

Poincare Section과 신경망기법을 이용한 수문자료 분석

Analysis of Hydrologic data using Poincare Section and Neural Network

나창진¹⁾, 김응석²⁾, 김형수³⁾, 김중훈⁴⁾

1. 서론

동역학적인 방법으로 물체의 운동을 기술할 때, 우리는 많은 실제 현상들을 단순화하여 운동방정식을 세우고 그 방정식을 해석함으로써 물체의 시간적 변동 특성을 파악하고자 하였다. 이러한 노력에도 불구하고 비선형 방정식들을 해석하는데는 많은 어려움이 따라 오랫동안 큰 관심을 끌지 못한 반면 해석하기에 편리한 선형 방정식들은 널리 이용되어져 왔다. 많은 학자들은 태풍, 갑작스런 폭우 등과 같은 자연현상을 선형적인 방법으로 해석하는데 한계가 있음을 인정하였으나 이러한 현상들을 단지 이해할 수 없는 것으로 판단하였다(박래식과 성하운, 1993). 자연현상의 비선형성을 해결하기 위한 노력은 20세기 초반 프랑스의 위대한 수학자이며 물리학자인 Poincare에 의해 그 전환점을 맞이하였다. Poincare(1905)는 기하학적인 방법을 이용하여 비선형 방정식의 특성을 파악하는 방법론을 생각하였으며, 어떤 비선형 방정식은 카오스적 거동을 보일 수 있음을 처음으로 암시하였다(Granek, 2000). 그의 기하학적 방법론은 엄청난 양의 반복 계산을 요구하여 실제 계산을 하는 것이 당시로서는 불가능하였으나, 컴퓨터의 발달은 Poincare의 기하학적 방법론이 위대함을 증명할 수 있게 하였다. 기상학자 Lorenz(1963)는 지금까지 잘 알려져 있었으나 해결할 수 없었던 기상현상에 대한 방정식을 단순화하고 이를 컴퓨터를 이용해 시뮬레이션 한 결과 이상한 현상을 발견하였다. 즉, 계산 결과가 초기 조건에 따라 아주 민감하게 변하며 위상 공간(phase space)에서 이상한 끌개(strange attractor)라 부르는 묘한 형태를 보이고 있음을 알았다. 이와 같이 컴퓨터의 발달은 예전에 Poincare가 제안하였던 기하학적 방법을 이용하여 가능하게 하였으며, 이제 그의 방법론을 이용하여 자연 현상의 비선형 특성을 파악하고자 하는 연구가 활발히 진행되고 있다(Kawakami and Funakoshi, 1999; Azuaje and Pubizky, 1999).

본 연구에서는 복잡하고 불규칙적인 현상을 보이는 수문 현상들을 이해하고자 Poincare Section을 이용하여 선형 방정식으로는 설명할 수 없는 비선형적인 특성을 보이는 수문 자료의 특성을 파악하고자 한다. 이를 위하여 먼저 Poincare section에 대한 개념 설명과 Poincare Section을 자료를 분석하는데 어떻게 이용할 수 있는지를 살펴 보고, 이미 그 특성이 알려진 시스템들에 대해 Poincare section을 이용하여 각 시스템들의 특성들을 분석하며, 마지막으로 Poincare section을 이용하여 실제 수문자료의 특성을 파악하고자 한다. Poincare Section을 통한 자료의 분석시 카오스 특성을 쉽게 판별할 수 있다.

또한 분석된 비선형성의 자료는 black box 모형인 신경망 모형을 통한 학습과 test과정을 통하여 예측(forecasting)을 시도하였다. 신경망을 통한 비선형성을 지닌 자료 예측시 카오스 특성을 지닌 자료와 그렇지 않은 자료의 경우 그 예측의 정도에 있어 차이가 있음을 알 수 있었다.

2. Poincare 기하학

2.1 Poincare Section

Poincare section은 연속적인 동역학(continuous dynamics)을 이산적인 동역학(discrete dynamics)으로 바꾸는 방법으로 어떤 시스템의 동역학을 기하학적으로 묘사할 수 있도록 한다(Strogatz, 1994). Poincare section은 slice를 이용하는 것으로 어떤 시스템이 이 slice를 통과할 때 생기는 점들의 집합으로 표현된다. 그림 1은 주기 n을 가지고 시스템이 전개될 때의 Poincare section을 보이고 있다. 그림 1을 보면 연속적인 동역학 시스템 사이에 slice를 끼워 주기가 진행됨에 따라 점이 표시되도록 하였다. 즉 연속적인 동역학 시스템이 이산적인 동역학 시스템으로 변화되는 과정을 보이고 있다.

그림에서 보이는 것처럼 Poincare Section에서의 slice는 감춰진 동역학시스템을 찾는 하나의 도구이다. 어느 곳에 끼워 넣는지에 따라 감춰진 동역학시스템을 찾을 수도, 찾지 못할 수도 있다.

1) 정회원, 고려대학교 토목환경공학과 석사과정

2) 정회원, 고려대학교 토목환경공학과 박사과정

3) 정회원, 선문대학교 토목공학과 부교수

4) 정회원, 고려대학교 토목환경공학과 부교수

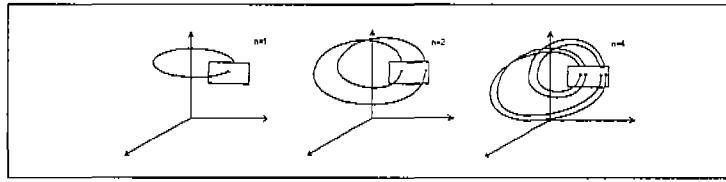


그림 1. Poincare Section

2.2 Poincare Map

Poincare section에 의하여 얻을 수 있는 점들의 집합을 Poincare plots이라고 한다. Poincare map이란 Poincare plots 중 한점 $x(t)$ 에서 $x(t+1)$ 으로 시스템이 진행하는 map을 말한다. 그러나 Poincare map 역시 Poincare section과 마찬가지로 만드는 방법은 시스템에 따라 달라지며 주어진 시스템에서도 여러 가지 Poincare map을 만들어 볼 수 있다.

그림 2를 보면 Poincare map이 어떻게 구축되는지를 알 수 있다. 위에서 언급한 것처럼 Poincare map을 구축하는 방법은 시스템에 따라 달라지고 주어진 시스템에서도 여러 가지 map을 구축할 수 있다. 그림 2(a)를 연간 강우량 변화라 가정할 때 첨두 강우가 발생하는 사상이 'R'임을 알 수 있다. 그림 2(b)를 보면, 그러한 패턴이 연속적으로 보여졌을 때, 각 첨두 R 사이의 간격(interval)은 그림 2(b)의 A, B, C이다. 그림 2(c)에서는 간격 A, B, C에 대하여 (A, B), (B, C)의 점을 찍었다. 즉, 간격을 $x(t)$ 라 했을 때 ($x(t)$, $x(t+1)$)로 가는 map이 작성되었음을 알 수 있다. 그림 2에서 map을 구축하는 방법은 한가지 예로 제시된 것으로서 각 시스템에 적합한 방법으로 map을 구축해 나가야 한다.

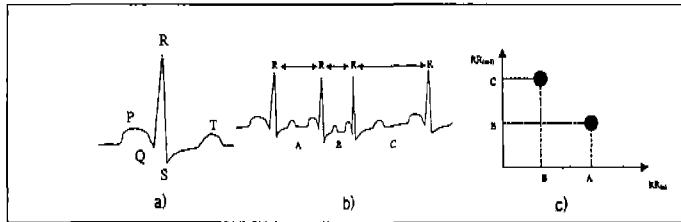


그림 2. Poincare Map의 작성방법

3. 기지시스템에 대한 Poincare Map

기지의 다른 시스템들에 Poincare section을 이용하여 Poincare map을 구축해보면 각 시스템에 따라 각기 다른 특성을 보인다. 여기서는 주기성을 갖는 시스템, 무작위한 특성을 갖는 시스템, 추계학적 모형, 카오스 특성을 갖는 자료들을 Poincare section을 이용하여 불연속적인 자료를 발생시킨 후 Poincare map을 구축하였다.

3.1 주기성을 갖는 시스템.

3.1.1 Sine 곡선

각 시스템을 비교하기 위하여 식(1)과 같이 주기가 2π 인 sine곡선으로부터 2000개의 자료를 발생시켜 Poincare section에 의해 map을 구축하였다.

$$x(t) = \sin(t) \quad (1)$$

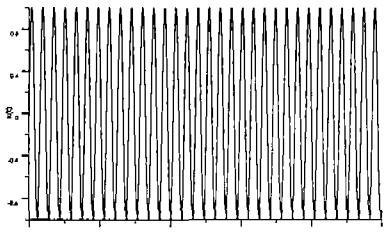


그림 3. Sine Curve 자료계열

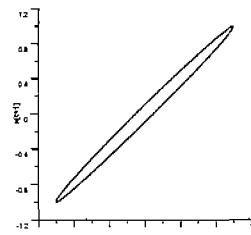


그림 4. Poincare Map

그림 3은 식(1)을 통하여 발생된 자료계열을 도시한 것으로서 주기성을 띠고 있다. 그림 4는 시간간격 1로 구축된 Poincare Map으로서 일정한 폐곡선의 형태를 보이고 있다. 이는 식(1)의 자료계열이 주기성을 띠고 있는데 기인한다.

3.1.2 준주기 함수

주기성을 갖는 또 다른 시스템인 준 주기 함수(quasi periodic function)에 대한 Poincare map을 얻기 위하여 식(2)에 대하여 3,000개의 자료를 발생시켰다.

$$x(t) = 0.4 \cos(2\pi t/100) + 0.3 \cos(2\pi\sqrt{2}t/50) \quad (2)$$

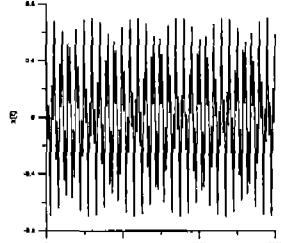


그림 5. 준 주기함수 자료계열

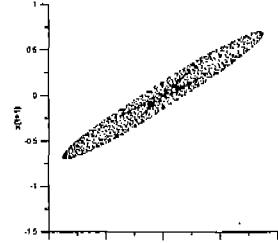


그림 6. Poincare Map

준주기함수의 주기성을 보이는 Map이 구축되어 일정 형태안에 또다른 끌개(attractor)를 지니고 있다.

3.2 백색잡음과 추계학적 모형

3.2.1 백색잡음(White noise)

각 시스템을 비교하기 위하여 평균이 0인 정규분포를 따르는 백색잡음을 이용하기 위하여 식(3)과 같은 식에 의하여 무작위 특성을 갖는 자료를 발생시켰다.

$$X_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (3)$$

총 2,000개의 자료를 발생시켰으며, 시간 간격을 바꿔가며 Poincare section을 적용하였으나 어떠한 패턴도 찾을 수 없었다. 즉, 그림 7을 보면 Poincare map이 산만하게 퍼져 있을 뿐, 어떠한 형태도 보이지 않는다.

3.2.2 추계학적 모형(Stochastic model)

자동회귀모형(autoregressive model, AR(p))중 다음식과 같은 1차 자동회귀모형(AR(1))을 이용하여 선형 추계학적 자료를 발생시켰다.

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (4)$$

여기서, ϕ_1 은 1차 자기상관계수로서, $\phi_1=0.4$ 를 사용하였으며, ε_t 는 평균이 0인 정규분포를 따르는 무작위 자료이다.

1차 자동회귀모형을 이용하여 2,000개의 자료를 발생시켜 Poincare map을 구한 결과를 그림 8에 나타내었으며, 백색잡음의 Poincare map과 비교해 보면 AR 모형은 자체 상관계수 $\phi_1=0.4$ 의 영향으로 어느 정도는 가운데에 몰리는 경향이 있으나 백색잡음의 경우처럼 산만한 형태를 지니고 있음을 판단할 수 있다.

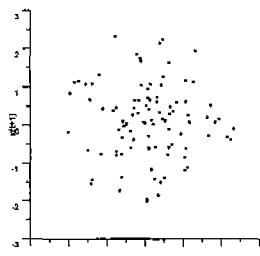


그림 7. 백색잡음의 Poincare map

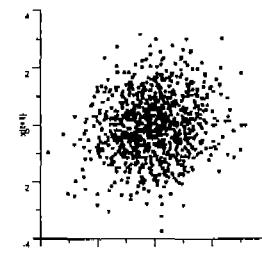


그림 8. AR(1) 모형의 Poincare map

3.3 카오스 자료의 응용

3.3.1 Lorenz 시스템

Lorenz 시스템은 전형적인 카오스 특성을 갖는 것으로 알려져 있으며, 식(5)의 시스템을 갖는다 (Lorenz, 1963).

$$\begin{aligned} dx/dt &= 10(y-x) \\ dy/dt &= 28x - y - xz \\ dz/dt &= xy - (8/3)z \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $\Delta t=0.05$ 를 사용하여 Runge-Kutta 방법에 의하여 x 에 대한 2,000개의 시계열 자료를 구축하였다. 그림 9는 Lorenz 시스템으로부터 변수 x 에 대한 시계열 자료를 도시하고 있으며, 그림 10은 x 시계열의 Poincare map을 보이고 있다.

Poincare section을 이용하여 구축된 Lorenz 시계열에 대한 Poincare map은 그림 10에 나타난 것과 같이 감지할 수 있는 패턴이 발생하였다. 그림 9에서 알 수 있듯 자료가 비선형성을 띠고 있으나 이러한 비선형성 안에 그림 10과 같은 규칙성을 갖고 있는 것이다. 이는 곧 Lorenz 시스템으로부터 발생한 자료계열이 카오스 시스템의 특성을 반영하고 있음을 말한다.

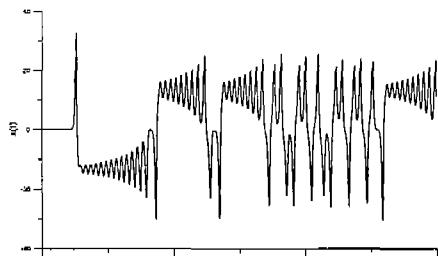


그림 9. Lorenz System(x시계열)

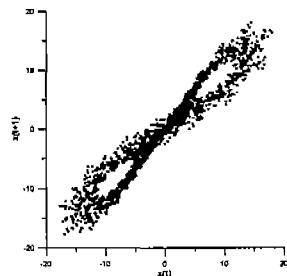


그림 10. Poincare Map(시간간격 1)

4. 수문자료의 적용

4.1 충주댐 일 유입량 자료

충주댐의 일 유입량 자료는 1985년부터 1998년까지 13개년 자료를 사용하였으며, 일 유입량 시계열 분포는 그림 11과 같다.

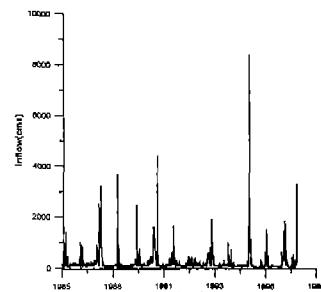


그림 11. 충주댐 일유입량 자료

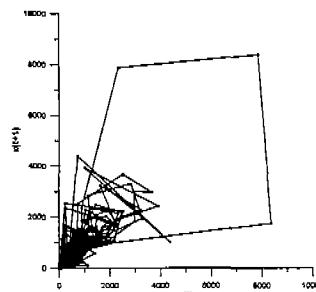


그림 12. Poincare Map(시간간격 1)

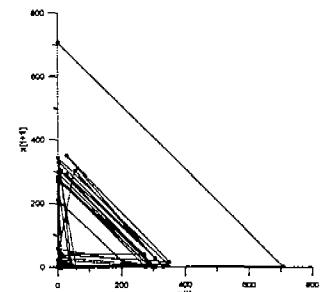


그림 13. Poincare Map(Q=180)

그림 12는 충주댐 일 유입량 자료를 Poincare section에 의해 map을 구축하였다. 그림 11과 그림 12를 볼 때 자료계열이 비선형성임을 알 수는 있으나 특별히 감지할 만한 패턴이 나타나지는 않고 있다. 단지 원쪽 하단부로 많은 점들이 있음을 알 수 있다. 이는 계절적 특성에 의하여 비슷한 크기의 자료들이 몰려 있음을 나타내고 있다.

어떠한 감지할 수 있는 형태(pattern)을 찾기 위하여, 일정유입량($Q=180\text{cms}$)의 발생의 시간간격 자료를 가지고 구축하였다. 유입량자료를 통하여 구축된 map에 비하여 특이 할 만한 형태를 보이고 있다.

4.2 Great Salt Lake 용적 자료

Great Salt Lake(GSL)는 평균 수심이 3~5m 정도로 매우 얕고, 대단히 넓은 표면적(6400 km^2)을 가진 세계에서 네번째로 큰 호수이다. 1847년부터 1992년까지 15일 단위의 용적자료 중 앞선 2,000개의 자료를 사용하였다. 시계열 자료의 분포는 그림 14와 같고, 그림에서 보는 바와 같이 전기와 우기가 수년에 걸쳐서 지속된 현상을 보이고 있음을 알 수 있다(Sangoyomi et al., 1996). 실제로 Sangoyomi 등은 GSL 용적 자료가 카오스적 특성을 갖고 있음을 카오스분석을 통하여 밝힌 바 있다.

그림 15는 GSL 용적 자료를 Poincare Section 을 이용하여 map을 구축한 것으로서 감지 할 수 있는 강한 형태(pattern)를 보이고 있음을 알 수 있다.

자취를 추적해 보면 그러한 형태(pattern)이 연속성을 갖고 표현되는 것은 아니지만 어떤 간격을 갖고 있으면서도 전체적으로 일정한 형태(pattern)를 보이고 있음을 알 수 있다. 앞의 카오스 특성을 가진 자료의 Poincare map과 마찬가지로 어떠한 형태의 자취를 추적했을 때, 동시에 발생하는 것은 아니지만, 결국 감지할 수 있는 어떤 형태를 갖고 있음을 알 수 있다. 그러므로 GSL 용적 자료는 카오스 특성을 갖고 있음을 판단할 수 있다.

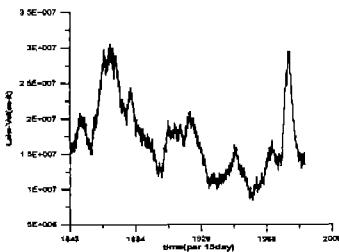


그림 14. GSL 용적 자료계열

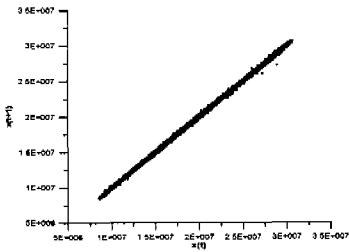


그림 15. Poincaré Map(시간간격 1)

5. 신경망을 이용한 수문자료의 예측

5.1 신경망의 기본 개념

신경망은 다수의 원소가 동시에 동작하는 병렬 처리 기계의 일종으로, 인간 뇌의 정보처리 하드웨어 및 소프트웨어적인 병렬 분산 처리를 하는 시스템이다.

최근에 시작적인 패턴 인식, 음성 타자기, 문자 인식, 음성분석, 로봇 공학 등 여러 분야에 신경회로망 모델이 널리 이용되고 있으며, 특히 패턴 인식, 의사결정등에서 정확한 계산 능력을 보이고 있다.(황우연, 1995)

신경망은 연결모형(connection model), PDP(parallel distributed processing), 또는 뉴로시스템(Neuromorphic System)이라 불리며 언급한 것처럼 인간 뇌의 구조를 컴퓨터로 구현하고자 개발된 개념이다. 신경망의 기본 단위는 뉴런으로서 단순한 계산 소자의 연결을 통해 뛰어난 성능을 나타낸다. 아래의 그림 16은 신경 세포의 학습과정을 모의하기 위하여 수학적 모형으로 나타낸 인공적 뉴런을 도시한 것이다. 인공적 뉴런은 수상돌기를 통해 전달받는 입력(input, x)이 시냅스에서 연결강도의 변화를 겪는 것을 모의하기 위하여 가중치(weight, w)를 고려하였으므로 이들의 가중합을 세포체에서 해석하여 측색돌기를 통하여 전달하는 출력값을 모의하기 위하여 전달함수(trasfer function)가 고려되었다.

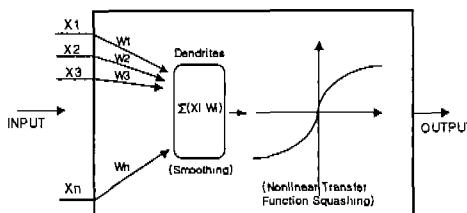


그림 16. 신경회로망

5.2 수문자료에의 적용

5.2.1 충주댐 일 유입량의 예측

충주댐의 일 유입량자료 4,625개 중 3,000개의 자료를 통하여 학습 후 1,625개의 자료를 통하여 test를 하였다. 이러한 과정을 통하여 예측된 결과는 그림17, 그림 18과 같으며 그림 18은 실측자료를 통한 test 결과를 보이고 있다.

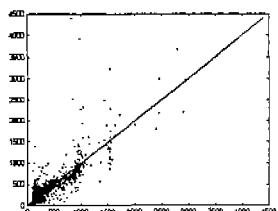


그림 17. 예측치 : 실측치

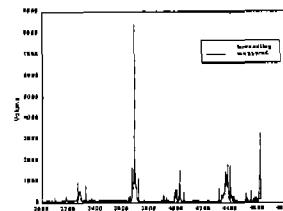


그림 18. TEST 결과

5.2.2 Great Salt Lake(GSL)의 용적 예측

GSL의 체적자료는 3,578개의 자료중 2,500개의 자료를 통하여 학습후 1,078개의 자료를 통하여 test하였다. 이러한 과정을 통하여 예측된 결과는 그림 19, 그림 20과 같다.

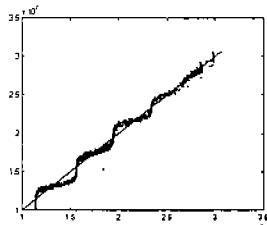


그림 19. 예측치 : 실측치

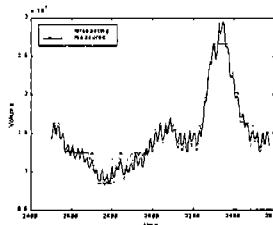


그림 20. TEST 결과

그림에서 볼 수 있듯이 그림 17 및 그림 19가 비선형성을 띠고 있으나 카오스특성을 지니고 있는 GSL의 자료계열의 경우 충주댐의 자료계열의 예측과 비교시 더 정확한 예측을 하고 있음을 알 수 있다. 이는 예측된 자료계열과 관측자료계열을 도시한 그림 19에서 볼수 있는 것처럼 GSL자료의 경우 강한 형태(pattern)을 지니고 있음이 자료를 잘 예측하고 있음을 말하고 있다. 이는 카오스 특성을 잘 반영하는 것으로서 같은 비선형성의 자료계열일지라도 카오스 특성을 지니고 있을 경우 그 예측이 가능함을 보이고 있다.

6. 결론

Poincare section을 이용하여 Poincare map을 구축하고, 이를 여러 자료에 적용하여 자료의 특성을 비교 분석하였다. 적용 결과 Poincare map은 간단하게 자료의 특성을 찾는데 적절한 방법임을 알 수 있었다. 주기성을 갖는 시스템과 카오스 특성을 갖는 자료는 모두 어떠한 형태를 갖고 있으나 주기성을 갖는 시스템은 Poincare map이 동시에 즉, 일정한 자취에 의해 어떤 형태를 가지고 있으나 카오스 특성을 갖는 자료는 map의 자취가 일정하지는 않으나 어떤 형태를 보이고 있음을 알 수 있었다. 그러나 백색잡음과 추계학적 모형은 일정한 형태를 갖기보다는 산만하게 퍼져 있음을 알 수 있었다.

실제 수문 시계열 자료의 적용시 소양강댐과 충주댐의 일 유입량 자료와 Great Salt Lake의 용적 자료를 이용하였다. 소양강댐과 충주댐의 일 유입량에 대한 시간 간격을 Poincare section의 slice로 하는 방법으로 map을 구축할 때 특별한 형태를 찾지 못하였으나 일정 유입량을 slice로 하여 map을 구축할 때 유입량의 발생에 관한 형태를 찾을 수 있었다. 그러나 이러한 형태는 그 계절적 특성에 의한 것이며, 이것이 어떤 확정론적인 특성을 표현하는 것은 아니다. 또한 GSL 용적 자료는 이미 증명된 것처럼 Poincare section을 이용하여 map을 구축하였을 때 카오스 특성을 지니고 있음을 확인할 수 있었다.

또한 신경망을 통하여 비선형성을 지닌 자료계열의 예측시 Poincare Section을 통하여 카오스 시스템의 특성을 지니고 있다고 판단된 GSL의 용적자료의 경우 단지 비선형성을 띠고 있는 충주댐의 일유입량에 비하여 더 정도 높은 예측을 하였다.

따라서 결론적으로 Poincare section을 이용한 Poincare map을 구축하는 것은 시계열 자료의 특성을 손쉽게 분석하는데 유용한 방법임을 알 수 있었으며, 카오스 특성을 지닌 자료의 경우 예측이 가능함을 알 수 있었다. 또한 목적과 시스템에 따라 Poincare section을 잘 적용한다면 자료의 특성 분석뿐만 아니라 예측가능한 특성을 추출하여 정도 높은 자료의 예측 또한 가능할 것으로 판단된다.

7. 참고 문헌

- 박래식, 성하운 옮김(1993). 카오스: 현대 과학의 대혁명, 동문사
- Azuaje, F. and Pubizky, W. (1999). Predicting coronary disease risk based on short-term RR interval measurements. *Artificial Intelligence in Medicine*, Vol. 15, pp. 275~297.
- Granek, G. (2000). Poincare contribution Relativistic dynamics. *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.*, Vol.31, No.1, pp.15~48.
- Kawakami A. and Funakoshi, M. (1999). Chaotic motion of fluid particles around a rotating elliptic vortex in a linear shear flow. *Fluid Dynamics Research*, Vol. 25, pp. 167~193.
- Lorenz, E.N. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal Of The Atmospheric Sciences*, Vol. 20, pp. 130~141.
- Ozorio de Almeida, A.M. and Vallejos, R.O. (1998). Poincare's recurrence theorem and unitarity of the S-matrix. *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol. 11, pp. 1015~1020.
- Poincare, H. (1905). Sur la Dynamique de l'Electron. *Comptes-Rendus des Seances l'Academie des Sciences*, Vol. 140, No. 5, pp. 1504~1508
- Sangoyomi, T.B., Lall, U., and Abarbanel, H.D.I (1996). Nonlinear dynamics of Great Salt Lake: Dimension estimation. *Water Resources Research*, Vol. 27, No. 6, pp. 1005~1010.
- Strogatz, S.H. (1994). *Nonlinear Dynamics And Chaos : With Application to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. ADDISON-WESLEY.
- Tsonis, A.A. (1992). *CHAOS From Theory to Application*, Plenum Press.