

층류 상태 밀도류의 수치모의 Numerical simulation of laminar density current

최성욱*, 임동균**

1. 서론

일반적으로 평균유속과 밀도층의 두께를 각각 특성속도와 특성길이로 사용할 때 레이놀즈수 500-1000이하의 밀도류를 층류 상태로 간주할 수 있다 (Simpson, 1997). 층류 밀도류는 우리 주변에서도 쉽게 찾아 볼 수 있다. 침전지에서 발생하는 밀도류 (in sedimentation tank), 축열식 냉각탑에서의 밀도류 (in chilled water storage), 화산폭발로 인한 용암의 흐름 (lava flow), 그리고 토석류 (mud flow or debris flow) 등을 층류 밀도류의 예로 들 수 있다.

층류 밀도류는 역학적으로 난류 상태의 밀도류와 다른 특성을 가지고 있다. 난류상태의 밀도류는 부력과 관성력에 의한 흐름이지만 층류상태의 밀도류는 판성력 대신에 점성력이 중요한 역할을 하게 된다. 기존의 연구는 주로 난류 상태의 밀도류 위주로 진행되어 왔다. 층류 밀도류를 연구하기 위해서는 대부분 실험에 의존하게 되는데, 실험실에서 염수를 이용하여 저 레이놀즈 수의 밀도류를 발생시키려면 매우 작은 유속과 특성길이를 갖는 흐름을 만들어야 한다. 예를 들어, 레이놀즈 수가 500인 밀도류의 경우 단위 폭 당 유량은 약 $5 \text{ cm}^2/\text{sec}$ 이어야 한다. 이와 같은 작은 규모의 실험을 통해서는 대략적으로 밀도류의 거동을 살피는 것은 가능하지만 정량적인 자료를 계속하는 것은 매우 어렵다. 이러한 이유로 층류 밀도류에 관한 구체적 실험성과는 문헌을 통해 보고된 바가 많지 않다.

Homan (1996)은渦 (vortex)와熱의 수송방정식을 해석하는 층류 밀도류에 관한 수치모형을 제시하였다. 유함수 방정식은 중앙차분법을 적용하여 이산화 하였으며,渦 방정식과熱에대한 이송-확산 방정식은 ADI 기법 (Alternating Direction Implicit scheme)을 사용하였다. 이송항은 MPL 기법 (Monotonic Piecewise Linear scheme)을 사용하여 열 경계층에서의 정확도를 높였으며, 시간차분을 위하여 Crank-Nicolson 기법을 사용하였다. 기존의 수치해석 방법은 수치확산으로 인하여 밀도경계면을 정확하게 모의하지 못하였으나, Homan의 모형은 이러한 단점을 극복한 것으로 평가받고 있다. 본 연구에서는 Homan의 모형을 이용하여 2차원의 수평 수조에 바닥으로부터 유입되는 밀도류를 수치모의 하였다. 하류부로 진행되는 밀도류가 주변 수체와 경계를 이루는 면에서 온도경사가 매우 크게 나타나는 것을 확인할 수 있었고, 실험관측 결과와 섭동법에 의한 해와 비교하여 계산된 유속 및 온도분포를 검증하였다. 시간에 따른 밀도류의 진행거리도 실험 결과 및 근사해법에 의한 해와 비교하여 잘 일치함을 확인하였다.

2. 지배 방정식

본 연구에서 수치해석을 하기 위한 2차원 수조의 개략도와 좌표축 설정은 그림 1에 나타내었다. 특성 길이, 유속, 시간차원은 각각 유입부의 높이 l , 단면평균 유입유속 u_0 , 그리고 전달 시간 (convective time) l/u_0 를 사용하였다. 온도차원에 대한 특성값은 주변류의 초기 온도와 정상상태의 유입류 온도차이 $T_0 - T_i$ 를 사용하였다. 2차원 비압축성 유체에 관한 유함수 방정식과渦 및熱에 대한 이송-확산 방정식은 각각 다음과 같다

$$\nabla^2 \psi = -\Omega \tag{1}$$

* 연세대학교 공과대학 사회환경·건축공학부 부교수 (e-mail: schoi@yonsei.ac.kr)

** 연세대학교 대학원 토목공학과 석사졸업 (e-mail: himdk@yonsei.ac.kr)

$$\frac{D\Omega}{Dt} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \Omega + \frac{1}{Fr^2} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{Pr Re} \nabla^2 T \quad (3)$$

여기서 ψ 는 유함수, Ω 는渦, t 는 무차원 시간, x 는 흐름방향으로의 무차원 거리, T 는 무차원 온도, Re 는 레이놀즈 수 ($=u_0 l / \nu$), Fr 은 프루드 수 ($=u_0 / \sqrt{g'l}$), Pr 은 프란틀 수 ($=\nu / \alpha$), ν 는 동점성계수, g' 은 유효중력가속도로서 $g' = g(\Delta\rho / \rho) = g(\beta\Delta T)$, α 는 열확산계수, 그리고 β 는 열팽창계수이다. 식(1)-(3)의 수치 해석 범위는 다음과 같다.

$$0 \leq x \leq X; \quad 0 \leq y \leq Y \quad (4)$$

여기서 $X=W/l$ 이고 $Y=H/l$ 이다 (W 와 H 는 각각 흐름방향으로의 수로 길이와 수심이다).

지배 방정식은 x, y 방향으로 동일한 크기 h_c 인 균등한 격자를 사용하여 이산화 되었다. 즉, (x_i, y_j) 지점은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$x_i = ih_c, \quad y_j = jh_c \quad (5)$$

본 수치모형에서 시간 간격 Δt 는 일정하게 증가하였다. 즉 n 번째 단계에서의 시간은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$t^n = n\Delta t \quad (6)$$

Homan 의 모형에서 식(1)에 의한 유함수에 관한 Poisson 방정식은 중앙차분법을 사용하여 이산화되었으며,渦에 관한 이송-확산 방정식은 Briley 와 McDonald (1980)의 ADI 기법이 사용되었다. 동일한 ADI 기법으로 열의 수송방정식도 이산화되었는데, 특별히 이송항은 공간에 대하여 2차의 정확도를 보이는 van Leer (1977)의 MPL 기법이 사용되었다. Homan 의 모형은 shock capturing 기법인 MPL 기법을 사용하여 열 경계층 처리를 하였는데, 일반적으로 낮은 정도의 기법에서 나타나는 수치확산 (numerical diffusion)을 제거하여 수치모의의 정확도를 높였다. 세 방정식 모두 시간차분을 위하여 Crank-Nicolson 기법을 사용하였다. 수치계산시 熱 수송방정식,渦 수송방정식, 그리고 유함수 방정식이 순서대로 해석되며, 각각의 종속변수들은 단계별로 새로운 값들이 입력되도록 하였다.

3. 초기 및 경계조건

3.1 초기조건

본 연구에서 사용된 주변류에 대한 초기조건은 유속이 존재하지 않고 온도가 일정한 상태로 가정하였다. 즉, 유함수와渦는 0이고, 무차원된 온도는 1로서 일정하다.

$$\psi = \Omega = 0, \quad T = 1 \quad (7)$$

3.2 경계조건

고정경계에서는 유함수와 온도조건만을 고려한다. 즉渦는 경계조건에 필요하지 않고, 다른 경계조건으로부터 계산하여 사용한다. 그림 1의 $x=0, 1 \leq y \leq Y$ 에서의 유함수와 온도의 경계조건은 다음과 같다.

$$\psi = \theta(t; t_0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

여기서 $\theta(t; t_0)$ 는 경사함수로서 다음과 같이 정의하였다.

$$\theta(t) = \begin{cases} (t/t_0)^2(3-2t/t_0) & \text{for } t/t_0 \leq 1 \\ 1 & \text{for } t/t_0 > 1 \end{cases} \quad (10)$$

위에서 제시한 함수 θ 는 유입경계에서 유속과 온도를 완만한 경사로 유지시켜 정상상태를 유지하기 위하여 사용하였다. 이와 같은 경사함수는 경계조건외 충격을 감소시켜 오차의 증가를 제거한다. 본 연구에서는 경사함수의 무차원 시간값 t_0 를 2로 고정하여 결과를 해석하였다. 위와 동일한 방법으로 나머지 고정단에서도 유속함수와 온도 경계조건을 적용하였다.

유입경계의 유속분포는 유입구의 크기 l 로부터 층류제트 (laminar jet)흐름으로 방출된다고 가정하였다. 유입구의 유속분포를 표현하면 다음과 같다.

$$u = 6y(1-y)\theta(t;t_0) \quad (11)$$

$$v = 0 \quad (12)$$

여기서 경사함수 θ 는 앞 절에서 언급한 바와 같이 유입구에서의 흐름을 정상상태로 유지하기 위하여 사용되었다. 유입구로부터 방출되는 유입류는 주변류의 온도보다 상대적으로 낮은 온도의 유체이다. 본 연구에서 방출되는 유입류의 온도는 유입구 전면에 대하여 동일하며 시간에 따라서 다음과 같은 분포를 가진다.

$$T = 1 - \theta(t;t_0) \quad (13)$$

온도조건에 대해서도 유속과 동일한 이유로 경사함수를 사용하였다. 경사함수의 무차원 시간값까지는 서서히 온도차를 증가시키다가 무차원 기준시간 이상에서는 일정하게 유지하여 해석 하였다. 본 연구에서는 주변류와 유입류의 온도차를 이용하여 밀도차이를 발생시켰다. 즉 낮은 온도로 유입되는 유입류는 상대적으로 주변류보다 높은 밀도를 가진다. 마지막으로 유출경계에 대해서는 Neumann 조건을 적용하였다.

4. 밀도류 구조

4.1 온도와 흐름 구조

본 연구에서 적용한 수치모형의 검증을 위해 Nakos (1994)의 실험 조건을 사용하였다. Nakos 는 층류상태 밀도류를 재현하기 위하여 비교적 실험이 용이한 각기 다른 온도의 유체를 사용하였다. 유량은 $1.56 \text{ cm}^2/\text{sec}$, 흐름방향으로의 거리는 240 cm , 유입구의 높이는 1 cm 이고, 초기 주변류의 평균 온도는 $24.9 \text{ }^\circ\text{C}$, 유입류의 온도는 $5.0 \text{ }^\circ\text{C}$ 이다. 이러한 실험조건으로부터 결정되는 레이놀즈 수는 102, 밀도 프루드 수는 0.99, 그리고 프란틀 수는 11.0 이다.

그림 2는 무차원시간 32.9일때 무차원거리 10지점에서의 바닥으로부터 거리에 따른 온도 분포를 도시한 것이다. 가로축에서 바닥으로부터의 거리와 세로축의 온도는 각각 유입부의 높이와 주변류와 유입류의 온도 차로 무차원화 시켰다. 기호와 직선은 각각 실험과 수치모형에 의한 결과를 도시한 것이다. 그림 2의 수치모의 결과로부터 온도 특성을 살펴보면, 무차원 수심의 1.0-2.0사이구간에서 온도경사가 매우 큰 것을 알 수 있다. 이와 같은 현상으로부터 이 구간에서 온도가 급격하게 변화하며, 두 유체가 서로 경계를 이루고 있는 것을 알 수 있다. 또한 온도경사가 비교적 완만한 부분과 급격한 변화를 이루는 곳의 연결점은 대략 1.0으로써 밀도류의 두께와 일치한다. Yoo (1986)에 의하면, 점성력과 부력이 지배적인 밀도류에서 밀도류의 두께는 유입구의 높이와 일치한다고 하였고, 수치모의 결과도 이러한 경향을 잘 반영하는 것으로 나타났다. 그러나 실측된 밀도류내의 온도분포는 모의된 분포보다 낮으며, 최대값은 약 15 %정도의 오차를 보이고 있다. 이러한 차이는 계측상의 오차와 수치모의 조건이 실제상황을 정확히 반영을 하지 못하기 때문으로 판단된다.

그림 3은 $x=5$ 지점에서의 바닥으로부터 거리에 따른 유속 분포를 도시한 것이다. 가로축에서 바닥으로부터의 거리와 세로축의 유속은 각각 유입부의 높이와 유입부의 평균 유속으로 무차원화 시켰다. 실험 조건은 온도에서 적용한 조건과 동일하다. 모의된 유속분포는 시간에 관계없이 상하대칭을 이루는 포물선 형의 유사한 모양을 보였으며, 밀도층의 중앙에서 유속의 최대값이 발생하였다. 또한 유속이 영이되는 높이와 온도경사가 최대인 지점이 거의 일치하는 것이 확인되었다. 그러나 유속의 크기는 전 영역에 걸쳐 섭동법에 의한 결과가 수치모형의 결과보다 작게 나타나고 있다. 이와 같은 현상은 섭동법의 낮은 정확도와 관련 있는 것으로

로 보인다. Nakos (1994)도 자신의 수치모형을 이용하여 해석 결과와 섭동법에 의한 수직구조를 비교하였는데 약 16-24 %정도의 오차를 보인 바 있으며, 본 수치모의 결과에서도 약 20 %정도의 오차를 나타내었다. 수리 실험에서 정확한 유속분포를 측정하는 것은 매우 어려우며, 특히 본 연구에서와 같이 얇은 층을 이루면 진행하는 밀도류에서 유속분포를 측정한다는 것은 더욱 어렵다. Nakos (1994)는 온도 측정과 함께 흐름방향으로 동일한 지점에서 유속을 측정하였다. 그러나 그의 연구에서 유속 측정결과가 매우 부정확하여 실험결과는 온도 분포만 나타내었다고 밝히고 있다. 따라서 본 연구에서도 유속분포는 실험결과와의 비교 대신에 섭동법에 의한 결과를 이용하였다.

그림 3은 각각의 무차원 시간에 대하여 수로바닥을 따라 진행되는 밀도류의 온도 분포를 도시한 것이다. 가로축과 세로축의 거리는 각각 유입부의 높이로 무차원화 시켰다. 주변류로 얇은 층을 이루며 퍼지는 유입류의 형태를 나타내어주는 등온선 (temperature contour)결과는 Simpson (1997)이 실험적으로 제시한 결과와 유사하다. 그림으로부터 밀도류 선단부에 위치한 침투높이가 바닥으로부터 올라와 있으며, 성층부의 두께가 일정하게 유지되고 있음을 알 수 있다. 이와 같은 형태는 점성력에 의해 지배되는 밀도류의 특성을 나타내어주는 것이다 (Homan 과 Soo, 1997). 또한 그림으로부터 온도의 수직구조를 살펴보면, 무차원 수심 1.0-2.0구간에서 온도경사가 매우 큰 것을 알 수 있다. 이 구간에서는 온도가 급격하게 변화하며, 두 유체가 서로 경계를 이루고 있다. 이러한 결과는 본 연구에서 구성한 수치모형이 밀도류의 경계면에서 실제 물리현상을 정확하게 모의함으로써 기존의 모형들 (Kao 등, 1978; Cai 등, 1993)이 수치확산으로 인하여 물리현상을 정확히 수치모의하지 못하는 단점을 극복한 것으로 보인다.

그림 5(a)와 (b)는 동일한 모의 조건하에서 각각 $t=20$ 과 40 에서 계산된 2차원 유속벡터도이다. 가로축과 세로축은 유입구로부터의 거리와 바닥면으로부터의 거리를 유입구 높이로 무차원 하였으며, 각각의 벡터는 지점에서의 유속방향과 크기를 나타내어 준다. 그림에서 시간이 증가할수록 순환류 (circulation flow)의 위치가 이동하는 것을 알 수 있다. 이러한 순환류의 위치는 밀도류 선단부 근처에서 발생하고 있고, 밀도류의 특성을 잘 나타내고 있다 (Homan 과 Soo, 1997). 성층부에서의 흐름은 선단부의 흐름에 비해 안정되어 있으며, 주변류와 유입류 사이의 혼합이나 유입이 거의 일어나지 않고 있다. 이와 달리 밀도류 선단부에서는 수리학적 으로 매우 복잡한 흐름 특성을 가지고 있으며, 서로 다른 밀도를 가지는 두 유체의 혼합과 유입이 일어나고 있다. 그림에서 성층부의 유속에 대한 수직구조를 살펴보면, 성층부 중앙에서 유속의 침투치가 발생하고 성층부 경계면까지 점차 감소하는 것을 알 수 있다. 또한 경계면 부근에서는 존단력에 의해 흐름방향이 서로 반대로 나타나고 있다.

4.2 밀도류 진행 거리

Huppert (1982)와 Didden 과 Maxworthy (1982)는 층류상태에서 시간에 따른 밀도류 진행 거리를 이론적 해석과 실험을 통하여 다음과 같이 제시하였다.

$$\frac{x_N}{(g'q^3/\nu)^{1/5}t_1^{4/5}} = k_1 \left(\frac{t_N}{t_1} \right)^{4/5} \quad (14)$$

여기서 x_N 은 밀도류 진행 거리, t_N 은 밀도류 진행 거리에 따른 시간, q 는 단위폭당 유량, k_1 는 비례상수로써 0.73이고, t_1 은 다음과 같이 정의 된다.

$$t_1 = \left(\frac{q^4}{g'^2 \nu^3} \right)^{1/3} \quad (15)$$

위의 식으로부터 층류상태의 밀도류 진행 거리는 시간의 0.8제곱에 비례하는 것을 알 수 있다.

그림 3에서 제시한 밀도류 선단부의 위치를 시간에 따라 도시하면 그림 6과 같다. 그림에서 기호는 Huppert (1982)와 Didden 과 Maxworthy (1982)의 실험결과이고, 직선과 점선은 각각 수치모의와 근사해법 결과이다. 모든 결과가 거의 일치하고 있는 것을 알 수 있다. 그러나 초기단계의 시간에서는 근사해법의 진행 거리에 비하여 다소 작고, 후반부에서는 다소 많이 진행하였다. 수치모의 결과로부터 산정된 진행 거리와 시간의 관계는 0.89제곱에 비례하고 있다. 수치모의와 근사해법의 결과가 차이를 보이는 이유로는 경사함수를 도

입하여 유입경계를 가정하였기 때문으로 보인다.

5. 결론

본 연구는 Homan (1996)에 의해 개발된 수치모형을 사용하여 층류상태의 밀도류를 수치모의 하였다. Homan 의 모형은 유함수에 관한 Poisson 방정식과渦 및 熱의 수송방정식을 수치해석하는 알고리즘으로 구성 되어있다. 수치모형을 2차원의 수평 수조로 유입되는 밀도류에 적용하여 유속 및 온도 등의 수직구조와 밀도류 진행에 따른 등온선 분포, 그리고 진행거리를 살펴 보았다. 먼저 수치모의된 온도분포는 Nakos (1994)의 실험결과와 동일하게 온도경계면에서 급한 경사를 보였다. 그러나 밀도층내에서 수치모형에 의해 계산된 온도가 실험결과보다 약 15 % 높게 나타났다. 모의된 유속분포는 시간에 관계없이 상하대칭의 포물선 형의 유사한 모양을 보였으며, 밀도층의 중앙에서 유속의 최대값이 발생하였다. 또한 유속이 영이되는 높이와 온도 경사가 최대인 지점이 거의 일치하는 것이 확인되었다. 수치모의된 유속분포는 Nakos (1994)의 섭동법에 의한 분포와 매우 유사한 결과를 얻었는데, 계산 결과가 약 20 %정도 섭동법에 의한 유속보다 크게 나타났다. 시간에 따른 밀도류의 진행을 등온선으로 도시하여 모의된 밀도류가 경계면에서 주변 수체와 이루는 온도경사가 매우 급한 것을 확인하였다. 이것은 기존의 모형들이 수치확산으로 인하여 층류 밀도류의 물리현상을 정확히 모의 하지 못하는 단점을 극복한 것으로 보인다. 또한 선단부에 위치한 첨두높이는 바닥으로부터 올라와 있었으며, 성층부의 두께가 일정하게 유지되는 것을 확인하였다. 2차원 유속벡터도에서 순환류의 위치는 밀도류 선단부 근처에서 발생하고 있고 성층부에서의 흐름은 선단부의 흐름에 비해 안정되어 있으며, 주변류와 유입류 사이의 혼합이나 유입이 거의 일어나지 않고 있음을 확인하였다. 이와 달리 밀도류 선단부에서는 유체역학적으로 매우 복잡한 흐름 특성을 가지고 있고, 서로 다른 밀도를 가지는 두 유체의 혼합과 유입이 일어나고 있다. 또한 시간에 따른 밀도류의 진행거리를 도시하여 시간의 0.89제곱에 비례하는 것을 확인하였다.

6. 참고문헌

- Briley, W.R. and McDonald H. (1980). "On the structure and use of linearized block implicit schemes." *Journal of Computational Physics*, 34, 54-64.
- Cai, L., Stewart, Jr. W.E., and Sohn, C.W. (1993). "Turbulent buoyant flows into a 2D storage tank." *International journal of Heat and Mass transfer*, 36, 4247-4256.
- Didden, N. and Maxworthy, T. (1982). "The viscous spreading plane and axisymmetric gravity currents." *Journal of Fluid Mechanics*, 121, 27-42.
- Homan, K.O. (1996). *The effect of inlet conditions and tank geometry on the thermal performance of stratified chilled water storage*, Ph. D. dissertation, University of Illinois, Urbana-Champaign, IL.
- Homan, K.O. and Soo, S.L. (1997). "Model of the transient stratified flow into a chilled-water storage tank." *International Journal of Heat and Mass transfer*, 40(18), 4367-4377.
- Huppert, H.E. (1982). "The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface." *Journal of Fluid Mechanics*, 121, 43-58.
- Kao, T.W., Park, C., and Pao, H. (1978). "Inflows, density currents, and fronts." *Physics of fluids*, 21, 1912-1922.
- Nakos, J.T. (1994). "The prediction of velocity and temperature profiles in gravity currents for use in chilled water storage tanks." *Journal of Fluids Engineering*, ASME, 116, 83-90.
- Simpson, J.E. (1997). *Gravity currents in the environment and the laboratory*. 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Van Leer, B. (1977). "Towards the ultimate conservative difference scheme." *Journal of Computational Physics*, 23, 276-299.
- Yoo, J., Wildin, M.W., and Truman, C.R. (1986). "Initial formation of a thermocline in stratified thermal storage tanks." *ASHRAE Transactions*, 92, 280-292.

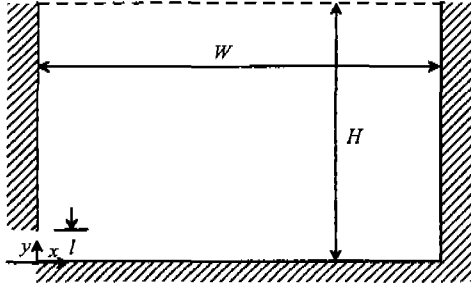


그림 1. 2차원 수치모의 개략도

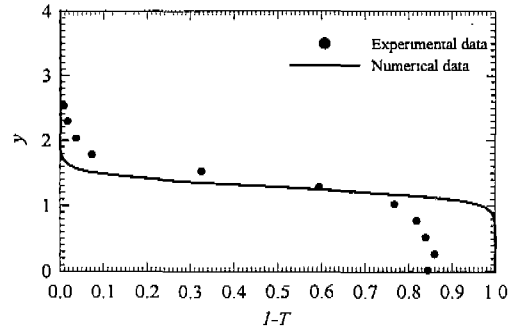


그림 2. 온도분포 ($t=32.9, x=10$)

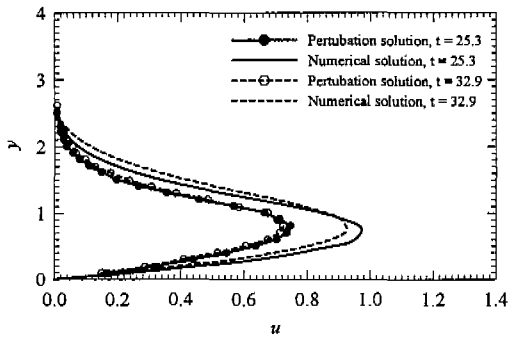


그림 3. 유속분포 ($x=5$)

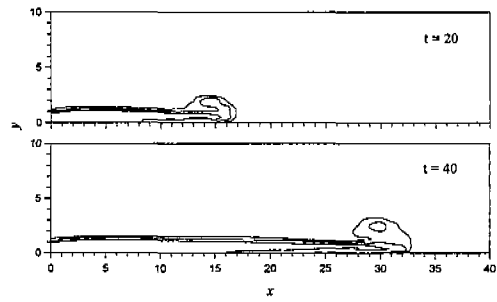
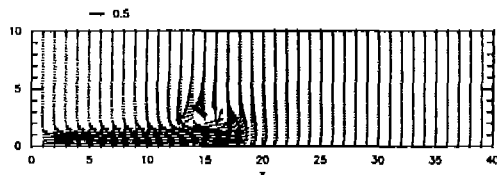
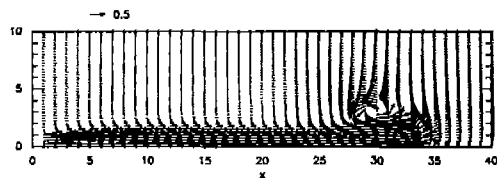


그림 4. 밀도류의 등온선 ($T=0.1, 0.5, 0.9$)



(a) $t=20$



(b) $t=40$

그림 5. 2차원 유속 벡터도

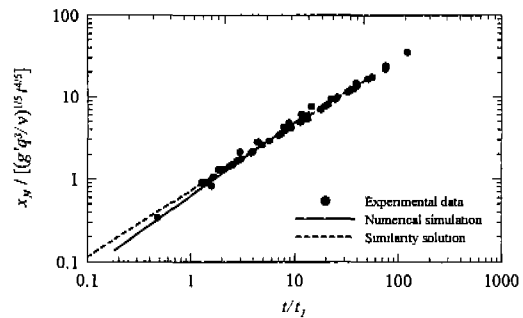


그림 6. 밀도류 진행 거리