

# 스케일링-웨이블릿 신경회로망 구조

## The Structure of Scaling-Wavelet Neural Network

김성주\*, 서재용\*, 김용택\*, 조현찬\*\*, 전홍태\*

\*중앙대학교 전자전기공학부, \*\*한국기술교육대학교 정보기술공학부

Seong-Joo Kim\*, Jae-Yong Seo\*, Yong-Taek Kim\*, Hyun-Chan Cho\*\*, Hong-Tae Jeon\*

\*School of Electrical and Electronic Eng. Chung-Ang University

\*\*School of Information Tech. Korea Univ. of Technology and Edu.

E-mail : ksj1212@ms.cau.ac.kr

### Abstract

RBFN has some problem that because the basis function isn't orthogonal to each others the number of used basis function goes to big. In this reason, the Wavelet Neural Network which uses the orthogonal basis function in the hidden node appears.

In this paper, we propose the composition method of the actual function in hidden layer with the scaling function which can represent the region by which the several wavelet can be represented. In this method, we can decrease the size of the network with the pure several wavelet function. In addition to, when we determine the parameters of the scaling function we can process rough approximation and then the network becomes more stable. The other wavelets can be determined by the global solutions which is suitable for the suggested problem using the genetic algorithm and also, we use the back-propagation algorithm in the learning of the weights. In this step, we approximate the target function with fine tuning level.

The complex neural network suggested in this paper is a new structure and important simultaneously in the point of handling the determination problem in the wavelet initialization.

**Keywords** : Scaling Function, Wavelet Function, Neural Network, Wavelet Neural Network, Genetic Algorithm

### I 서론

웨이블릿 신경회로망은 RBF 회로망의 기준 함수들을 웨이블릿 이론(Wavelet Theory)의 웨이블릿 함수(Wavelet Function)로 대체하여 직교성을 갖는 기준 함수를 갖도록 한다. 이와 같이 구성된 웨이블릿 신경회로망은 RBF 신경회로망의 대부분의 장점을 유지하고, 알려지지 않은 함수에 대하여 효율적이고 고유한 망 구성을 제공한다.

함수 근사의 문제에 있어서 다중 분해 분석(Multi-Resolution Analysis)을 이용할 경우, 함수는 근사 정도 및 분해 정도에 따라 여러 단계로 분석될 수 있다. 근사 대상 함수를 포함하는 전체 영역은 스케일링 함수

와 웨이블릿 함수로 표현됨을 알 수 있다 [1]. 본 논문에서는 일반적인 웨이블릿 구조의 은닉층(Hidden Layer)에 적절히 선택된 하나의 스케일링 함수를 이용하여 대상 함수를 대강 근사(rough approximation)하며 몇 개의 웨이블릿 함수를 이용하여 대상 함수를 미세 근사(fine approximation)할 수 있는 스케일링 함수와 웨이블릿 함수로 구성된 복합 구조를 제안하며 각 함수의 파라미터를 적절히 구성하고 학습시키는 설계 알고리즘을 제안한다. 스케일링 함수와 웨이블릿 함수를 함께 은닉층에 구성할 수 있는 근거는 스케일링 함수와 웨이블릿 함수는 서로 직교성을 지니고 있기 때문에 상호 간섭의 여지가 없기 때문이다. 이런 구성을

적용할 경우, 장점은 스케일링 함수를 통한 대강 근사를 통하여 근사 대상 함수에 대한 웨이블릿 함수를 이용한 미세 근사를 용이하게 할 수 있다는 점과 전체 구조의 크기를 줄여나갈 수 있다는 점, 그리고 차원이 증가하더라도 전체 구조의 크기에 커다란 변화없이 근사할 수 있다는 점이다.

제안한 스케일링-웨이블릿 복합 신경회로망의 최적 구조 설계 알고리즘은 스케일링 함수 선택, 웨이블릿 신경회로망의 기준 함수 구성, 복합 신경회로망 학습의 세 과정으로 구성되어 있다.

## II 본론

### 2.1 스케일링 함수, 웨이블릿 함수 그리고 다중 분해 분석

근사 대상 함수를 다중 분해 분석을 이용하여 분석할 경우, 낮은 분해도의 분석과 높은 분해도의 분석이 가능함을 알 수 있다. 이런 사실을 근거로, 근사 대상 함수를 스케일링 함수와 웨이블릿 함수의 복합적인 구성으로 보다 효율적으로 근사할 수 있다.

다중 분해 분석(Multi-Resolution Analysis : MRA)을 이해하기 위하여, 먼저 스케일링 (scaling) 함수를 정의하고, 이로부터 웨이블릿 (wavelet) 함수를 정의하기로 한다. 이차원 스케일링 함수의 집합은 다음과 같은 정수 팽창 (dilation) 변수와 이동(translation) 변수에 의하여 정의된다[1][2][3].

$$\varphi_{m,n}(x) = \varphi(2^m x - n) \quad (1)$$

임의의 함수  $f(x) \in V_m$ 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(x) = \sum_n a_n \varphi(2^m x - n) \quad (2)$$

$m > 0$ 일 때,  $m$ 이 커질수록  $\varphi_{m,n}(x)$ 의 폭은 좁아지고 작은 간격으로 이동되기 때문에 더욱 정밀한 표현이 가능하고 그 부분공간 또한 커진다. 따라서 부분 공간간의 다음의 포함관계를 이끌어낼 수 있고, 다중 분해 분석의 고유한 성질인 다음의 두 결과를 얻을 수 있다.

$$f(x) \in V_m \Leftrightarrow f(2x) \in V_{m+1} \quad (3)$$

$$\varphi(x) = \sum_n a_n \varphi(2x - n) \quad (4)$$

부분공간  $V_{m+1}$ 과  $V_m$ 의 직교 웨이블릿 여공간  $W_m$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$V_m \cap W_m = 0, V_m \oplus W_m = V_{m+1} \quad (5)$$

여기서, 부분공간  $W_m$ 은 웨이블릿 함수  $\psi_{m,n}(x) = \psi(2^m x - n)$ 에 의하여 표현되는 공간이다. 이를 이용하면  $L^2(R)$ 공간은 다음

과 같이 분해될 수 있다.

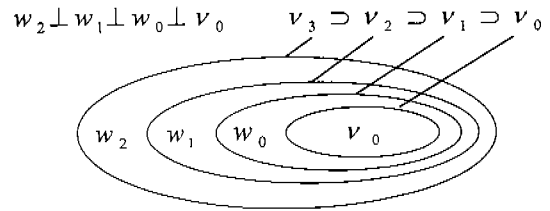


그림 1 스케일링 함수와 웨이블릿 벡터 공간

그림1은 다른 스케일  $m$ 에 대한 스케일링 함수 공간  $V_m$ 과 웨이블릿 공간이 어떻게 나누어지는가를 보여준다.

여기서, 웨이블릿  $\psi(x)$ 은 다음 식과 같이 스케일링 함수로부터 일반화된다.

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k h(k) \varphi(2x - k) \quad (6)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_1(k) \varphi(2x - k) \quad (7)$$

여기서, 웨이블릿 계수는 스케일링 함수 계수와 다음 식과 같이 직교한 관계를 요구한다.

$$h_1(k) = (-1)^k h(1-k) \quad (8)$$

식(8)에 의해 일반화된 함수는  $L^2$ 공간의 정규 직교 기저(orthonormal basis)를 형성하는 다음 형식의 원형(prototype or mother) 웨이블릿을 만든다.

$$\psi_{m,n}(x) = 2^{m/2} \psi(2^m x - n) \quad (9)$$

이로부터  $L^2(R)$ 공간의 임의의 함수  $f(x)$ 가 다음과 같이 두 가지로 분해됨을 알 수 있다.

$$f(x) = \sum_n c(n) \varphi_{m_0,n}(x) + \sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_n d_m(n) \psi_{m,n}(x) \quad (10)$$

여기서,  $c(n)$ ,  $d_m(n)$ 은 각각 스케일링 함수와 웨이블릿 함수의 적절한 계수이며,  $m_0$ 는 가장 낮은 분해능(resolution)을 표시하는 임의의 정수이다.

최종적으로 웨이블릿 함수의 이산화된 형태는 다음과 같다.

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} x - nb_0) \quad (11)$$

본 논문에서는 유전 알고리즘을 사용하여 팽창과 이동 변수를 선택하고, 가중치의 학습을 위하여 기준의 역전과 학습 알고리즘을 사용한다.

### 2.2 스케일링-웨이블릿 복합 신경회로망 설계

스케일링-웨이블릿 복합 구조는 그림2의 은닉층을 구성하는 웨이블릿 함수들 중 하나를 스케일링 함수로 대체하여 구성할 수 있다.

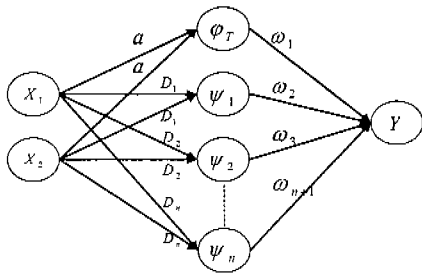


그림 2 복합 신경망의 구조

그림에서  $D_1, D_2, \dots, D_n$ 은 각각  $1, 2, \dots, n$ 번째 웨이블릿의 신축 계수이며,  $\phi_T$ 는 이동 계수를  $T$ 로 하는 스케일 함수이며 자체적으로 스케일 변수,  $a$ 를 포함하고 있으며, 식(6)과 같은 형태이다. 또한,  $\psi_n$ 는 웨이블릿 함수를 표현하며 식(7)과 같은 형태이다. 각 은닉층과 출력층 사이의 가중치는  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n+1}$ 로 표현되며 여기서  $n$ 은 웨이블릿만으로 이루어진 은닉층의 개수이다.

본 논문에서는 스케일링 함수와 웨이블릿 함수 사이에 연관성이 강하며 시간 축에서 스케일링 함수와 웨이블릿 함수를 모두 동일하게 표현할 수 있는 싱크(Sinc)함수를 기본으로 하여 싱크 스케일링 함수(Sinc Scaling Function)와 싱크 웨이블릿 함수(Sinc Wavelet Function)를 결정한다.

결정된 스케일링 함수의 스케일 변수와 이동 변수는 대상 함수와의 단순 비교를 통하여 대강 근사를 이룰 수 있는 최소한의 값을 부여한다. 근사 대상 함수의 시간축에서의 범위와 함수값의 범위를 근거로 하여 스케일 변수와 이동 변수를 결정하였다.

2.3 유전알고리즘

[단계 1] 스케일링 함수 변수 결정

[단계 2] 각 개체의 초기화

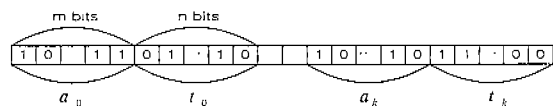


그림 3 각 개체의 초기화

[단계 3] 망 고정 및 적합도 평가

각 개체의 적합도 값은 변환된 팽창과 이동으로 대체할 수 있다.

$$fitness = 1 / (\sqrt{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - g(x_i))^2 / n + 1})$$

[단계 4] 새로운 집단 생성

교배와 돌연변이는 각각 단순 교배와 다점 돌연변이가 사용되었다.

[단계 5] 원하는 적합도 값이 얻어질 때까지

상기 단계를 반복한다.

[단계 6] 최종적으로 얻어진 개체의 팽창과 이동값과 스케일링 변수를 이용하여 스케일링-웨이블릿 복합 신경회로망을 고정시켜 최적 구조를 결정한 후 은닉층과 출력층 사이의 가중치 값을 역전과 학습 알고리즘을 이용하여 충분히 학습을 수행한 후 모의실험을 종료한다.

2.4 모의실험

스케일링-웨이블릿 복합 신경회로망에 사용된 스케일링 함수는 싱크 함수  $\phi(t) = \sin(\pi t) / \pi t$  를 사용했고, 웨이블릿 함수는 싱크 스케일링 함수에서 유도된 싱크 웨이블릿 함수  $\psi(t) = (2\sin(\pi t) - \sin(2\pi t)) / \pi t$ 이다. 근사 대상 함수  $f(x)$ 는 구간  $[-10, 10]$ 에서 다음과 같이 구간별로 정의된 함수이다.

$$f(x) = \begin{cases} -2.186x - 12.864 & , -10 \leq x < -2 \\ 4.246x & , -2 \leq x < 0 \\ 10e^{-0.05x - 0.5} \cdot \sin[(0.03x + 0.7)x] & , 2 \leq x \leq 10 \end{cases} \quad (12)$$

유전 알고리즘에 사용된 제어 파라미터들은 표1과 같으며 스케일링으로 구성된 한 개의 뉴런과 웨이블릿으로 구성된 7개, 총 8개의 뉴런을 사용하였다.

표 1 유전 알고리즘의 제어 파라미터

개체군 크기	교배율	돌연변이율
60	100 %	65 %

비교 대상인 다층 전방향 신경회로망에는 총 10개의 뉴런을 사용했고 활성화 함수는 다음과 같은 시그모이드 함수를 사용하였다.

$$\sigma(x) = 1 - e^{-x} / 1 + e^{-x} \quad (13)$$

역전과 학습의 학습률  $\eta$ 는 0.05를 사용하였고, 총 2000번의 반복 학습을 수행하였다.

직교 기저 웨이블릿 신경 회로망의 웨이블릿 함수로는 직교 기저 스케일링 함수로 널리 알려진 식(14)와 같은 싱크 함수를 사용하였다.

$$\phi(x) = \sin x / x \quad (14)$$

여기서, 단일 팽창은  $2^{-1}$ 을 사용하였고 총 11개의 뉴런을 사용하였다.

결과에서 확인할 수 있듯이 유전 알고리즘에 의하여 구성된 스케일링-웨이블릿 복합 신경회로망이 적은 수의 뉴런으로도 더 좋은 근사 결과를 나타냄을 알 수 있다.

2.5 모의실험 결과

유전 알고리즘을 이용하여 적합한 웨이블릿 변수를 결정할 수 있었으며, 대상 함수의 근사 결과를 비교하였을 때, 다차원 전방향 신경회로망 또는 직교기저 웨이블릿망을 사용하여 대상 함수를 근사한 결과보다 본 논문에서 제안한

알고리즘에 의해 설계된 스케일링-웨이블릿망을 이용하여 근사한 결과가 보다 나은 것을 알 수 있다.

표 2 설계 알고리즘으로 구한 팽창과 이동

뉴런	1	2	3	4	5	6	7
팽창	$2^{-2}$	$2^{-2}$	$2^{-1}$	$2^0$	$2^{-2}$	$2^{-1}$	$2^{-1}$
이동	0.0	-4.0	0.0	7.0	3.0	2.0	3.0

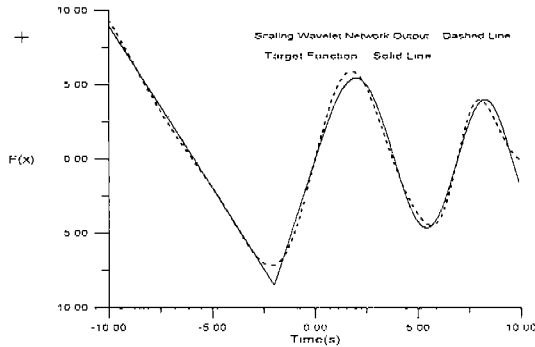


그림 4 제안한 복합 신경회로망 근사 결과

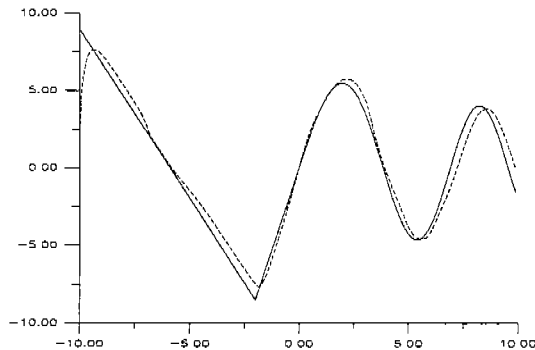


그림 5 다차원 전방향 신경망의 근사 결과

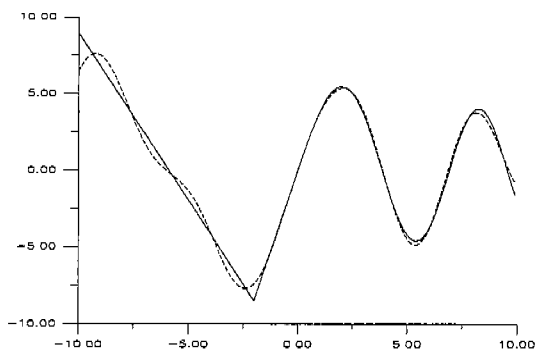


그림 6 직교기저 웨이블릿망의 근사 결과

### III. 결론

다중 분해 분석을 통해 낮은 수준 분해도의 분석을 통한 대강 근사와 높은 분해도의 분석을 통해 미세 근사를 시도하기 위해 본 논문에서는 스케일링-웨이블릿 복합 신경회로망을 제

안하였으며 스케일링-웨이블릿 복합 신경회로망의 팽창과 이동을 최적으로 구성하고 학습시키는 알고리즘을 제안하였다. 이와 같이 구성된 스케일링-웨이블릿 복합 신경회로망이 임의의 비선형 함수에 대한 근사화 실험 결과에서 기존의 다차원 전방향 신경회로망이나 직교 기저 웨이블릿 신경회로망보다 더 적은 뉴런수로도 더 좋은 근사 결과를 나타냄을 확인하였다. 그러나, 일반적으로 스케일링-웨이블릿 복합 신경회로망은 입력 차원이 높아질수록 많은 수의 뉴런이 필요하며 이는 곧 유전 알고리즘이 탐색해야 할 해 공간이 늘어나게 되어 최적해가 아닌 공간으로 수렴할 가능성 또한 늘어난다고 할 수 있다. 따라서, 향후에는 이와 같은 문제점을 극복할 수 있도록 보다 발전된 형태의 유전 알고리즘이나 다른 탐색 알고리즘을 적용하여 해 공간 탐색의 효율성 및 정확성을 높이는 방향으로의 연구가 필요하다.

### IV 참고문헌

- [1] Jaideva C. Goswami and Andrew K. Chan, *Fundamentals of Wavelets*, Wiley Interscience, 1999.
- [2] Martin Vetterli and Jelena Kovacevic, *Wavelets and Subband Coding*, Prentice Hall, 1995.
- [3] C. S. Burrus, R. A. Gopinath, and H. Guo, *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms*. Upper Saddle River, NT : Prentice-Hall, 1998.
- [4] Q. Zhang and A. Benveniste, "Wavelet networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 3, pp. 889-898, Nov. 1992.
- [5] B. Delyon, A. Juditsky, and A. Benveniste, "Accuracy analysis for wavelet approximations" *IEEE Trans. Neural Network*, vol. 6, pp. 332-348, Mar. 1995.
- [6] Q. Zhang, "Using Wavelet network in nonparametric estimation," *IEEE Trans. Neural Network*, vol. 8, pp. 227-236, Mar. 1997.
- [7] Y. C. Pati and P. S. Krishnaprasad, "Analysis and synthesis of feedforward neural network using discrete affine wavelet transformations," *IEEE Trans. Neural Network*, vol. 4, pp. 73-85, Jan. 1993.
- [8] L. Davis, *Handbook of Genetic Algorithm*, Van Nostrand Reinhold, 1991
- [9] Seung-Jin Seo and Hong-Tae Jeon, "Wavelet network for stable direct adaptive control of nonlinear systems," *Proceedings of the ITC-CSCC'99*, vol. 1, pp. 332-335, July. 1999.