

Lyapunov함수의 목표 변화율을 이용한 가진된 건물의 슬라이딩 모드 제어

Sliding Mode Control with Target Variation Rate of Lyapunov Function for Seismic-Excited Structures

이 상 현* 정 진 욱** 민 경 원***
Lee, Sang-Hyun Jung, Jin Wook Min, Kyung-Won

ABSTRACT

This paper presents sliding mode control(SMC) method using target variation rate of Lyapunov Function. SMC keeps the response of structure in sliding surface where structure is stable. It can design both linear controller and bang-bang controller. Linear control of previous research, however, can not make most of the performance of controller, because it is designed to satisfy the condition that the variation rate of Lyapunov function is minus. Also, in case of bang-bang controller, unnecessary large control force is generated. Presented method can utilize the capacity of controller efficiently by prescribing the target variation rate of Lyapunov function. Numerical simulation results indicate that the presented control methods can reduce the peak response larger than linear control, and it has control performance equivalent to bang-bang control.

Key words : sliding mode control, Lyapunov function, target variation rate, linear control, bang-bang control

1. 서 론

지진과 강한 바람을 받는 건축, 토목구조물의 능동과 혼용 제어분야에서 최근 많은 연구가 이론적, 실험적으로 수행되었다. 특히, 강한 지진에서 발생할 수 있는 구조물의 비선형거동^{2),3)}에도 안정적으로 거동할 수 있는 제어 알고리즘에 대한 연구가 활발히 진행되고 있으며, 이를 위해 제안된 제어법칙에는 펄스 제어, 가속도 제어, 순간최적제어, 슬라이딩 모드 제어¹⁾ 등이 있다.

제안된 제어법칙 중 슬라이딩 모드 제어는 구조물이 탄성인 경우에 안정성과 우수한 제어성능을 보일 뿐 아니라, 구조물이 항복한 후에도 구조물의 응답을 줄이는 효과를 가진다. 또한, 기존의 능동제어의 가장 큰 문제점 중 하나인 제어기 성능의 한계에 의해 발생하는 제어력 포화현상의 경우에도 안정적인 거동을 보이기 때문에, 현재 준능동, 능동제어의 알고리즘으로 많이 사용되고 있다.

* 서울대학교 건축학과 박사과정, 정회원
** 인천대학교 건축공학과 석사과정, 정회원
*** 인천대학교 건축공학과 부교수, 정회원

슬라이딩 모드 제어는 구조물이 안정적인 거동을 보이는 슬라이딩 표면⁴⁾을 정의한 후, 항상 구조물의 응답이 슬라이딩 표면으로 보내지도록 제어력을 설정한다. 이를 위해, 슬라이딩 표면으로부터의 거리를 Lyapunov²⁾ 함수로 설정하고, 이 함수의 시간에 대한 변화율이 항상 음수가 되도록 제어력을 산정한다. 설계자의 설계목적 및 제어기의 특성에 따라 구조물의 상태 변수 및 외란에 비례하는 선형제어, 상태 변수와 외란의 크기에 상관없이 Lyapunov 함수의 변화율을 음수로 만드는 방향으로 최대제어력을 내는 뱅뱅제어 등의 설계가 가능하다.

그러나, 기존 연구에서 선형제어의 경우 Lyapunov 함수의 변화율이 음수라는 조건만 만족하도록 제어기 설계를 수행하여 제어기의 성능을 충분히 활용하지 못한다. 또한 제어기의 성능을 극대화하기 위해 사용하는 뱅뱅제어의 경우, 불필요하게 큰 제어력이 발생하는 문제점을 가지고 있다.

본 논문에서는 기존 연구와 달리, Lyapunov 함수의 목표 변화율을 설정하고 이를 구현할 수 있는 제어기를 설계함으로써 제어기의 성능을 효율적으로 활용할 수 있도록 하는 제어알고리즘을 제안한다. 제안된 알고리즘은 설정된 목표변화율에 모자라는 크기만큼의 제어력이 발생되어 뱅뱅제어의 경우 불필요하게 큰 제어력이 발생하지 않으며, 선형제어의 경우 제어기의 성능을 최대한 활용하는 것을 가능하게 한다.

제안한 알고리즘의 유효성을 증명하기 위해서, 단자유도 시스템에 대한 지진해석을 수행하였다. 지진하중은 El Centro 하중을 사용하였으며 제어장치는 능동질량감쇠기(AMD; Active Mass Damper)를 사용하였다.

2. 슬라이딩 모드 제어

2.1 구조물의 상태방정식

지진하중을 받는 질량, 감쇠, 강성시스템의 상태운동방정식은 다음과 같다.

$$\dot{z} = Az + Bu + H \ddot{x}_g \quad z = [x \dot{x}]^T \quad (1)$$

여기서, $x, \dot{x}, u, \ddot{x}_g$ 는 각각 구조물의 변위, 속도, 제어력, 지반가속도를 나타내며, 행렬 A, B, H 는 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}D \end{bmatrix} H = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}E \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서, M, C, K, D, E 는 각각 질량, 점성, 강성, 제어기의 위치, 지진의 영향을 나타내는 행렬이다.

2.2 슬라이딩 표면의 설계

슬라이딩 모드 제어는 구조물 응답의 궤적을 슬라이딩 표면으로 보내고, 그 표면에 머무르도록

제어기를 설계한다. 슬라이딩 표면에서 구조물은 안정적인 거동을 보이며, 다음과 같이 상태 변수의 선형조합으로 정의된다.

$$S = PZ = 0 \tag{3}$$

여기서, S 는 r -벡터이며 r 은 제어기의 숫자를 나타낸다. P 는 슬라이딩 표면에서의 운동이 안정하도록 결정되는 $(r \times 2n)$ 행렬이다. P 를 결정하는 방법은 고유값 지정, LQR등이 있으며, 본 논문에서는 LQR방법에 의하여 다음 성능지수를 최소화하도록 P 를 결정하였다.

$$J = \int_0^{\infty} Z(t)QZ(t)dt \tag{4}$$

여기서, Q 는 $(2n \times 2n)$ 가중행렬이다.

2.3 Lyapunov²⁾ 방법을 이용한 제어기 설계

제어기는 상태변수의 궤적을 슬라이딩 표면 $S=0$ 으로 유도하도록 설계된다. 이렇게 설계하는 이유는 구조물이 슬라이딩 표면에 있다는 것이 안정적인 거동을 한다는 것을 의미하기 때문이다. 이 목적을 달성하기 위해 Lyapunov 함수 V 를 다음과 같이 설정한다.

$$V = 0.5S'S = 0.5Z'P'PZ \tag{5}$$

상태변수의 궤적 $t \rightarrow \infty$ 일 때, 슬라이딩 표면에 머무르기 위한 충분조건은 다음과 같다.

$$\dot{V} = S' \dot{S} \leq 0 \tag{6}$$

위 (6)식의 \dot{S} 에 상태방정식을 대입하면 Lyapunov 함수의 변화율은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S' \dot{S} = S' P(AZ + BU + E \ddot{x}_g) \\ &= S' PB[(PB)^{-1}PAZ + (PB)^{-1}PE \ddot{x}_g + U] \\ &= \lambda[U - G] \end{aligned} \tag{7}$$

여기서, λ 와 G 는 다음과 같다.

$$\lambda = S' PB = Z' P' PB \tag{8}$$

$$G = -[(PB)^{-1}PAZ + (PB)^{-1}PE \ddot{x}_g] \tag{9}$$

(8)식으로부터 λ 는 상태변수에 상수를 곱해 형성되는 1차 선형 공간을 나타냄을 알 수 있다. 제어력이 λ 에 비례하는 형태가 되면 선형제어의 역할을 수행하고 LQR제어와 유사한 제어력을 발생하게 된다.

G 는 지진하중과 구조물의 응답에 의해 발생하는 힘을 표현하며, λ 의 부호와 같은 경우 이 힘은 상태변수의 궤적을 슬라이딩 표면으로 보내고, 다른 경우는 멀어지게 하는 역할을 한다.

질량, 점성, 강성이 각각 m , c , k 인 단자유도 시스템에서 가중함수를 (10)식과 같이 설정하여 각 설계변수의 영향을 알아본다. Q 를 (10)식과 같이 설정하는 것은 최소로 할 성능지수가 구조물의 에너지인 것을 의미한다.

$$Q = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (10)$$

슬라이딩 표면은 다음 (12)식과 같다.

$$P = [\omega \quad 1] \quad (11)$$

$$S = \omega x + \dot{x} = 0 \quad (12)$$

여기서, $\omega = \sqrt{k/m}$

변수 λ 와 G 는 다음과 같다.

$$\lambda = m^{-1}[\omega \quad 1]Z \quad (13)$$

$$G = [k \quad c - m\omega]Z + m \ddot{x}_g \quad (14)$$

(13)식에서, λ 는 힘의 단위가 아니므로, 제어력 산정에 이용하는 경우 상수를 곱하여 크기를 조절하여야 함을 알 수 있다(gain margin^{1), 2)} δ 사용). (14)식에서 G 는 힘의 단위와 같고, 구조물에 내재하는 힘과 지진에 의한 관성력을 나타낸다.

지진과 구조물의 강성, 점성, 질량이 Lyapunov 함수의 변화율에 미치는 영향을 알아보기 위해 제어력이 존재하지 않는 경우의 Lyapunov 함수의 변화율을 구해본다.

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\omega^3 x^2 + \omega \dot{x}^2 - m^{-1}c \dot{x}^2 \\ & - m^{-1}c\omega x \dot{x} + \omega x \ddot{x}_g + \dot{x} \ddot{x}_g \end{aligned} \quad (15)$$

정상상태에서 변위의 크기에 대한 속도의 크기의 비가 ω 이고, 속도, 변위, 지반가속도가 모두 서로 관계가 없다면 (15)식의 평균값은 다음과 같다.

$$E\{\dot{V}\} = -m^{-1}c \sigma_x^2 = -2\omega\xi \sigma_x^2 \quad (16)$$

구조물의 강성과, 질량은 각각 독립적으로 Lyapunov 함수의 변화율에 영향이 없고, 구조물의 진동수와 감쇠비가 클수록 변화율이 음의 방향으로 증가하여 상태변수의 궤적이 빨리 슬라이딩 표면으로 접근하게 된다.

2.4 기존식¹⁾ 검토

슬라이딩 모드 제어에서 사용되고 있는 제어력에 대한 기존식을 검토하면 다음과 같다.

$$1) U_1 = -\delta\lambda + G \quad (\delta > 0) \quad (17)$$

$$\dot{V} = -\delta\lambda^2 \quad (18)$$

슬라이딩 표면으로 점근적으로 접근하게 만드는 제어기로 구조물에 내재하는 힘과 지진에 의한 관성력의 영향, 즉 G 의 영향을 없앤 후, 슬라이딩 표면으로 구조물을 보내도록 하는 역할을 수행한다. 상태변수와 외란에 선형 제어이득을 곱한 형태로 선형제어기가 된다.

그러나, 이 제어기는 G 가 긍정적인 역할을 하는 순간에도 이를 없애기 때문에 불합리한 점을 가지고 있다. 또한, G 에 따라 제어력이 불합리하게 커질 수 있으므로 해석시 항상 제어기의 성능인 최대제어력을 고려하여야 한다.

$$2) \quad U_2 = 0.5[1 - \text{sgn}(\lambda \cdot G)] U_1 \quad (19)$$

여기서, $\text{sgn}(\cdot)$ 은 변수의 부호를 나타내는 함수이다. 즉, 양의 값인 경우 1, 음의 값인 경우 -1, 0인 경우 0을 출력한다. 제어력 U_2 는 U_1 의 불합리한 점을 개선하기 위해, 구조물의 응답과 외란으로 표현되는 G 가 λ 와 같은 방향인 경우는 제어를 하지 않아 구조물 스스로 슬라이딩 표면으로 가까이 가도록 하며, 다른 경우에만 제어한다. 그러나, 구조물 스스로 가는 힘이 매우 작은 경우에도 제어를 하지 않는 불합리한 점을 가지고 있다.

$$3) \quad U_3 = \begin{cases} -\bar{U}_{\max} H(|\lambda| - \varepsilon_0); & \text{if } \lambda_i > 0 \\ +\bar{U}_{\max} H(|\lambda| - \varepsilon_0); & \text{if } \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (20)$$

여기서 $H(\cdot)$ 는 단위 스텝 함수(step function)이다. (7)식으로부터, λ 와 반대부호의 제어력이 구조물을 슬라이딩 표면으로 보내는 역할을 함을 알 수 있다. 따라서, 제어기의 성능을 가장 많이 사용하고 가장 큰 응답감소를 얻을 수 있는 제어는 항상 λ 와 반대방향으로 최대제어력을 주는 뱅뱅제어라 할 수 있다. 그러나, 뱅뱅제어는 제어가 크게 요구되지 않은 순간에도 최대제어력이 발휘되며, 제어장치에 따라 제어력 구현에 문제가 발생할 수 있다. 그리고, 채터링(chattering)현상²⁾을 막기 위해 항상 λ 의 절대값이 ε_0 보다 작은 구간에서는 제어를 하지 않아야 한다.

2.5 해석예제

제어력을 산정하는 기존의 식들을 비교하기 위해 단자유도 시스템에 대한 수치해석을 수행한다. 해석에 사용한 구조물의 질량, 강성, 그리고 점성은 각각 10 ton, 98 kN/m, 1407Ns/m이고, 가진하중은 EI Centro 지반가속도를 사용하였다. 설계 파라미터들은 다음과 같다. $\delta = 2.31 \times 10^{-8}$, $U_{\max} = 15000N$, $\varepsilon_0 = 3.24 \times 10^{-6}$. 전술한 바와 같이 λ 가 힘의 단위가 아니기 때문에, λ 에 대한 이득 δ 를 (21)식과 같이 설정하여 λ 에 비례하는 제어력의 크기를 조정하였다. ε_0 는 비제어시 λ 값의 표준편차의 5%로 설정하였다.

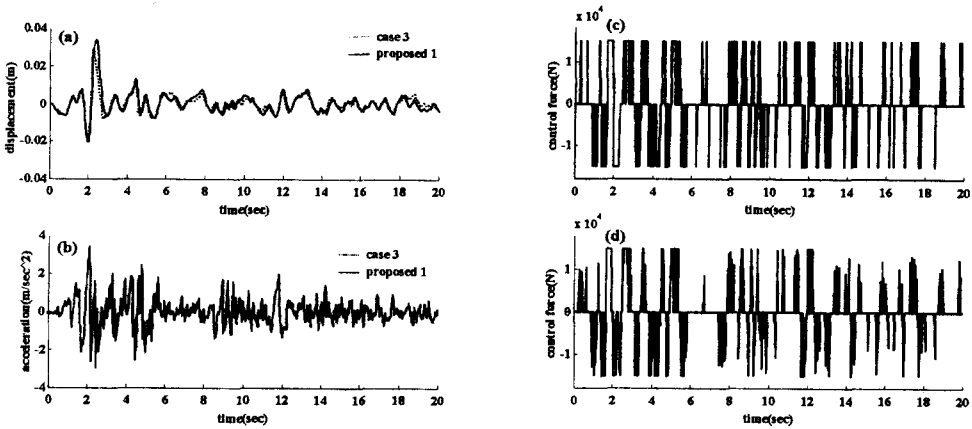
$$\delta = U_{\max} / \sigma_{\lambda_0} \quad \varepsilon_0 = 0.05 \sigma_{\lambda_0} \quad (21)$$

3.1 제안 1

Lyapunov 함수의 변화율이 $|\lambda|$ 에 선형으로 비례하는 형태가 되도록 제어력을 설정한다. 이것은 구조물의 응답이 슬라이딩 표면^{2),4)}에서 떨어질수록 즉 λ 의 크기가 커질수록 변화율이 음의 방향으로 증가하여 빨리 슬라이딩 표면으로 보내짐을 의미한다. 이 경우 제어력은 뱅뱅제어와 유사한 경향을 나타내며, Lyapunov 함수의 변화율과 제어력은 다음과 같다.

$$V = \lambda(U - G) \leq -K_1|\lambda| \quad (K_1 > 0) \quad (22)$$

$$u_i = \begin{cases} 0 & ; \text{if } |\lambda| < \varepsilon_0 \text{ or } \lambda_i G_i \geq K_1|\lambda| \\ -K_1 \text{sgn}(\lambda_i) + G_i & ; \text{if } |\lambda| \geq \varepsilon_0 \text{ or } \lambda_i G_i < K_1|\lambda| \end{cases} \quad (23)$$

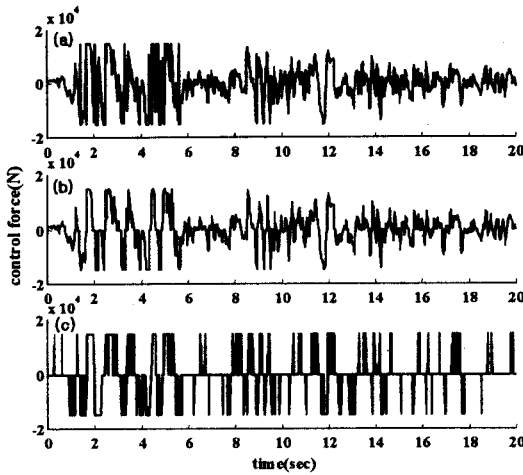


(a)변위, (b)가속도, (c) U_3 , (d)제안식 1에 의한 제어력

그림 3 제안식 1과 U_3 에 의한 응답비교

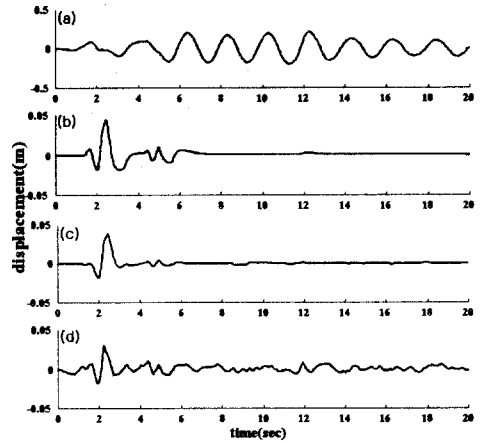
제안식 1은 뱅뱅제어와 유사한 거동을 보이지만, 제어력이 불필요한 구간은 제어를 하지 않으며, 어느 정도의 작은 제어력이 요구되는 구간은 최대제어력이 아니라 꼭 목표 값에 모자라는 만큼의 제어력만 발휘하여, 불필요하게 큰 제어력이 발생하는 것을 방지하였다.

그림 3에서, 제안식 1에 의한 제어력은 기존의 뱅뱅제어와 유사한 제어력을 나타내지만, 전체적인 제어력의 크기가 작다. 그러나, 변위 응답과 가속도 응답을 비교할 때, 작은 제어력을 가지고도 동등한 제어효과가 있다. 따라서, 제어력 없이 지진과 구조물의 내력으로 Lyapunov함수의 변화율을 원하는 목표 수준까지 얻을 수 있다면, 제어하지 않아도 제어한 경우와 거의 동등한 응답감소효과를 얻을 수 있다. 해석에 사용한 K_1 은 최대제어력 50% 인 7500으로 설정하였다.



(a) U_1 , (b) U_2 , (c) U_3

그림 1 제어력 비교



(a) 비제어시, (b) U_1 , (c) U_2 , (d) U_3

그림 2 단자유도 시스템의 변위 응답.

수치해석결과, 변위응답의 최대값은 비제어시, U_1 , U_2 , U_3 인 경우가 각각 0.2138m, 0.0446m, 0.0375m, 0.0290m이다. 그리고, 제어력의 최대값은 제어한 세 가지 경우 모두 제어력의 한계값 15000N에 이르렀고, RMS 값은 각각 6328.9N, 5995.1N, 7518.7N을 보였다. 뱅뱅제어를 한 U_3 의 경우, 가장 큰 응답감소를 보였으나, 제어력이 평균적으로 매우 크게 요구되며 급격한 방향변화를 보이는 문제점을 가지고 있다. U_1 은 G 가 긍정적인 역할을 하는 순간에도 이를 없애기 때문에, G 가 λ 와 같은 방향인 경우는 제어를 하지 않아 구조물 스스로 슬라이딩 표면으로 가까이 가도록 하는 U_2 보다 큰 제어력을 가지고도 변위의 최대값은 오히려 커짐을 알 수 있다. 따라서, U_1 은 앞으로의 해석에서 고려하지 않으며, U_2 , U_3 의 경우를 제안식과 비교하기로 한다.

3. 제어력에 대한 제안

기존의 제어력 산정식은 Lyapunov 함수의 변화율이 음수라는 조건만 만족하도록 제어기 설계를 수행하여 제어기의 성능을 충분히 활용하지 못한다. 또한 제어기의 성능을 극대화하기 위해 사용하는 뱅뱅제어의 경우, 불필요하게 큰 제어력이 발생하는 문제점을 가지고 있다.

따라서, 본 논문에서는 Lyapunov 함수의 변화율의 목표 값을 정해놓고, 이를 제어력이 없이도 달성할 수 있는 구간은 제어를 하지 않으며, 달성할 수 없는 구간은 목표 값에 모자라는 만큼의 제어력만을 발생시키도록 하여 제어의 효율을 높이도록 하였다. 해석에 사용한 건물의 사양은 기존식을 비교하기 위해 사용한 건물의 사양과 같다

표 1. 제안식 1 과 U_3 에 의한 제어효과 비교

	U_3	제안식 1
변위 최대값(m)	0.0290	0.0340
가속도 최대값(m/s ²)	3.3828	3.4436
제어력 RMS(N)	7518.7	6453.5

3.2 제안 2

Lyapunov 함수의 변화율이 λ^2 에 비례하는 형태가 되도록 제어력을 설정한다. 제안 1의 경우 뱅뱅제어와 유사하여 제어기의 성능을 최대한 활용하지만 제어력의 방향이 급격하게 변하기 때문에, 이를 개선하기 위해 제안된 식으로 제안식은 선형제어와 유사한 거동을 보이며 Lyapunov 함수의 변화율과 제어력은 다음과 같다

$$V = \lambda(U - G) \leq -K_2 \lambda^2 \quad (K_2 > 0) \quad (24)$$

$$u_i = \begin{cases} 0 & ; \text{if } \lambda_i G_i \geq K_2 \lambda_i^2 \\ -K_2 \lambda_i + G_i & ; \text{if } \lambda_i G_i < K_1 \lambda_i^2 \end{cases} \quad (25)$$

선형제어와 유사한 거동을 보이지만 제안 1과 같이 제어력이 불필요한 구간은 제어를 하지 않으며, 어느 정도의 작은 제어력이 요구되는 구간은 최대제어력이 아니라 꼭 목표 값에 모자라는 만큼의 제어력만 발휘한다.

그림 4의 변위 응답에서, 제안식 2에 의한 제어는 제어력이 꼭 필요한 구간, 즉 최대응답이 발생하는 구간에서는 기존식 U_2 보다 큰 제어력을 발생시켜 응답의 최대값을 감소시키고, 응답이 작은 구간에서는 작은 제어력을 발생시켜 응답이 기존식보다 커짐을 알 수 있다. 가속도 응답은 두 가지 경우가 거의 비슷한 결과를 보였다.

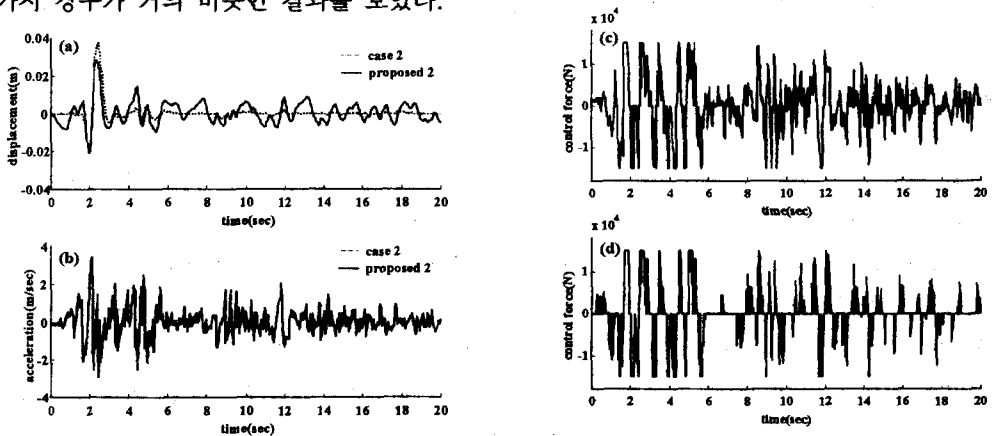


그림 4 제안식 2와 U_2 비교 (a)변위, (b)가속도, (c) U_3 , (d)제안식 1에 의한 제어력

표 2. 제안식 2와 U_2 에 의한 제어효과 비교

	U_2	제안식 2
변위 최대값(m)	0.0375	0.0284
가속도 최대값(m/s ²)	3.4370	3.4453
제어력 RMS(N)	5995.1	5743.6

4. 결론 및 추후 연구과제

본 논문에서는 슬라이딩 모드 제어기법을 사용하여 지진하중을 받는 건물구조물에 대한 수치해석을 수행하였다. 슬라이딩 모드 제어에서 사용하는 설계변수의 특성과 기존의 제어력 산정식을 비교 검토하였고, 새로운 제어력 산정식을 제안하였다. 본 연구에서 얻어진 결론은 다음과 같다.

- 1) 슬라이딩 모드 제어에서 사용하는 Lyapunov 함수의 변화율에 목표치를 설정함으로써 다양한 제어기 설계가 가능하며, 기존식의 문제점을 개선할 수 있다.
- 2) 제안식 1과 기존의 뱅뱅제어 U_3 를 비교할 때, 제안식에 의한 제어가 작은 제어력을 가지고도 변위 응답과 가속도 응답의 제어효과면에서 기존식과 거의 동등한 성능을 보인다.
- 3) 제안식 2와 기존식 U_2 를 비교할 때, 제안식에 의한 제어는 응답이 큰 구간에서는 기존식보다 큰 제어력을 발생시키고, 응답이 작은 구간에서는 작은 제어력을 발생시켜, 전체적으로 작은 제어력을 가지고도 변위 응답의 최대값을 기존식보다 크게 감소시킬 수 있다.

제안식 모두 제어력 산정에 지진이 포함된 G 를 사용하였다. 따라서, 제어력의 최대값에 비해 G 가 상대적으로 큰 경우, 제어하는 구간은 급격히 방향이 바뀌는 뱅뱅제어에 가깝게 되므로 이를 설계에 고려하는 연구가 필요하다.

감사의 글

본 연구는 한국 과학재단 특정기초연구 과제(과제번호: 1999-1-310-001-3)의 일환으로 수행되었으며, 과학재단의 연구비 지원에 대해서 감사드립니다.

참고문헌

1. J.N.Yang, J.C.Wu and A.K.Agrawal, "Sliding Mode Control for seismic-excited linear and nonlinear structures", Technical Report NCEER-94-0017, 1994
2. Slotine JJE, Li W, "Applied Nonlinear Control". Prentice-Hall:Englewood Cliffs, NJ,1991
3. Khalil HK, "Nonlinear Systems".Prentice-Hall:Upper Saddle River, NJ, 1996
4. R.A.DeCarlo, S.H.Zak, S.V.Drakunov. "Variable Structure, Sliding Mode Controller Design"