

2차원 유한체적법을 이용한 댐 파괴파의 지류 역류 해석

Numerical Simulation of Reverse Flow in a Tributary
due to Dam Failure by Two-Dimensional Finite Volume Method

○ 윤 태 훈¹⁾, 강 석 구²⁾

1. 서 론

자연하천은 나뭇가지 형태로 복잡하게 연결되어 있는 경우가 많다. 하천은 본류와 지류로 구분할 수가 있는데 일반적으로 본류에 비해서 지류의 경사가 급하며 조도계수가 크고 하폭이 좁다. 보통의 경우에는 본류의 유량 및 수위변화가 지류의 상류에까지 영향을 미치지 못하지만 집중호우나 본류의 댐 파괴로 인해 본류의 상류부에서 홍수파가 발생하는 경우 홍수파는 합류부를 통과하면서 지류의 상류 방향으로 역류하게 된다. 이러한 경우 지류 상류 방향으로 전파되는 홍수파의 높이 및 도달거리는 본류 및 지류의 유량, 수위, 하천경사, 조도계수 등에 따라 변하게 된다. 지류에서의 홍수에 대한 안전검토 및 제방 높이 결정을 위해서는 지류 각 지점에서의 수위, 유량 등의 계산이 필요하다 하겠다. 현재까지 본류-지류 흐름의 해석에 사용된 수치 모형은 대부분 1차원 확산파 모형 또는 1차원 Saint-Venant 방정식을 지배방정식으로 하는 1차원 동역학과 모형이다 (Akan 등, 1981). 이러한 1차원 모형은 합류점에서 지류와 본류의 수심이 일치한다고 가정하는데 Froude수가 충분히 작은 경우에는 이러한 가정이 타당하나 댐 파괴 흐름과 같이 Froude 수가 크거나 유량과 수위의 변화가 심한 경우에는 합류점에서 본류와 지류의 수심이 일치한다고 보기가 어려우며, 또한 1차원 모형은 지류가 본류에 유입되는 유입각을 전혀 고려하지 못한다는 단점이 있다. 이러한 1차원 모형의 단점을 극복하기 위해 본 연구에서는 유한체적법을 이용한 2차원 동수역학 모형을 이용하여 댐 파괴 흐름이 지류로 역류되는 현상을 수치모의 하였다. 최근에 2차원 천수방정식에 적용된 바가 있는 공간에 대하여 2차 정확도를 가지는 MUSCL-Type 유한체적법을 이용하였으며 시간에 대하여 3차의 정도를 갖는 TVD Runge-Kutta 기법을 이용하여 시간항을 차분하였다.

2. 본 론

2.1 지배방정식

2차원 Saint-Venant식을 보존형으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S \quad (1)$$

$$U = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + gh^2/2 \\ uvh \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + gh^2/2 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{pmatrix} \quad (2)$$

여기서 h 는 수심, u , v 는 x -, y - 방향 유속성분, g 는 중력가속도, S_{0x} , S_{0y} 는 바닥경사, S_{fx} , S_{fy} 는 수면경사를 의미한다. S_{fx} , S_{fy} 를 Manning 공식을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

1) 한양대학교 토목공학과 교수

2) 한양대학교 대학원 토목공학과 석사과정

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (3)$$

여기서 n 은 Manning의 조도계수이다.

2.2. 수치기법

식 (1)을 검사체적에 대하여 적분하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV + \oint_V \nabla \cdot (F, G) dV = \int_V S dV \quad (4)$$

식 (4)의 차분식은 다음과 같이 쓸 수가 있다 (Zhao 등, 1994).

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{1}{V_i} \sum_{k=1}^3 (F^*, G^*) \cdot \mathbf{n}_k \Delta L_k + S_i \quad (5)$$

여기서 하첨자 i 는 격자번호, 하첨자 k 는 변의 번호를 나타내며, F^*, G^* 는 서로 다른 두 검사체적이 만나는 한 변에서의 x -, y - 방향의 수치 흐름률, \mathbf{n} 은 검사체적 한 변에서의 외향 법선벡터, ΔL 은 변의 길이, V_i 는 2차원 검사체적의 면적을 나타낸다. Upwind 기법과 Roe의 근사 Riemann 해법을 이용하면 검사체적의 한 변을 통과하는 흐름률을 다음과 같이 나타낼 수 있다. (Roe, 1981).

$$(F^*(U_L, U_R), G^*(U_L, U_R)) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \left(((F_L, G_L) + (F_R, G_R)) \cdot \mathbf{n} - \sum_{j=1}^3 \tilde{\alpha}_j [\tilde{\lambda}_j] \tilde{r}_j \right) \quad (6)$$

여기서,

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{\Delta h}{2} + \frac{1}{2\tilde{c}} (\Delta(hu)n_x + \Delta(hv)n_y - (\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y)\Delta h) \quad (7)$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{\tilde{c}} ((\Delta(hv) - \tilde{v}\Delta h)n_x - (\Delta(hu) - \tilde{u}\Delta h)n_y) \quad (8)$$

$$\tilde{\alpha}_3 = \frac{\Delta h}{2} - \frac{1}{2\tilde{c}} (\Delta(hu)n_x + \Delta(hv)n_y - (\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y)\Delta h) \quad (9)$$

$$\tilde{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} + \tilde{c}n_y \end{pmatrix}, \tilde{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{c}n_y \\ \tilde{c}n_x \end{pmatrix}, \tilde{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} - \tilde{c}n_y \end{pmatrix} \quad (10)$$

이고 하첨자 L, R 은 각각 검사체적 임의의 한 변을 기준으로 안쪽과 바깥쪽의 격자를 나타내고, n_x, n_y 는 각각 외향 법선벡터 \mathbf{n} 의 x -, y - 성분분, \tilde{c} 는 중력과의 전파속도를, 연산자 Δ 는 $\Delta(\cdot) = (\cdot)_R - (\cdot)_L$ 을 의미한다. $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ 은 행렬 $(\tilde{A}, \tilde{B}) \cdot \mathbf{n}$ 의 고유치이며 그 값은 다음과 같다.

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y + \tilde{c}, \tilde{\lambda}_2 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y, \tilde{\lambda}_3 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y - \tilde{c} \quad (11)$$

고유치의 Entropy 수정을 위해 다음과 같은 식이 이용된다. (van Leer 등, 1989)

$$\psi(\lambda) = \begin{pmatrix} |\lambda| & |\lambda| \geq \delta/2 \\ (4\tilde{\lambda}^2 + \delta^2)/4\delta & |\lambda| < \delta/2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

여기서 δ 는 다음과 같은 식을 이용하여 얻게된다. (van Leer 등, 1989)

$$\delta = \max(0, 4(\tilde{\lambda}_R - \tilde{\lambda}_L)) \quad (13)$$

Roe기법을 이용하면 검사체적 R, L 간의 u, v, c 의 평균치 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{c}$ 을 얻을 수 있다 (Hubbard, 1999).

$$\tilde{u} = \frac{u_R \sqrt{h_R} + u_L \sqrt{h_L}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}, \tilde{v} = \frac{v_R \sqrt{h_R} + v_L \sqrt{h_L}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}, \tilde{c} = \sqrt{\frac{g(h_R + h_L)}{2}}, \quad (14)$$

공간에 대해서 2차 정확도를 얻기 위해 다음 식을 이용하여 각 검사체적에 상수로 할당된 U 값을 선형적으로 재조정(reconstruct) 할 필요가 있다.

$$U_0^{rec}(x, y) = U_0 + r_0 \cdot \nabla U_0 \quad (15)$$

여기서 r_0 는 검사체적 V_0 의 중심과 검사체적 내부의 임의의 점을 연결하는 위치벡터이다. ∇U_0 는 보존성분 U 의 공간에 대한 그래디언트이며 최소제곱법에 의하여 계산된다. 이때 수치진동을 방지하기 위해 ∇U_0 값을 제한할 필요가 있는데 이를 위해 경사 제한자(slope limiter)가 도입된다. 어

떠한 경사 제한자를 사용하느냐에 따라 수치기법의 정확도에 큰 차이가 생기게 되므로 신중한 선택이 요구된다. 본 연구에서는 최근에 압축성 Navier-Stokes식 및 Euler식에 성공적으로 적용된 바가 있는 Jawahar 제한자(Jawahar 등, 2000)를 이용하였다. 또한 시간항에 대해 3차 정확도를 갖는 TVD Runge-Kutta(Shu와 Osher, 1988) 기법을 이용하여 시간항을 차분하였으며 해의 수렴 및 안정성을 위해서 시간증분 Δt 는 매 시간 단계마다 다음과 같은 조건을 만족해야한다 (Wang 등, 2000).

$$\Delta t \leq \min_i \left(\frac{A_i}{3 \max_j |(u, v) \cdot n \pm c|} \right) \quad (16)$$

2.3. 모형의 검증

수치 모형의 타당성을 검증하기 위하여 1차원 댐 파괴 문제와 2차원 댐 파괴 문제에 본 모형을

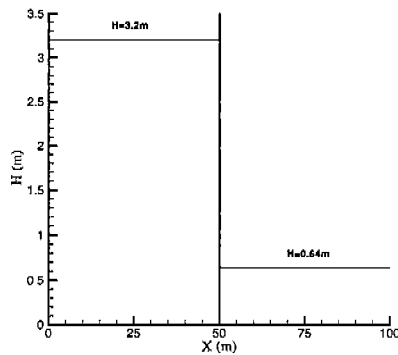


그림 1. 1차원 댐붕괴 문제의 초기조건

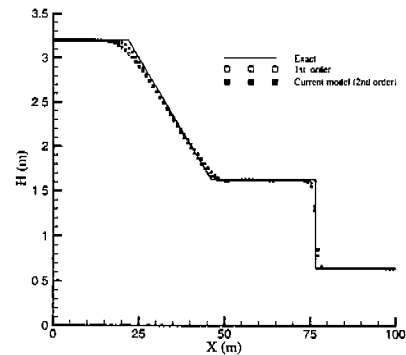


그림 2. 5초 후의 수면

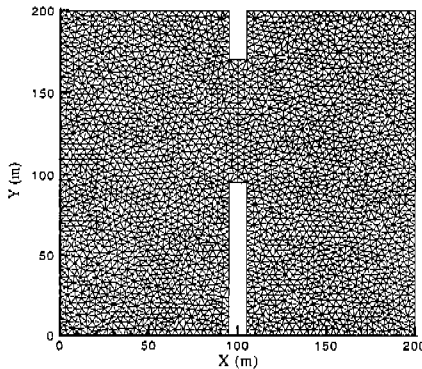


그림 3. 6013개의 삼각형 격자망으로 구성된 가상수로

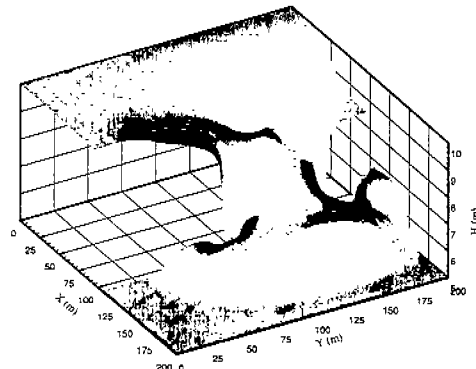


그림 4. 7.2초 후의 수면

적용하였다. 그림 1은 1차원 문제의 초기조건이며 그림 2는 5초 후의 수면의 변화이다. 그림 2에서 보는바와 같이 계산된 수심은 정확해와 잘 일치하며 1차 정확도를 갖는 기법에 비해 정확한 결과를 제공함을 알 수 있다. 그림 3과 같은 수로에서 $0 \leq x \leq 100m$ 구간의 초기수심이 10m, $100m < x \leq 200m$ 구간의 초기수심이 5m이고 초기유속은 0라고 할 때 순간적으로 $x=100m$ 지점의 댐이 완전히 제거되는 경우를 수치모의 하였다. 그림 4는 댐 파괴 7.2초 후의 3차원 수면을 도시한 것이고 그림 5는 등수심선을 그림 6은 유속벡터를 도시한 것이다. 수치모의 결과 그림 5에서와 같이 등수심선이 매끄럽게 분포

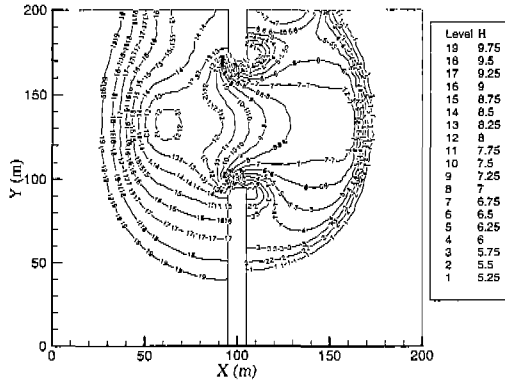


그림 5. 7.2초 후의 등수심선

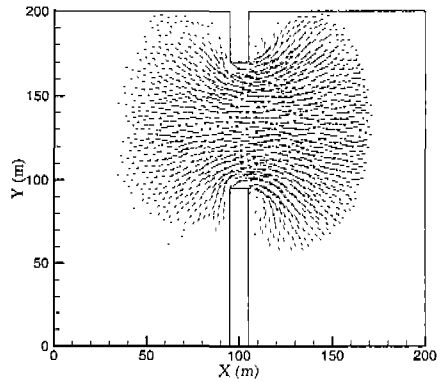


그림 6. 7.2초 후의 유속벡터도

하는 것을 볼 수가 있으며 그림 5, 6에서 하류 방향으로 양의 단파가 진행하고 상류 방향으로 음의 단파가 진행하는 것을 볼 수가 있다. 그림 4, 그림 5는 Zhao 등(1994), Alcrudo 등(1993), Wang 등(2000)의 결과와 흡사한 양상을 보여주고 있다.

2.4. 모형의 적용

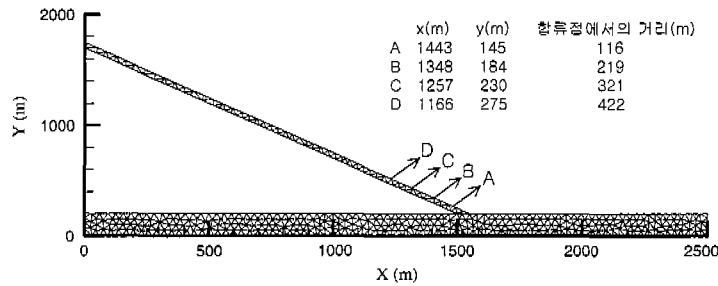


그림 7. 763개의 삼각형으로 구성된 가상하천

그림 7와 같은 가상 하천에 본 모형을 적용하였다. 본류의 폭은 100m, 지류의 폭은 약 22m, 지류의 본류로의 유입각은 약 26.6° 이고 하천 단면은 직사각형으로 가정하였으며 본류의 조도계수는 0, 지류의 조도계수는 0.05로 하였다. 본류는 경사는 0으로 하였고 지류의 경사는 0.01, 0.015 두 경우를 고려하였다. 그리고 하천을 그림 7과 같이 763개의 삼각형으로 분할하였다. 본류 및 지류의 초기 수심은 그림 8, 그림 9와 같이 주어졌고 초기 유속은 모두 0으로 하여 원상시동(cold start)을 하였다. 계산시간은 Pentium 800Mhz Processor에서 약 1분 10초가 소요되었다. 그림 10, 11, 12, 13은 지류의 지점 A, B, C, D에서의 시간에 따른 수심의 변화를 지류의 경사가 0.01, 0.015인 경우에 대하여 비교한 것이고, 그림 14, 그림 15는 각각 경사 0.01, 0.015인 경우의 지류에서의 Froude수의 변화를 도시한 것이다. 또한 각 지점에서의 홍수파 도달시간을 표 1에 나타내었다.

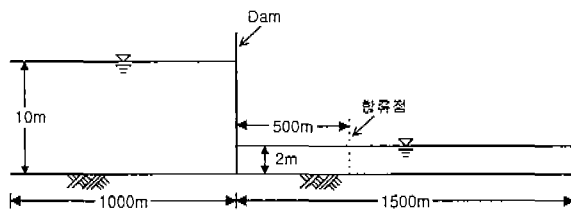


그림 8. 본류의 초기상태

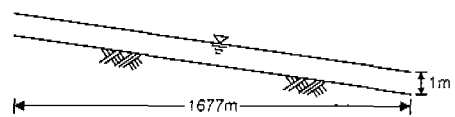


그림 9. 지류의 초기상태

	합류점	A	B	C	D
S=0.010	51초	60초	90초	114초	148초
S=0.015	51초	64초	98초	134초	-

표 1. 각 지점에서의 홍수와 도달시간

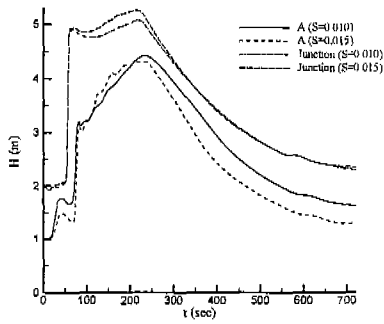


그림 10. 지점 A에서의 수심변화

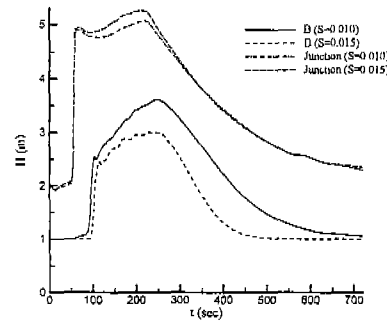


그림 11. 지점 B에서의 수심변화

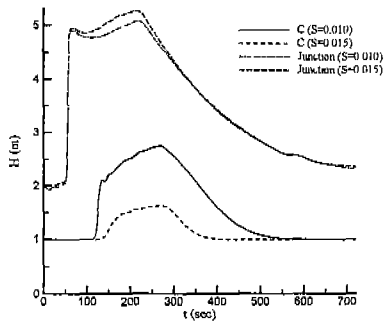


그림 12. 지점 C에서의 수심변화

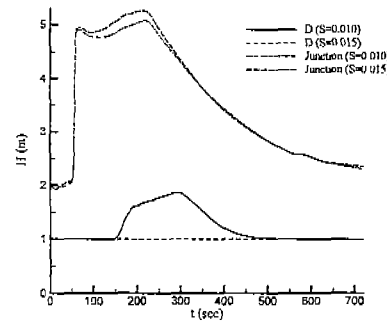


그림 13. 지점 D에서의 수심변화

그림 14, 15에서 볼 수 있듯이 지류의 경사가 0.01인 경우에는 Froude수가 약 0.68일 때, 경사가 0.015인 경우에는 Froude수가 약 0.84일 때 흐름이 등류에 도달하였으며 합류부에서는 최대 0.86까지 Froude수가 증가하였다. 또한 경사가 완만한 경우가 경사가 급한 경우에 비해 철두수심이 크고 홍수파의 도달시간이 빠르고 홍수지속시간이 길다는 것을 알 수 있다. 그림 13에서 보면 경사가 0.01인 경우에는 수심이 변동이 있으나 경사가 0.015인 경우에는 수심의 변동이 없어 홍수파가 D지점까지 도달하지 못했음을 나타낸다. 따라서 경사가 급한 경우에 홍수파의 도달거리가 더 짧아짐을 알 수 있다. 그리고 홍수파가 도달하는 순간 지류에서의 Froude수가 급격히 감소하는 것을 볼 수 있는데 이는 지류의 흐름 반대방향으로 흐름이 역류하여 유속이 급격히 감소하기 때문이다. 그리고 Froude수가 0에 가까워지는 것은 지류와 본류의 유속이 서로 상쇄되어 흐름이 정체되기 때문이라고 생각할 수 있다.

3. 결론

본 연구에서 사용한 비정형격자 유한체적모형은 기존의 유한요소법과 유한차분법의 장점만을 취하여 어떠한 복잡한 경계를 갖는 문제에도 적용될 수 있으며, 공간에 대해 2차 정확도를 유지하면서도 수치진동을 거의 유발하지 않기 때문에 불연속해가 존재하는 문제에도 적용이 가능하다. 그리고 시간에 대해 3차 정확도를 가지므로 장시간의 수치모의에도 적합하다. 또한 근사 Riemann 해법을 이용하

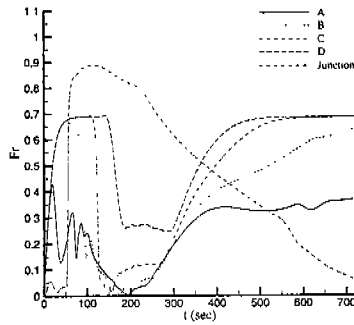


그림 14. 경사 0.01일 때 지류에서의 Froude수 변화

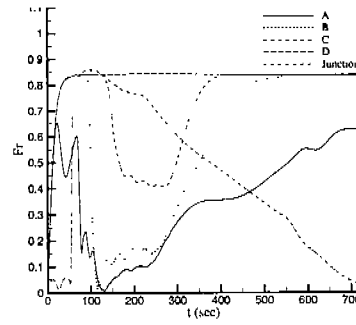


그림 15. 경사 0.015일 때 지류에서의 Froude수 변화

여 흐름의 이송특성을 정확히 표현할 수 있으므로 상류(常流)와 사류(射流)가 공존하는 흐름에도 적용할 수가 있다. 본 모형을 1차원 및 2차원 댐 붕괴 문제에 적용하여 모형의 타당성 및 적용성을 검증하였으며 본류와 지류가 존재하는 가상 하천에 적용을 한 결과 홍수파의 지류의 특정지점으로의 도달시간 및 홍수지속시간 등을 예측할 수가 있었고 지류의 경사에 따른 첨두수심의 변화도 알아볼 수가 있었다. 본 연구에서는 모형을 가상 하천에만 적용하였지만 앞으로 본 모형을 실제 흐름에 적용하거나 이론치가 아닌 실측치와의 비교를 통하여 수치모형의 타당성을 입증할 필요가 있겠다.

4. 참고문헌

- [1] A. O. Akan, B. C. Yen (1981), Diffusion-wave flood routing in channel networks, *Journal of the Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 107, 719-732.
- [2] F. Alcrudo, P. Garcia-Navarro (1993), A high-resolution Godunov-type scheme in finite volumes for the 2D shallow-water equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 16, 489-505.
- [3] K. Anastasiou, C. T. Chan (1997), Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 24, 1225-1245.
- [4] C. Hirsch (1988), *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. 2, John Wiley & Sons, New York.
- [5] M. E. Hubbard (1999), Multidimensional slope limiters for MUSCL-Type finite volume schemes on unstructured grids, *Journal of Computational Physics*, Vol. 155, 54-74.
- [6] P. Jawahar, H. Kamath (2000), A high-resolution procedure for Euler and Navier-Stokes computations on unstructured grids, *Journal of Computational Physics*, Vol. 164, 165-203.
- [7] P. L. Roe (1981), Approximate Riemann Solvers, parameter vectors, and difference schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, 357-372.
- [8] B. van Leer, W.-T. Lee, and K. G. Powell (1989), Sonic-point capturing, AIAA-89-1945-CP.
- [9] C. -W, Shu, S. Osher (1988), Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes, *Journal of Computational Physics*, Vol. 77, 439-471.
- [10] J. W. Wang, R. X. Liu (2000), A comparative study of finite volume methods on unstructured meshes for simulation of 2D shallow water problems, *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 53, 171-184.
- [11] D. H. Zhao, H. W. Shen, G. Q. Tabios III, J. S. Lai and W. Y. Tan (1994), Finite-volume two-dimensional unsteady flow model for river basins, *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 120, No. 7, 863-883.