

# UDWT을 이용한 경계법에 기초한 노이즈 제거에 관한 연구

배 상 범\*, 김 남 호\*, 류 지 구\*\*

\* 부경대학교 제어계측공학과, \*\* 부경대학교 전자공학과

## A Study on Threshold-based Denoising by UDWT

Sang Bum Bae\*, Nam Ho Kim\*, Ji Goo Ryu\*\*

\* Dept. of Control and Instrumentation Eng., Pukyung National Univ.

\*\* Dept. of Electronics Eng., Pukyung National Univ.

### Abstract

This paper presents a new threshold-based denoising method by using undecimated discrete wavelet transform (UDWT). It proved excellency of the UDWT compared with orthogonal wavelet transform (OWT), spatially selective noise filtration (SSNF) and NSSNF added new parameter.

Methods using the spatial correlation are effectual at edge detection and image enhancement, whereas algorithm is complex and needs more computation. However, UDWT is effective at denoising and needs less computation and simple algorithm.

### I. 서론

산업 사회가 디지털 정보화 시대로 급속히 변함에 따라 각종 신호처리를 위한 통신 기술이 발전하고 있지만, 여전히 데이터를 디지털화하거나 전송하는 과정에서 여러 가지 노이즈가 발생하고 있다. 이러한 노이즈를 제거하기 위한 연구는 지난 30여년 간 계속되어왔고, 아직도 노이즈를 완벽하게 제거하는 기법은 존재하지 않으며, 각 분야에 따라 적절한 제거 기법을 개발하여 사용하고 있다.

최근 신호처리 전반에 걸쳐 널리 이용되고 있는 웨이블릿 변환은 시간 및 주파수 국부성을 갖고 있으며, 본 논문에서는 공간적 상관도를 이용한 노이즈 제거 방법(SSNF), 새로운 파라메타를 도입한 NSSNF, 그리고, soft-threshold를 적용한 OWT등의 기존의 방법과 본 논문에서 제안한 hard-threshold를 적용한 UDWT를 소개하고, 이들을 비교 분석하였으며, 개선효과의 판단 기준으로 SNR을 사용하였다.

### II. 각 scale에서 화이트 가우시안 노이즈의 표준편차 $\sigma_m$

그림 1로부터 X가 AWGN  $x \sim N(0, \sigma^2)$  라고 가정하면,  $W_1 = X * G_0$ 의 분산은 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= D(W_1) = D(X * G_0) \\ &= \|g_n^0\|^2 \cdot D(X) = \sigma^2 \|g_n^0\|^2 \end{aligned} \quad (1)$$

그림 1의 피라미드 분해 구조로부터, 식 (2)의  $m$  번째 웨이블릿 변환 데이터의 분산을 구할 수 있다.

$$\sigma_m^2 = \sigma^2 \|h_n^0 * h_n^1 * \dots * h_n^{m-2} * g_n^{m-1}\|^2 \quad (2)$$

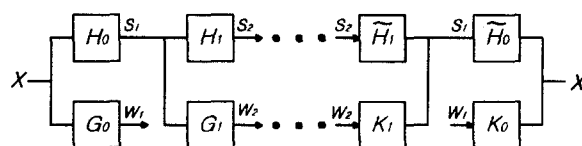


Fig. 1. Decomposition and Reconstruction.

### III. 공간적 상관도를 이용한 노이즈 제거

일반적으로, 각 scale에 대해서 경계선의 edge는 노이즈에 의한 edge보다 큰 값을 가지며, 또한 노이즈의 edge는 scale에 따라서 급속히 감소할 것이라는 사실에 기초한 식 (3)의 공간적 상관관계  $Corr_1(m, n)$ 는 노이즈의 작고 날카로운 edge 성분을 억제하는 동안, 중

요시되는 신호의 특징과 edge가 강화되도록 한다.

$$Corr_l(m, n) = \prod_{i=0}^{l-1} W(m+i, n) \quad (3)$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

여기서,  $W(m, n)$ 은 웨이브렛 변환 데이터,  $m$ 은 scale index,  $l < M - m + 1$ ,  $n$ 은 진이 index,  $M$ 은 scale의 총수이며, 일반적으로  $l = 2$ 를 선택한다.

SSNF 알고리즘[2]는 다음과 같이 설명되며, 여파된 데이터는  $W_{new}(m, n)$ 로 표현한다.

- 1) 모든 웨이브렛 scale  $m$ 에 대해서, 공간적 상관함수  $Corr_2(m, n)$ 을 계산한다.
- 2)  $\{W(m, n)\}$ 과  $\{Corr_2(m, n)\}$ 의 파워를 공식화하여,  $\{New\ Corr_2(m, n)\}$ 를 얻는다.

$$New\ Corr_2(m, n)$$

$$= Corr_2(m, n) \sqrt{PW(m)/PCorr(m)}$$

$$PCorr(m) = \sum_n Corr_2(m, n)^2$$

$$PW(m) = \sum_n W(m, n)^2$$

- 3) 만약,  $|New\ Corr_2(m, n)| \geq |W(m, n)|$ 이면, 그 점을 edge로 받아들인다.  
그러나, fine scale에서 노이즈는 경계선에 의한 edge를 제외하고는 지배적이므로,  $|W(m, n)|$ 와  $|New\ Corr_2(m, n)|$ 를 비교한다면, 상당히 많은 노이즈는 edge처럼 구해질 것이다. 이 경우를 피하기 위해, NSSNF에서는 가중치  $|\lambda(m)|$ 을 도입하여, 다음 식을 만족할 때  $W(m, n)$ 을 edge로써 받아들이고,  $W(m, n)$ 을  $W_{new}(m, n)$ 에 옮긴다.

$$|New\ Corr_2(m, n)| \geq \lambda(m) |W(m, n)|$$

- 4)  $m$ 번째 웨이브렛 scale에서  $W(m, n)$ 의 파워가 어떤 reference 노이즈 파워와 거의 동등할 때까지 2)와 3)을 반복한다.

최종적으로, 어떤 scale에서 벡터  $W_{new}(m, n)$ 를 얻고,  $W_{new}(m, n)$ 를 이용하여 신호를 재건한다. 여기서, original 노이즈가 화이트 가우시안이라고 가정하여

reference 노이즈 파워를 제시한다.

$\sqrt{PX/N}$ 은 수열  $X \sim N(0, \sigma^2)$ 에 대해서  $\sigma$ 의 점근적인 추정치이며,  $K$  지점이 구해졌다고 가정할 때,  $W'(m, n)$ 은  $W(m, n)$ 에서 구해지지 않은 지점들을 의미한다. 만약,  $W'(m, n)$ 이 노이즈에 의해 생성됐다면,  $PW'(m)/(N-K)$ 은  $\sigma_m^2$ 의 점근적인 추정치이며,  $(N-K)\sigma_m^2$ 은 reference 노이즈 파워로서 사용될 수 있다. 실제로,  $W'(m, n) = W_s'(m, n) + W_n'(m, n)$ 이며,  $W_s'(m, n)$ 과  $W_n'(m, n)$ 은 각각 원신호와 노이즈의 웨이브렛 변환이다. 그리고,  $W'(m, n)$ 의 파워는 식 (4)로 정의될 수 있으며,  $E\{W_s'(m, n)^2\}$ 는 항상 양이고, scale에 따라서 증가할 것이지만,  $\sigma_m^2$ 은 scale에 따라서 줄어든다.

$$PW'(m) = (N-K) \cdot E\{W'(m, n)^2\}$$

$$= (N-K) \cdot E\{W_s'(m, n)^2$$

$$+ W_n'(m, n)^2$$

$$+ 2W_s'(m, n)W_n'(m, n)\}$$

$$= (N-K) \cdot E\{W_s'(m, n)^2\}$$

$$+ (N-K) \cdot \sigma_m^2 \quad (4)$$

#### IV. UDWT을 이용한 DENOISING

경계법에 기초한 denoising은 Donoho[3]-[5]에 의해 제안되었으며, OWT에서 식 (5)의 soft-threshold를 사용하였다.

$$\eta_t(w) = \text{sgn}(w) (|w| - t)_+ \quad (5)$$

여기서,  $t = \sigma\sqrt{2 \log N}$ 이고,  $N$ 은 신호의 길이이다. 이것과 상응해서, 본 논문에서는 UDWT와 식 (6)의 hard-threshold를 사용한다.

$$\hat{w}(m, n) = \begin{cases} w(m, n), & w(m, n) \geq t(m) \\ 0, & w(m, n) < t(m) \end{cases} \quad (6)$$

여기서,  $t(m) = c \cdot \sigma_m$ 이며, i.i.d.(independent and identically distributed) 가우시안 노이즈  $X \sim N(0, \sigma^2)$

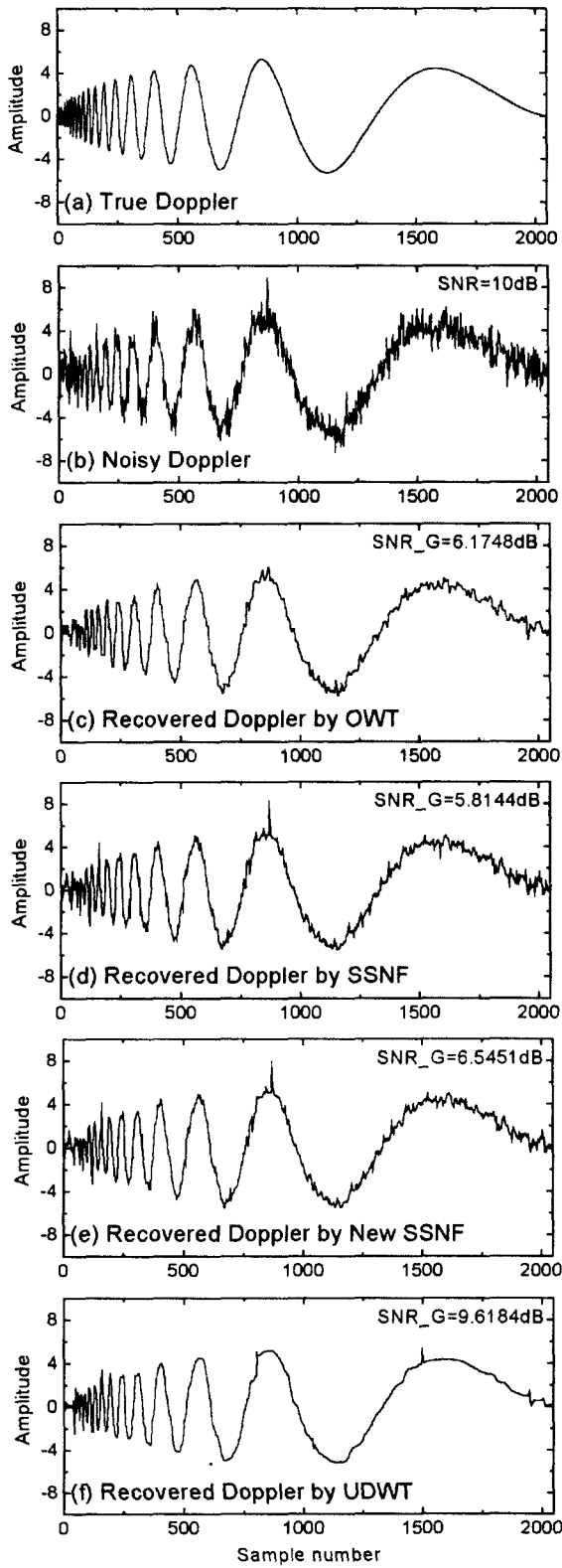


Fig. 2. Recovered Doppler Signal.

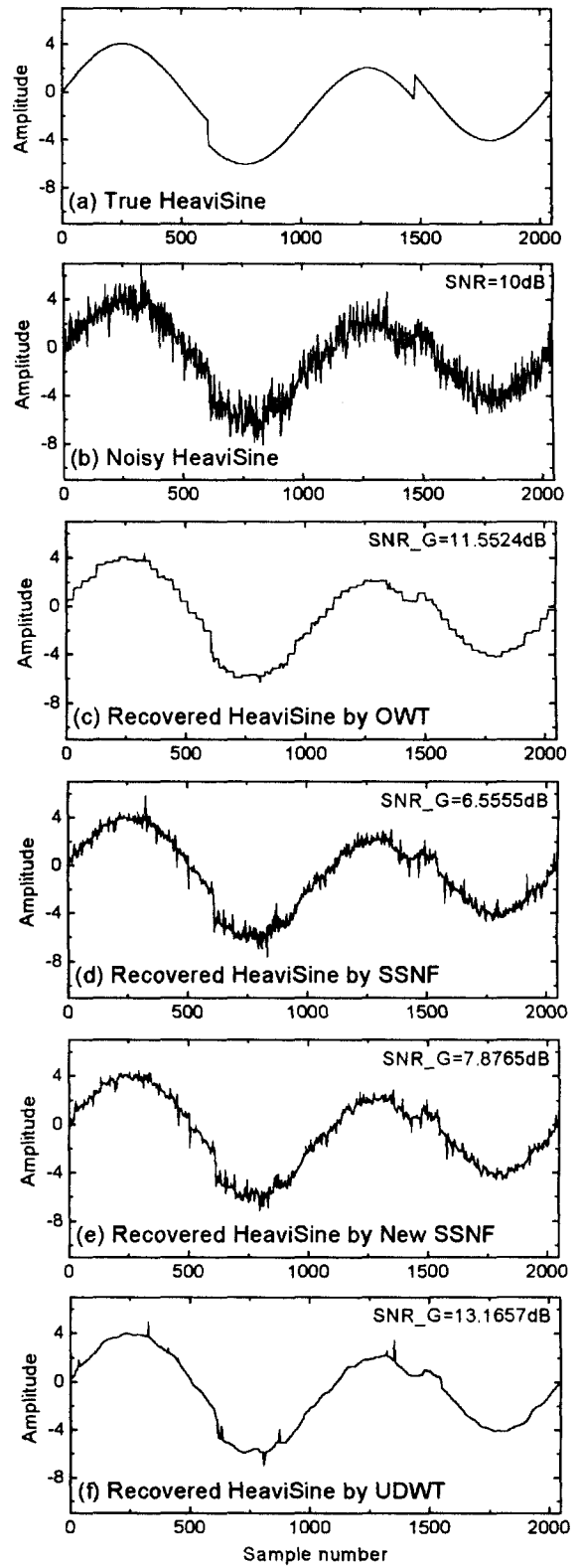


Fig. 3. Recovered HeaviSine Signal.

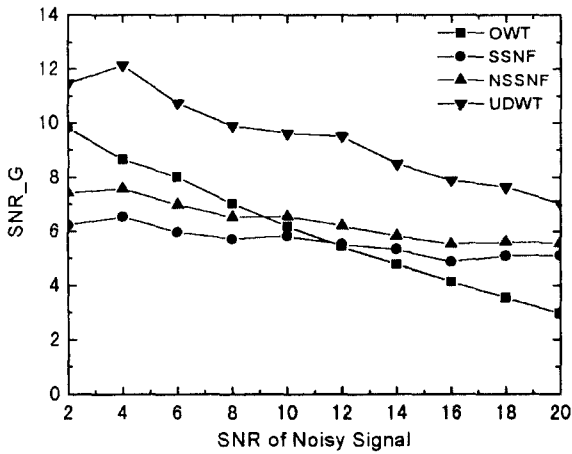


Fig. 4. SNR\_G of Doppler for each Methods.

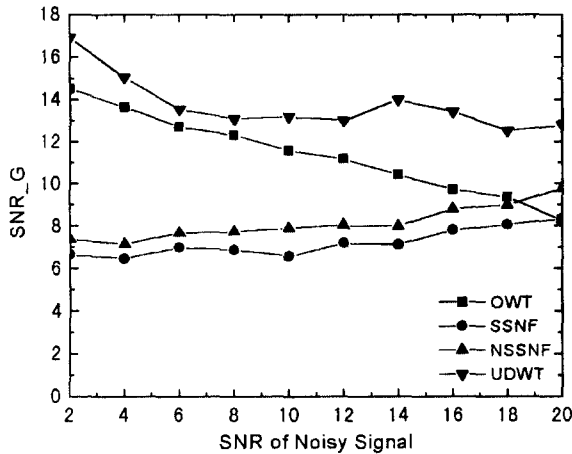


Fig. 5. SNR\_G of HeaviSine for each Methods.

에 대해서, 경계  $t = \sigma, 2\sigma, 3\sigma, \dots$ 가 노이즈의 68.26%, 95.44%, 99.74% ...를 제거하므로, 3~4사이의  $c$  값을 사용하였다.

또한, 본 논문 전체에서는 노이즈 제거를 위해 표준편차  $\sigma$ 를 추정했으며, 식 (7)과 같다.

$$\hat{\sigma} = \sqrt{P \widehat{W}(1)/(N-K) / \|g_n^0\|} \quad (7)$$

### V. 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서는 기존의 OWT, SSNF 그리고 NSSNF와 hard-threshold를 적용한 UDWT 방법으로 시뮬레이션하여 비교하였으며, SNR은 동일하게 10dB를 사용하였다. 그림 2와 3은 각각 Doppler와 HeaviSine에 대한

True, Noisy version과 OWT, SSNF, NSSNF, UDWT를 이용해 재건된 신호를 나타내고 있다. 그리고, 그림 4와 5는 Doppler와 HeaviSine의 SNR에 따른 SNR 이득을 나타내고 있다. 그림으로부터 기존의 방법들에 의한 결과보다 본 논문에서 제시한 hard-threshold를 사용한 UDWT의 방법이 우수한 SNR 이득을 나타내고 있다. 비록, NSSNF에서 새로운 파라메타를 도입하여 SSNF에 비해 SNR 이득이 개선되었으나, 여전히 많은 노이즈가 edge처럼 구해져, UDWT의 개선효과에 미치지 못하고 있다.

### VI. 결론

본 논문에서는 UDWT을 사용해 경계법에 기초한 새로운 denoising 방법을 제시하였다.

NSSNF 방법에서, reference 노이즈 파워와 original 노이즈의 표준편차 추정치, 그리고 새로운 파라메타를 도입하여 SSNF에 비해 우수한 SNR\_G를 얻었으나, 여전히 많은 노이즈가 edge로써 검출되고 있으며, 알고리즘이 복잡하다는 단점을 가지고 있다. 그러나, UDWT에서는 새로운 경계값을 제시하여 우수한 SNR 이득을 얻었으며, 알고리즘이 간단하다.

공간적 상관관계를 이용한 방법들은 edge 검출 및 이미지 향상에 효과적이며, 경계값에 기초한 방법들은 계산량이 적고, 노이즈 제거에 효과적이므로 다른 여러 응용분야의 적용되리라 생각된다.

### 참고문헌

- [1] S. Mallat, "Characterization of signals from multi-scale edges", IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 14, July 1992.
- [2] Y. Xu et al., "Wavelet transform domain filters: A spatially selective noise filtration technique", IEEE Trans. Image Processing, vol. 3, Nov. 1994.
- [3] D. Donoho, "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage", J. Amer. Statist. Assoc., vol. 90, n0. 432, 1995.
- [4] D. Donoho, "Denoising by softthresholding", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 41, 1995.
- [5] D. Donoho, "Wavelet shrinkage: Asymptopia?", J. R. Stat. Soc., Series B, vol. 57, pp. 301-369, 1995.
- [6] M. Vetterli and C. Herly, "Wavelet and filter banks: Theory and design", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 40, Sept. 1992.