퍼지 PI 형 도달법칙을 가지는 가변 구조 제어기의 설계

The Design of a Sliding Mode Controller with Fuzzy PI-type Reaching Law

이 재 호, 조 기 원, 채 창 현, 이 상 재
금오공과대학교 전자공학부
Jai-Ho Lee, Ki-Won Cho, Chang-Hyun Chai, Sang-Jae Lee
Division of Electronic Engineering, Kum Oh National University of Technology

요 약

본 논문에서는 퍼지 PI 형 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어기를 제안하였다. 퍼지 시스템의 입력으로는 오차와 오차의 변화율을 좌표로 하는 2차원 평면상의 표시점(RP)에서 슬라이딩 평면과의 법선 거리(rd)와 표시점에서 원점까지의 거리(r)를 퍼지화하였고, 간편화된 Mamdani 추론에 의해 도달 법칙의 매개 변수인 k_p와 k_i의 증분을 계산하였다. 제안된 퍼지 PI 형 도달 법칙은 기존의 도달 법칙보다 채터링 현상을 많이 소거함과 동시에 도달 법칙의 PI 계수를 동조할 필요가 없다. 제안된 도달 법칙의 효용성을 볼-밸런스 시스템 제어의 시뮬레이션 결과로 보였다.

Abstract

In this paper, we proposed a variable structure controller with fuzzy PI-type reaching law. we fuzzified as inputs to fuzzy system RP(representative point)'s orthogonal distance(rd) to switching surface and RP's distance(r) to the origin of the 2-dimensional space whose coordinates are the error and the error rate. The increments of the coefficients k_p and k_i of the reaching law are calculated appropriately by the simplified Mamdani inference.

The proposed fuzzy PI-type reaching law makes it reduce the chattering and has no need to tune the PI parameters of reaching law. The effectiveness of the proposed fuzzy PI-type reaching law is shown by the simulation results of the control of a Ball-Balance System.

I. 서 론

일반적으로 가변구조 제어시스템의 과도 동특성에는 두 가지 모드, 즉 도달 모드와 슬라이딩 모드로 구분되어진다. 도달 모드에서는 시스템 상태가 슬라이딩 평면으로 흡인되는 도달 조건을 가지며, 이 조건을 구하는 방법으로 Lyapunov 함수 방법과 도달 법칙 방법(Reaching law method)이 있다[1]. 도달 법칙은 슬라이딩함수의 동특성을 직접적으로 결정할 수 있을 뿐만 아니라, 도달 모드 동안의 시스템 동특성도 결정할 수 있어 과도특성을 개선한다[1].

도달 법칙을 이용한 가변구조제어에 대한 연구로서 Gao 등[1]은 Fernandez 등[2]이 제안한 흡입 방정식을 사용하여 도달 법칙을 일반화하였고, 전경한 등[3]은 PI 형 도달 법칙을 제안하였는데, 이는 Gao 등[1]의 도달 법칙과는 달리 불연속 항을 포함하지 않으므로 채터링을 개선시킬 수 있는 장점을 가진다.

본 논문에서는 전경한 등이 제안한 도달 법칙이 가지는 단점들을 개선하기 위하여 있는 퍼지 PI 형 도달 법칙을 제안한다. 오차와 오차의 변화율을 두 축으로 하는 이차원 오차 상태 공간상의 표시점을 슬라이딩 평면에 대한 법선 거리와 원점에 대한 위치로 나타내어 이들 위치와 법선 거리를 퍼지 변수로 설정하고, 미리 설계한 퍼지 제어규칙에 따라 적절한 도달계수를 얻는다. 그러므로 제안된 퍼지 도달 법칙은 일정한 도달계수 값으로 인해 채터링이 항상 존재하는 기존의 도달 법칙을 개선할 수 있음을 보인다. 제안된 퍼지 PI 형 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어기는 볼-밸런스 시스템의 모의 실험을 통해 그 효용성을 입증하였다.

II. 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어

식 (1)과 같은 상태 방정식으로 표현되는 단일 입력 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = Ax + B(u+d) \tag{1}$$

여기서 $x \in \mathbb{R}^n$는 상태 벡터, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 는 선형 공칭 시스템 행렬, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$는 이득 행렬이다.

$u \in \mathbb{R}$는 스칼라 제어입력, B는 완전 차수(full rank)를 가지며 행렬쌍 (A,B)는 완전 제어가능하고, 표준정합조건을 만족하는 불확실성 d의 크기에 대한 상위 경계치(upper limit)는 식 (2)와 같이 알려져 있다고 가정한다.

$$|d| < d_{\max} \tag{2}$$

이제 시스템 (1)에 대하여 다음의 식 (3)과 같은 선형 슬라이딩 함수를 고려하자.

$$s = Cx \tag{3}$$

여기서 $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$는 슬라이딩 평면 행렬이다.

$\dot{s} = 0$를 만족하는 등가 제어 입력 u_{eq}를 구하면 식 (4)와 같다.

$$u_{eq} = -(CB)^{-1} CAx \tag{4}$$

슬라이딩 모드의 시스템 동특성은 등가 제어 입력 (4)를 시스템 (1)에 대입하면 식 (5)와 같다.

$$\dot{x} = [A - B(CB)^{-1} CA]x \tag{5}$$

식 (5)에서 슬라이딩 모드 동안 시스템을 안정화하기 위해서는 고유치들이 복소 s 평면의 좌반면에 위치하도록 C를 선택할 수 있다. 도달모드에서 슬라이딩 모드로 전환하는 동안에 비이상적인 도달에 의해 발생하는 채터링을 줄이기 위하여 Gao 등이 사용한 도달 법칙들은 식 (6)과 식 (7)로 표현되며, 여기서 k > 0 , q > 0이다 [1, 3].

$$\dot{s} = -q\ sgn(s) \tag{6}$$

$$\dot{s} = -k\ s - q\ sgn(s) \tag{7}$$

도달법칙 (6)은 슬라이딩 함수가 일정 속도 q로 감소하는 법칙으로 도달시간과 채터링 문제를 동시에 개선하기 어렵다. 도달법칙 (7)은 도달법칙 (6)의 일정 속도 항 q에 비례속도 항 k를 첨가한 경우이다. 첨가된 비례속도 항은 슬라이딩 평면과의 거리에 따라 도달속도를 변화시키므로 빠른 도달시간과 채터링이 감소하는 장점을 가진다. 그러나 도달법칙 설계시 포함된 불연속항으로 인하여 채터링이 완전히 제거되지는 않는다.

전경한 등[3]은 PI 형의 도달 법칙을 제안하였다.

$$\dot{s} = -k_p s - k_i \int s dt \tag{8}$$

여기서 k_p , k_i는 양의 실수이다.

식 (8)의 제안된 도달법칙은 비례속도항과 적분항으로 구성되며, 사용되는 적분기는 reset 기능을 가지도록 하였다.

시스템 (1)에 대하여 선형 슬라이딩 함수 (3)을 가지도록 하며 식 (8)의 PI형 도달법칙을 만족하는 가변구조 제어입력 u는 식 (9)과 같다.

$$u = \begin{cases} -(CB)^{-1}(CAx + k_p s + k_i \int s dt) - d_{\max} sgn(CBs) & , \ s \neq 0 \\ -(CB)^{-1} CAx & , \ s = 0 \end{cases} \tag{9}$$

제안된 가변구조 제어입력 (9)는 불확실성을 포함하는 시스템 (1)을 견실하게 안정화시킨다[3]. 또한, 식 (9)에서 불연속 항은 견실성을 얻기 위하여 첨가된 제어입력에 의한 것으로 기존의 도달법칙을 이용하는 경우와 동일하게 채터링이 발생하게 된다[3].

III. 퍼지 PI 형 도달법칙을 가지는 가변구조 제어기

식 (9)로 제안된 PI형 도달법칙을 퍼지 PI형 도달법칙으로 설계하기 위한 퍼지추론 알고리즘을 설명한다. 퍼지화를 위해 사용한 실제값은 그림 1에서와 같은 이차원 오차 위상 공간에서 표시점(RP)과 원점 사이의 거리 r과 슬라이딩 라인에 대한 법선거리 rd 이다.

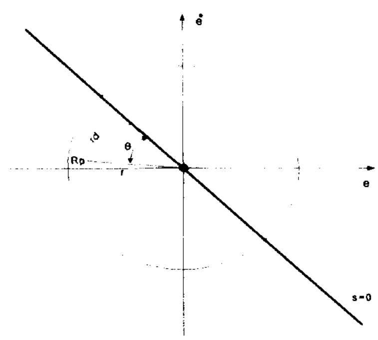


그림 1. 위상 평면에서의 표시점 거리 및 법선 거리

Fig. 1. r and rd in the phase plane.

초기의 RP가 슬라이딩 라인으로부터 멀리 떨어져 있는 경우 RP의 시스템 상태는 슬라이딩 라인으로 천이되고, 궁극적으로 $s = 0$인 원점으로 수렴하게 된다. 따라서 본 논문에서는 이러한 목적에 부합되는 r, rd를 퍼지 입력 변수로 선택하였다. 여기서 거리 r은 원점까지의 거리이고, $r = \sqrt{e^2 + \dot{e}^2}$ 이다. $rd = |r\sin(\theta_s - atan\,2(\dot{e}, e))|$는 법선 거리이고, $\theta_s = atan\,2(\lambda \dot{e}, e)$는 슬라이딩 라인의 각도를 나타낸다. 이러한 r과 rd를 크리스프 입력으로 사용하여, 퍼지규칙을 결정하기 위해 ZE, PS, PM, PB 등의 4가지로 각각 퍼지 분할한다[4]. 입력변수(거리 r과 법선거리 rd) 및 출력변수(u)의 소속함수(membership function)는 그림 2에서 그림 4까지와 같다. 출력변수 u의 경우 입력변수에 대해 표 1에 제시된 k_p의 퍼지규칙에 따라 출력변수 u_k_p와 표 2에 제시된 k_i의 퍼지규칙에 따라 u_k_i를 출력한다.

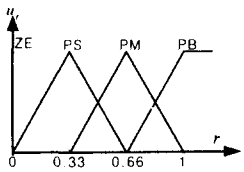


그림 2. r에 대한 소속함수
Fig. 2. Membership function for r

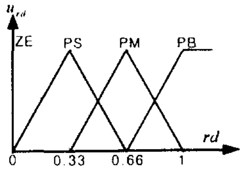


그림 3. rd에 대한 소속함수
Fig. 3. Membership function for rd

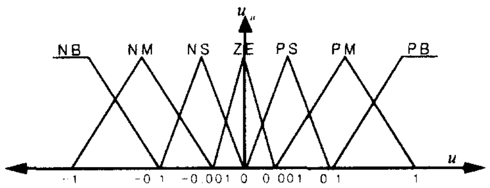


그림 4. 출력 u에 대한 소속함수
Fig. 4. Membership function for output u

k_p와 k_i에 대하여 제안된 제어 규칙은 다음과 같다.

표 1. k_p의 제어 규칙
Table 1.Rules for k_p

rd \ r	ZE	PS	PM	PB
ZE	ZE	ZE	PS	PM
PS	ZE	PS	PM	PM
PM	PS	PS	PM	PB
PB	PS	PM	PB	PB

표 2. k_i의 제어 규칙
Table 2. Rules for k_i

rd \ r	ZE	PS	PM	PB
ZE	ZE	ZE	PS	PM
PS	ZE	PS	PM	PM
PM	PS	PS	PM	PB
PB	PS	PM	PB	PB

표 1과 표 2의 퍼지 제어규칙에 대해 간략화된 Mamdani의 추론법을 사용하였다.

$$u^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i u_i^*}{\sum_{i=1}^{N} w_i} \tag{10}$$

Ⅳ. 시뮬레이션 및 고찰

제안한 제어법칙을 볼 밸런스 시스템에 적용하여 기존의 제어법칙과 비교하였다. 볼-밸런스 시스템은 그림 5와 같으며 식 (11)의 4차 시스템으로 표현된다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4.4 \end{bmatrix} u \tag{11}$$

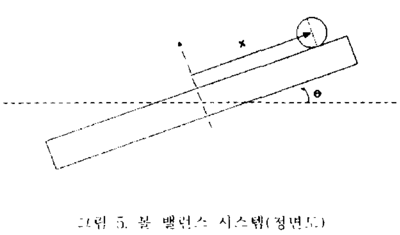


그림 5. 볼 밸런스 시스템(정면도)
Fig. 5. Ball balance system(front view)

여기서 g는 중력가속도로 9.8 m/s^2을 나타내고, x는 상태변수로 다음과 같다.

$$x = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ ]' = [x\ \dot{x}\ \theta\ \dot{\theta}\ ]' \tag{12}$$

그리고 x는 공의 위치, $\dot{x}$는 공의 속도, θ는 바의 각, $\dot{\theta}$는 바의 각속도를 나타낸다. 슬라이딩 모드에서 원하는 동특성을 가지는 슬라이딩 평면을 설계하기 위하여 슬라이딩 모드에서 원하는 고유치(-10, -1.5, -2+1.7j, -2-1.7j)를 가지는 슬라이딩 평면을 상태궤환에 의하여 구하였으며 그 값은 다음과 같다.

$$C = [1.5827\ 1.9740\ 5.5000\ 1.0000] \tag{13}$$

전경한 등이 제안한 도달 법칙에 사용한 매개 변수는 식 (14)와 같다.

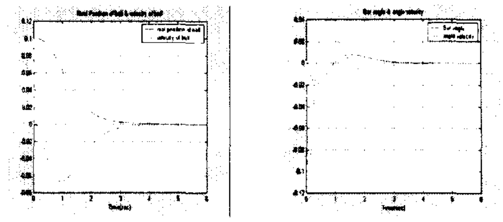
$$k_p = 2\ ,\ k_i = 75.88 \tag{14}$$

본 논문에서 사용한 k_p와 k_i의 스케일 요소는 각각 50이다. 또, 시스템 (1)의 상태변수 x의 초기값은 다음과 같다.

$$x = [x\ \dot{x}\ \theta\ \dot{\theta}\ ]' = [0.1\ 0\ \frac{0.1}{180}\pi\ 0\ ]' \tag{15}$$

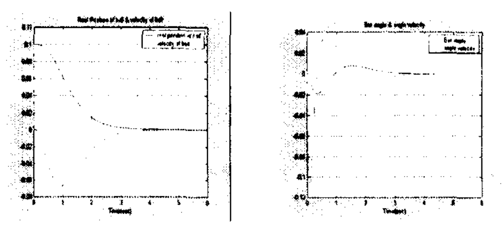
1. 불확실성이 없는 경우

전경한 등의 도달 법칙을 사용한 모의 실험의 결과는 그림 6과 같고, 제안한 도달 법칙을 사용한 모의 실험의 결과는 그림 7과 같다. 모의 실험의 결과 유사한 응답을 나타내었지만, 본 논문의 도달 법칙은 매개 변수를 동조해 줄 필요가 없다는 장점을 가진다.



(a) (b)

그림 6. 전경한 등의 도달법칙(d=0).
(a) 공의 위치와 속도, (b) 막대 각과 막대의 각속도
Fig. 6. Chun's reaching law(d=0).
(a) Position and velocity, (b) Angle and velocity



(a) (b)

그림 7. 제안된 도달법칙(d=0).
(a) 공의 위치와 속도, (b) 막대 각과 막대의 각속도
Fig. 7. Proposed reaching law(d=0).
(a) Position and velocity, (b) Angle and velocity

2. 불확실성이 있는 경우

본 절에서는 외란 등 불확실성을 포함한 시스템 (1)의 모의실험을 수행하였다.

고려한 불확실성은 다음과 같다.

$$d = 0.1\sin(1000t) \tag{16}$$

불확실성을 포함하는 시스템에 대한 전경한 등의 도달법칙을 사용한 모의실험 결과는 그림 8과 같고, 본 논문에서 제안한 퍼지 PI형 도달법칙을 사용한 모의실험의 결과는 그림 9와 같다.

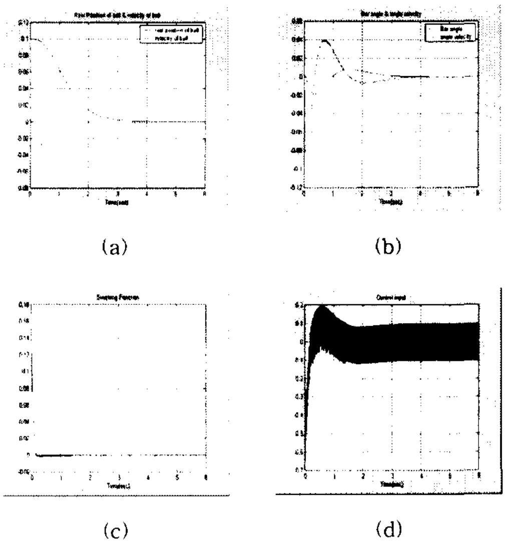


그림 8. 전경한 등의 도달법칙(d=0.1sin(1000t)).
(a) 공 위치와 속도, (b) 막대각과 막대의 각속도, (c) 슬라이딩 함수, (d) 제어입력
Fig. 8. Chun's reaching law(d=0.1sin(1000t)).
(a) Position and velocity, (b) Angle and velocity,
(c) Sliding Function, (d) Control input

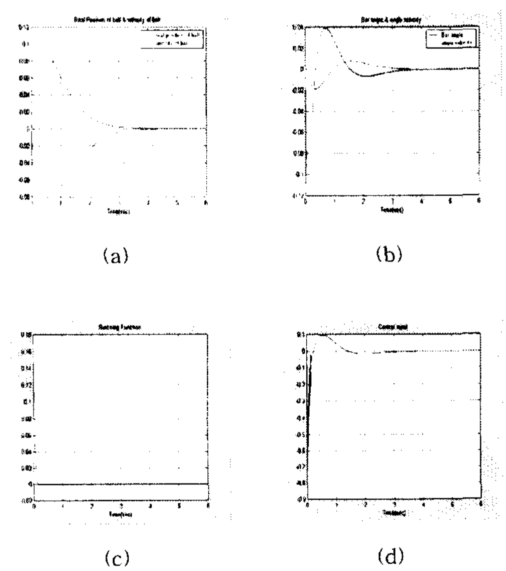


그림 9. 제안된 도달법칙(d=0.1sin(1000t)).
(a) 공 위치와 속도, (b) 막대 각과 막대의 각속도 (c) 슬라이딩 함수, (d) 제어입력
Fig. 9. Proposed reaching law(d=0.1sin(1000t)).
(a) Position and velocity, (b) angle and velocity,
(c) Sliding function, (d) Control input

그림 9(b)의 막대의 각속도와 그림 9(c)의 슬라이딩 함수를 살펴보면 전경한 등의 도달법칙과 거의 유사한 결과를 나타내었지만, 미세하게 그 채터링이 줄어들었고, 그림 9(d)의 제어입력의 경우에는 기존의 채터링이 상당히 제거되었음을 볼 수 있다. 이는 본 논문에서 제안한 퍼지 PI 형 도달 법칙이 매개 변수의 범위만 설정하면 매개변수가 적절히 변화하여 채터링이 현저히 줄어드는 것을 알 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 퍼지 PI형 도달법칙을 가지는 가변구조 제어기를 제안하였다. 기존 Gao의 도달법칙은 불연속항을 포함하므로 채터링 문제가 야기된다. 또한 전경한 등의 PI형 도달법칙이 가지는 제어기는 기존 Gao의 도달법칙과는 달리 불연속항을 포함하지 않으므로 채터링 문제를 크게 개선시키고, 도달법칙의 매개변수를 결정함으로써 도달시간을 예측할 수 있으나, 매개변수 k_p와 k_i를 동조하여야 하는 단점이 있었다.

본 논문에서는 퍼지 PI형 도달법칙을 가지는 가변구조 제어기를 제안하고, 기존의 도달법칙과 비교하기 위하여 동일한 초기조건과 함께 볼-밸런스 시스템에 적용하여 컴퓨터 시뮬레이션을 하였다.

공칭 시스템뿐만 아니라, 정확하지 않은 모델링으로 인하여 발생하는 불확실성에 대해서도 슬라이딩 모드에서 기존의 도달법칙보다 채터링 문제에서 탁월한 성능을 보이는 우수성을 입증하였으며, 도달법칙의 매개변수 k_p와 k_i를 퍼지화하여 매개변수 동조의 단점을 제거하였다.

참 고 문 헌

[1] W. B. Gao and J. C. Hung, "Variable structure control of nonlinear systems: A new approach," IEEE Trans. Ind. Electron, vol. 40, no. 1, pp. 45-55, Feb., 1993.

[2] R. B. Fernandez and J. K. Hedrick, "Conrtol of multivariable nonlinear systems by the sliding mode method," Int. J. Contr., vol. 46, no. 3, pp. 1019-1040, 1987.

[3] 전경한, 이연정, 최봉열, "PI 형 도달법칙을 가지는 가변구조 제어," 제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지, vol. 3, no. 3, pp. 214-218, June., 1997.

[4] 사공성대, 이연정, 최봉열, "비선형 시스템에 대한 가변구조제어," 제어 · 자동화 · 시스템공학 논문지, vol. 2, no. 4, pp. 279-286, Dec., 1996.