고, 말뚝에서 조금 떨어진 원역의 지반을 외부영역으로 설정하여 경계요소로 모형화 함으로서 유한요소와 경계요소의 장점을 살려서 지반-말뚝 상호작용계를 효과적으로 모형화 할 수 있는 기법을 제시하였다. 개발된 해석기법을 이용하여 다양한 형태의 말뚝기초에 강제 진동해석을 수행해본 결과 본 연구를 통해 기존 많은 연구자들의 연구결과와 유사한 결과를 얻을 수 있었다. 이로서 다양한 형태의 말뚝기초에서 공진주파수와 공진주파수에서의 최대 응답을 예측할 수 있으므로 기계기초로 사용되는 기초의 경우 기계와 기초와의 공진을 피할 수 있도록 설계하는데 도움이 되는 자료가 될 수 있을 것으로 판단된다.

2. 유한요소-경계요소의 정식화

외부영역의 경계요소해석을 위하여 기존에 김문겸 등^{[15][16]}에 의하여 개발된 단층 반무한 평면에서의 동적 기본해를 사용하였다. 이 기본해를 이용하여 경계요소해석을 위한 계방정식을 행렬의 형태로 구성하면 다음의 식 (1)과 같다.

$$[H^{BE}]\{u^{BE}\} = [G^{BE}]\{p^{BE}\} \quad (1)$$

여기서, 절점의 수가 N 이고 요소의 수가 NE 라면 행렬 $[H^{BE}]$ 와 $[G^{BE}]$ 는 면내운동의 경우 각각 $2N \times 2N$ 의 차원과 $2N \times 2NE$ 의 차원을 형성하며 면외운동의 경우는 각각 $N \times N$ 의 차원과 $N \times NE$ 의 차원을 이룬다. 절점 당 기지항과 미지항의 수는 같으므로 식 (1)은 다원 일차 연립방정식의 형태로 표현되며 미지값과 기지값을 분리하여 다시 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$[A^{BE}]\{X^{BE}\} = \{F^{BE}\} \quad (2)$$

여기서, $[A^{BE}]$ 는 $[H^{BE}]$ 와 $[G^{BE}]$ 를 이용하여 구성한 행렬이고, $\{X^{BE}\}$ 는 미지의 변위와 하중의 벡터이며, $\{F^{BE}\}$ 는 기지의 변위와 하중에 대한 벡터이다. 그러므로 행렬식 (2)에 대한 해를 구하여 경계요소해석을 수행할 수 있다.

내부영역의 유한요소해석을 위하여 전체계의 동적 운동방정식은 행렬형태로 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{\bar{u}\} = \{\bar{f}\} \quad (3)$$

여기서, 벡터 $\{\bar{u}\}$, $\{\dot{u}\}$ 와 $\{\ddot{u}\}$ 는 각각 변위, 속도와 가속도를 나타내며, 행렬 $[M]$, $[C]$ 와 $[K]$ 는 각각 질량행렬, 감쇠행렬 그리고 정적강성행렬을 나타낸다. 그리고 벡터 $\{\bar{f}\}$ 는 내부영역에 가해진 하중벡터를 나타낸다. 식 (3)을 시간변수에 대해 Fourier 변환을 수행하면 시간의 함수인 하중벡터 $\{\bar{f}\}$ 및 변위벡터 $\{\bar{u}\}$ 는 식 (4)와 같이 표현된다.

$$\{u(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{\bar{u}(t)\} \exp(-i\omega t) dt \quad (4a)$$

$$\{F(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{\bar{F}(t)\} \exp(-i\omega t) dt \quad (4b)$$

그러므로 식 (3)은 식 (5)와 같이 주파수영역에서의 운동방정식으로 나타낼 수 있다.

$$[S(\omega)]\{u(\omega)\} = \{F(\omega)\} \quad (5)$$

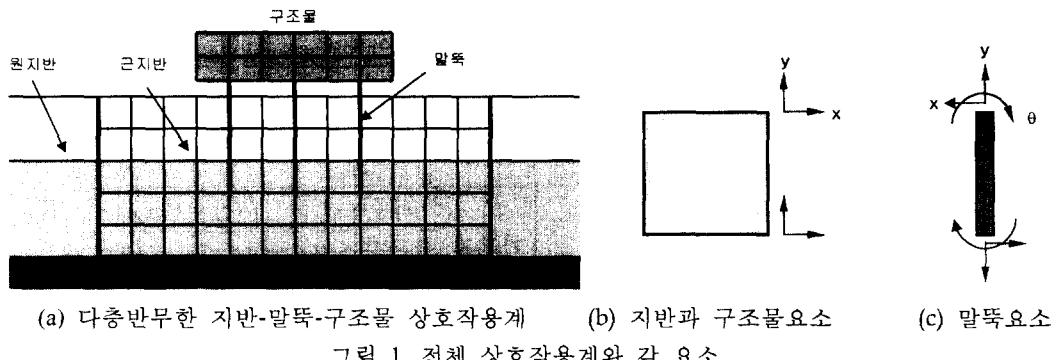
식 (5)에서 $[S(\omega)]$ 는 임피던스행렬로서 식 (6)과 같이 표현되는 동적강성행렬을 나타내며 $[K^*]$ 는 정적 강성행렬을 나타낸다.

$$[S(\omega)] = [K^*] + i\omega[C] - \omega^2[M] \quad (6)$$

3. 지반내 말뚝의 모형화

본 연구에서는 지반-구조물 상호작용계에 축 하중을 받는 보 요소를 도입하므로써 그림 1과 같이 지반-말뚝-구조물계를 모형화 하였다. 그림 1(a)와 같이 원지반은 경계요소에 의하여 모형화 하였으며 근지반은 유한요소에 의한 평면 변형률 요소로 모형화 하였다. 또한 구조물도 유한요소에 의한 평면변형률 요소로 모형화 하였으며 구조물과 지반 사이에는 축 하중을 받는 보 요소를 사용하여 지반-말뚝-구조물의 상호작용계를 모형화 하였다. 유한요소 해석에 있어서 구조물

요소와 지반요소는 각 요소의 절점당 x , y 두 개의 자유도를 갖는 반면 축 하중을 받는 보 요소로 모형화한 말뚝 요소는 각 절점당 x , y , θ 의 3 개의 자유도를 갖는다. 따라서 전체 계에서는 지반과 말뚝, 구조물과 말뚝이 공유하는 절점에서는 세 개의 자유도를 갖게 되며 그 외의 절점에서는 2 개의 자유도를 갖게 된다. 지반과 구조물과 말뚝의 수평방향 변위와 수직방향 변위를 나타내는 2 개의 자유도 x , y 와 말뚝 요소의 회전각을 나타내는 θ 사이에는 행렬상에서 개별적으로 작용을 하므로 각각의 연립방정식을 푸는 것과 같다. 따라서 말뚝 요소를 도입하기 전의 전체 행렬 크기 N 에 말뚝 요소가 도입함으로써 말뚝요소의 총 절점 개수 n 이 추가되어 전체 행렬의 크기는 $N + n$ 이 된다.



4. 강제진동 해석에 의한 검증

개발되어진 강제진동해석기법의 타당성을 검증하기 위해서 다층 반무한 지반에 근입되어진 말뚝과 상부구조에 종방향, 횡방향의 동하중을 가하여 그 응답을 산정하고 기존의 연구 결과 및 실험치와 비교하였다. 비교대상인 Novak^[1]의 연구에서는 이론식을 이용하여 말뚝의 동적응답을 산정하였다. Novak은 중첩법을 이용하여 강성도 행렬을 구하고 이를 통하여 상호작용계에 대한 기본식을 구성하였다. 또한 연화영역을 고려하기 위하여 일정 구간 내의 지반 강성도를 감소시키고 재료감쇠를 증가시키는 방법을 사용하였고, 말뚝 사이의 상호작용 계수를 도입함으로써 군말뚝의 효과를 고려하였다. 말뚝에 가해진 하중은 조화하중으로서 가진기에 의해 발생되는데, 가진기는 캡핑 콘크리트 또는 평판 기초에 부착되어져 가해진 주파수 (ω)의 제곱에 비례하는 하중을 발생시킨다. 실험에 사용되어진 가진기의 하중은 식 (7) 과 같이 나타낼 수 있다.

$$F(t) = (m_e e) \omega^2 \cos \omega t \quad (7)$$

여기서, m_e 는 가진기내 두 개의 추의 무게이며 e 는 가진기 팔의 길이이다. 결과 그래프에서 사용되어지는 응답의 진폭은 식 (8)과 같이 무차원 되어진다.

$$A_u = \left(\frac{m}{m_e e} \right) u, \quad A_v = \left(\frac{m}{m_e e} \right) v \quad (8)$$

여기서, u, v 는 각각 횡방향 변위와 종방향 변위를 나타낸다. 또한 m 은 캡핑콘크리트 또는 평판 기초의 질량이다. 가진기의 발생가능 주파수는 6 Hz에서 62 Hz 까지 이다.

4.1 단말뚝 동적 상호작용의 종 방향 검증

단말뚝의 종 방향 동적 상호작용에 대한 검증을 하기 위하여 다층지반에 근입된 단말뚝에 대한 해석을 수행하였다. 비교대상실험은 가진기 하중의 크기인 $m_e e$ 가 2.45 kg · mm, 4.92

$kg \cdot mm$, $9.84 kg \cdot mm$ 로 변화될 때의 경우에 대하여 수행되었다. 말뚝과 평판기초에 대한 물성은 표 1에 정리한 바와 같고 지반물성은 표 2에 나타나 있다. 그림 2에서는 Novak의 이론해에 의한 결과와 El-Marsafawi의 실험결과 그리고 본 연구에 의한 해석 값을 나타내었고 표 3에서는 각 결과를 비교하여 정리하였다. 그림에서 보는 바와 같이 본 연구에서의 해석결과가 실험결과와 더 유사한 결과를 나타내는 것을 알 수 있다. 실험값과 약간의 오차를 보이고 있지만 이것은 지반과 말뚝을 탄성체로 모형화 하는 과정에서 발생한 것으로 판단된다.

표 1. 말뚝의 물성 및 가진기의 구성 (단말뚝, 종방향)

요소	물성종류	물성치	요소	물성종류	물성치
말뚝	탄성계수	E_P	캡 평	탄성계수	E_S
	포아송비	ν_P		포아송비	ν_S
	밀도	ρ_P		밀도	ρ_S
	길이	L		감쇠비	ζ_S
	감쇠비	ζ_P		무게	941 kg
	반지름	R		하중형태	$F(t) = (m_e e) \omega^2 \cos \omega t$
	단면적	A		추의무게 × 팔길이	$m_e \times e$
	단면2차모멘트	I			2.45, 4.92, 9.84 kg · mm

표 2. 검증대상 지반 물성 (단말뚝, 종방향)

흙의 종류	깊이(m)	전단파속도 (m/s)	밀도 (kg/m^3)	탄성계수 (kN/m^2)	포아송비 (ν_g)	감쇠비 (ζ_g)
SILTY FINE SAND	0 - 1.4	81	1,780	30,364.3	0.3	2.5
GRAVEL	1.4 - 1.75	130	1,780	78,213.2	0.3	2.5
SANDY SILT	1.75 - 2.9	163	1,780	122,961.3	0.3	2.5
SILTY TILL	2.9 -	185	1,860	165,512.1	0.3	2.5

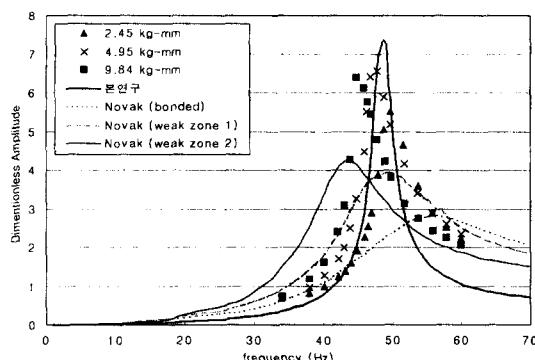


그림 2. 해석결과 (단말뚝, 종방향)

표 3. 해석결과 비교(단말뚝, 종방향)

	공진 주파수 (Hz)	오차 (%)	무차원 진폭	오차 (%)
평균 실험값	47.4	0	6.17	0
Novak	56.4	18.9	2.82	54.3
	49.4	4.2	3.96	35.9
	43.3	8.6	4.25	31.0
본 연구	49	3.3	7.71	25.0

4.2 단말뚝 동적 상호작용의 횡 방향 검증

단말뚝의 횡 방향 동적 상호작용에 대한 검증을 하기 위하여 Novak^[1]의 실험 결과 및 이론해를 본 연구의 수치해석 결과와 비교하였다. 무차원화된 실험결과가 종방향의 경우와는 달리 거의 동일한 결과가 나오므로 결과에는 하나의 그래프로 표현하였다. 말뚝과 평판기초의 물성은 말뚝의 길이가 2.25m이고 반지름이 0.0445m인 것을 제외하고는 종방향의 경우와 동일하다. 총상지

반의 물성은 표 4에 나타낸 바와 같다. 그림 3에서는 Novak의 실험값과 이론값의 결과와 본 연구에 의한 해석값을 나타내었고 각 결과값들을 실험값과 비교하여 표 5에 정리하였다. 해석결과 실제 실험보다 공진주파수가 과대 평가 됨을 알 수 있다. 또한 진폭도 실험값이 44.19인 반면 본 연구에서는 40.81로서 실험값보다 적게 나타남을 알 수 있었다. 그러나 본 연구의 결과는 Novak에 의한 이론값보다 실험값에 더 잘 맞는 결과이며 실험값과 약간의 차이가 발생하는 것은 공진주파수의 경우 주로 구조물의 강성도와 관성질량에 의해 영향을 받으므로 실험의 강성도가 본 연구에서 수치해석에 의한 강성도보다 작은 값을 가짐에 의한 것으로 판단이 된다.

표 4. 검증대상 지반의 물성 (단말뚝, 횡방향)

흙의 종류	깊이 (m)	전단파속도 (m/s)	밀도 (kg/m^3)	탄성계수 (kN/m^2)	포아송비 (ν_g)	감쇠비 (ζ_g)
FINE SILTY SAND	0 - 2.2	174.8	1,790	142,203.2	0.3	2.5
GRAVEL AND TILL	2.2 -	185	1,860	165,512.1	0.3	2.5

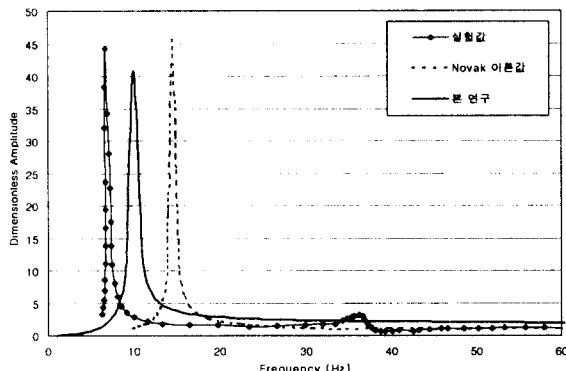


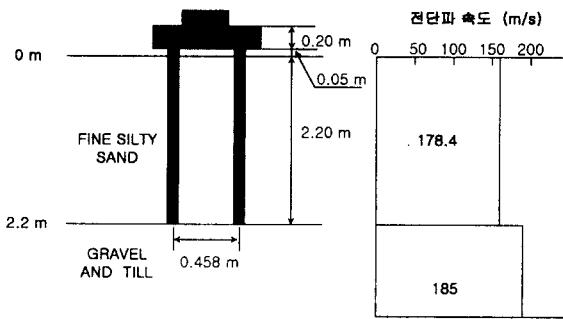
그림 3. 해석결과 (단말뚝, 횡방향)

표 5. 해석결과 비교 (단말뚝, 횡방향)

	공진주파수(Hz)	오차(%)	무차원 진폭	오차(%)
실험값	6.7	0	44.19	0
Novak의 이론값	14.5	117.6	45.67	3.4
본 연구	10.0	49.9	40.81	7.6

4.3 군말뚝 동적 상호작용의 횡 방향 검증

군 말뚝의 횡 방향 동적 상호작용에 대한 검증을 하기 위하여 Novak^[1]의 실험 결과 및 이론해와 본 연구의 결과를 비교하였다. 지반과 구조물의 형상은 그림 4(a)에서 보는 것과 같다. 가진기하중인 $m_e e$ 는 $9.86 \text{ kg} \cdot \text{mm}$, $24.59 \text{ kg} \cdot \text{mm}$ 의 두 가지 경우에 대하여 실험을 하였고 각 경우 모두 그림 5에 나타나 있다. 또한 말뚝과 콘크리트 캡핑 및 지반 물성은 단말뚝 횡방향의 경우와 동일하다. Novak은 해석에 있어서 지반의 전단파 속도를 과전파 이론에 근거하여 구한 V_w 와 정적 실험에 의하여 구한 V_{st} 에 관하여 각각 해석을 실시하였다. 본 연구에서도 V_w 와 V_{st} 에 대하여 각각 수행하였으며 그 결과는 그림 5과 그림 6에 나타낸 바와 같다. 그림에서 볼 수 있듯이 본 연구 결과와 Novak의 해석 결과 모두 지반의 전단파 속도를 이론식에 의한 V_w 를 사용한 것 보다 실제 정적 실험을 통하여 구한 V_{st} 를 사용한 것이 실제 실험값에 더 가까운 결과를 나타내는 것을 알 수 있다. 이것은 수치해석에 있어서 지반의 전단파 속도의 산정이 결과에 매우 큰 영향을 미친다는 것을 의미하는 것이다. 또한 본 연구 결과가 Novak이 해석한 결과보다 공진 주파수와 진폭에 있어서 잘 맞음을 알 수 있다. 공진 주파수에 있어서는 본 연구에서의 결과값이 실험값보다 약 2 Hz 작게 나타났으며 진폭은 1.18 정도 작게 나타났다.



(a)

(b)

그림 4. 검증에 사용된 대상물의 형상 및 제원 (군말뚝, 횡방향)

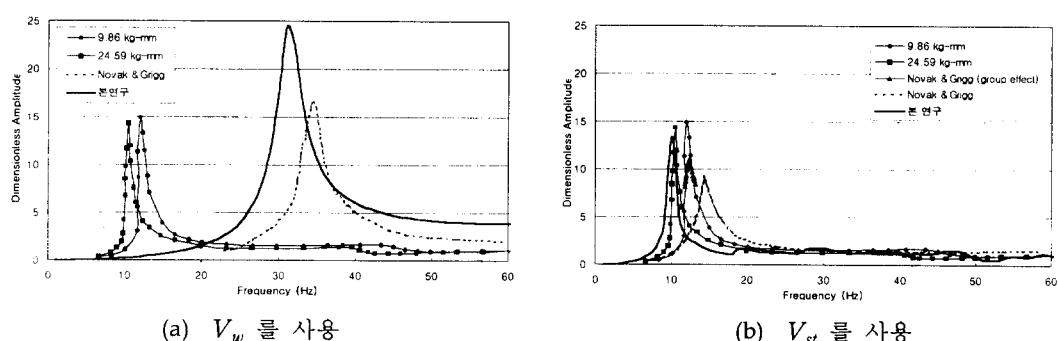
(a) V_w 를 사용(b) V_{st} 를 사용

그림 5. 본 수치해석 결과와 Novak 의 이론값 및 실험값의 비교 (군말뚝, 횡방향)

표 6. 실험값과 수치해석의 공진주파수와 진폭 (군말뚝, 횅방향)

	공진주파수(Hz)	실험과의 오차(%)	무차원 진폭	실험과의 오차(%)
평균실험값	12.0	0	14.61	0
Novak & Grigg Group effect 고려	12.4	3.2	10.97	24.9
	전단파 속도 (V_{st})	14.2	9.17	37.2
Grigg 전단파 속도 (V_w)	34.5	187	16.53	13.2
	본 연구 I (V_{st})	10	13.43	8.0
본 연구 II (V_w)	31	159	24.45	67.4

5. 결 론

본 연구에서는 경계요소와 유한요소 해석을 이용하여 지반-말뚝 상호작용계의 동적 응답 해석 알고리즘을 개발하였고, 다층 반무한 지반상에 근입된 말뚝기초의 해석에 적용하여 해석기법의 타당성을 검토하였다. 그 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 축 방향력을 받는 보 요소를 이용하여 지반내 말뚝을 모형화하고 구조물과 지반을 모형화하기 위한 평면 변형률 유한요소를 이용하여 내부영역을 구성하였다. 이를 다층 반무한 기본해를 이용한 경계요소와 조합하여 지반-말뚝 상호작용계의 강제진동해석을 효과적으로 수행 할 수 있는 기법을 개발하였다.
2. 본 연구에서 개발한 수치해석 기법을 다층반무한 지반에 근입되어진 말뚝에 적용하여 강제진

동해석을 수행하고 이를 기존의 연구결과와 비교하여 본 연구방법의 타당성을 검증하였다. 해석결과 말뚝기초의 종방향 하중 및 횡방향 하중에 대한 응답결과가 실험값에 가까운 것을 알 수 있었다. 따라서 본 해석기법을 이용하여 말뚝기초의 동적특성을 예측하여 말뚝기초의 동적거동을 고려해야 하는 설계에 반영할 수 있을 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 과학재단 특정기초연구 “정·동적 상호작용을 고려한 해상말뚝기초의 설계기법” 연구 내용의 일부이며 이에 감사의 뜻을 표합니다.

참고문헌

1. Novak, M and Grigg, R.F., "Dynamic experiments with small pile foundations," *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 13, No. 4. 372-385, 1976
2. El-Marsafawi, H, Han, Y.C., and Novak, M. "Dynamic Experiments on Two Pile Groups," *Res. Rep. GEOT-20-90*, Dept. Civil Eng., U. Western Ontario, August, 1990
3. Richart, F.E. "Foundation Vibrations," *Transactions*, ASCE, Vol. 127, Part I , pp. 863-898, 1962.
4. Novak, M. "Vertical Vibration of Floating Piles," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 103, No. EM1, pp. 153-163, 1977.
5. Novak, M. "Dynamic Stiffness and Damping of Piles," *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 11, No. 4, pp. 574-598, 1974.
6. Novak, M. and El-Sharnouby, B., "Stiffness and Damping Constants of Single Piles," *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, Vol. 109, No. GT7, pp. 961-974, 1983.
7. Parmelee, R.A., Penzien, J., Scheffey, C.F., Seed, H.B. and Thiers, G.R., "Seismic Effects on Structures Supported on Piles Extending Through Deep Sensitive Clays", *Inst. Eng. Res., U. of California*, Berkeley, Rep. SESM 64-2, 1964
8. Prakash, S.F. and Chandrasekaran, V., "Free Vibration Characteristics of Piles," *Soil Mechanics Foundation Engineering*, Vol.2, 1977, pp.333-336.
9. El-Naggar, M.H. and Novak, M., "Nonlinear analysis for Dynamic Lateral Pile Response," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 15, pp.233-244, 1996.
10. Kuhlemeyer, R.L., "Static and Dynamic Laterally Loaded Piles," *Res. Rep. No. CE76-9*, Dept. of Civil Eng., U. of Calgary, Canada, 1976.
11. Blaney, G.W., Kausel, E. and Roessel, J.M., "Dynamic Stiffness of Piles," *Proc. 2nd International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, Blacksburg, Virginia, pp. 1001-1012, 1976.
12. Wolf, J.P., *Dynamic Soil-Structure-Interaction*, Prentice-Hall, 1985.
13. Banerjee, P.K. and Sen, R., "Dynamic Behaviour of Axially and laterally Loaded Piles and Pile Groups," *Chapter 3 in Dynamic Behavior of Foundations and Buried Structures*, 1987.
14. 김문겸, 임윤묵, 김민규, 조석호, “횡하중을 받는 지반-말뚝 상호작용계의 동적 주파수 응답해석,” *한국전산구조공학회 논문집*, Vol. 13, No. 4, pp.437-448, 2000. 12.
15. 김문겸, 이종우, 이필규, 김민규, “점근해를 이용한 동적 2차원 다층 반무한 경계요소,” *대한 토목학회 논문집*, 제 18권, 제 I-5 호, pp. 625-636, 1998. 9.
16. Kim, M.K., Lim, Y.M., and Rhee, J.W., "Dynamic Analysis of Layered Half Planes by Coupled Finite and Boundary Elements," *Engineering Structures*, Vol. 22, No. 6, pp. 670-680, 2000.