

얇은 정사각형 용기내의 스핀업 유동에 관한 연구

박재현 · 서용권
 동아대학교 기계공학부

The Study for Spin-up Flows in a Shallow Quadrangular Container

Jae-Hyun Park AND Yong-Kwan Suh

School of Mechanical Engineering, Dong-A University, Pusan 604-714, Korea

KEY WORDS: spin-up(스핀업), shallow quadrangular container(얇은 정사각형 용기), numerical analysis(수치해석)

ABSTRACT: In this study, spin-up flows in a shallow rectangular container are analysed by using three-dimensional computation. We compared our results with those obtained by quasi three-dimensional computation. Our results show that quasi 3-D solution is not accurate enough and it provides far less damped solution..

1. 서 론

유체기계, 원심분리기, 액정표시장치(TFTLCD) 제조 등의 산업분야와 지구물리학, 천체물리학, 기상학 등에서 중요한 현상으로 다루어지는 스핀업(spin-up)이란 유체를 담고 있는 용기가 정지 혹은 강체 회전(solid-body rotation) 상태에서 갑자기 회전 속도가 증가하는 것을 의미한다.

지금까지 스핀업에 관한 연구들은 대부분이 2차원 해석이다. van Heijst 등(1)이 실험을 통하여 직사각형 용기에 생성되는 셀의 개수가 종횡비와 극히 작은 섭동(또는 교란)에 의해 바뀌어 질 수 있다는 것을 밝혀냈다. 또한 van Heijst 등(2)은 직사각형 용기 바닥에 경사를 주고 이에 따른 자유표면에서의 보텍스(vortex)의 거동과 결합(merging)을 연구한 바 있다. 그리고 서(3)와 Suh(4)는 직사각형 용기의 종횡비(aspect ratio)에 따른 용기 내의 셀 형성 메커니즘을 수치해석으로 연구하였다. 또한 최근에는 Henderson 등(5)이 직사각형의 종횡비와 레이놀즈 수를 파라미터로 하여 용기 좌우 모서리에서 발생한 반시계 방향(cyclonic) 보텍스 간의 결합 여부를 조사하였으며 최와 서(6), 최 등(7)은 에크만 분출모델(Elkman pumping models)을 사용하여 직사각형 용기의 수심과 레이놀즈 수의 변화에 따른 자유표면에서의 보텍스 거동과 결합을 연구하였고, 임광옥 등(8)은 얇은 정사각형 용기내의 유동을 포물형 Poiseuille 유동으로 해석하였다.

본 연구는 회전하는 평판 사이의 유동해석에 임광옥 등(8)이 사용한 포물형 Poiseuille 유동모델의 타당성을 검증하기 위해 PC-cluster형 병렬컴퓨터를 이용하여 3차원 DNS(Direct Numerical Simulation)로 매우 얇은 정사각형 용기내의 스핀업 유동을 수치해석하였다

2. 이 론

2.1 모델 및 좌표계

Fig. 1은 본 연구에서 사용된 모델과 좌표계를 나타낸다. 여기서 L은 용기의 한 변의 길이이며 H는 수직높이이다.

용기는 중앙지점 즉, $x^* = L/2, y^* = L/2$ 인 지점을 축으로 회전한다. 동점성 계수 ν 인 유체가 담긴 정사각형 용기가 정지상태에서 갑자기 Ω 로 회전하는 경우에 용기 내에 형성되는 스핀업 유동을 대상으로 한다.

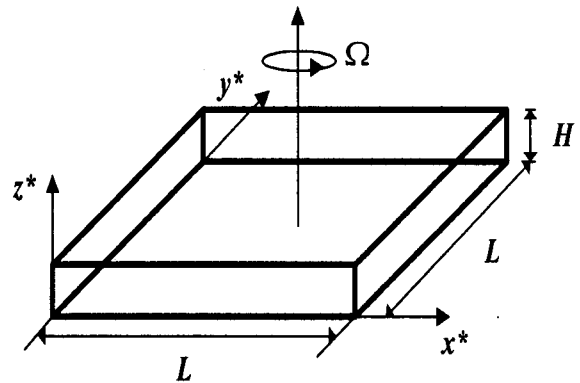


Fig. 1 Schematic diagram of the model basin

2.2 지배방정식

속도를 $L\Omega$ 로, 시간을 $1/\Omega$ 로, 그리고 길이를 L로 무차원화한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - 2(1 + f)v = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + y \frac{df}{dt} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + 2(1+f)u = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - x \frac{df}{dt} \quad (1b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (1c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

여기서 t 는 무차원 시간, x, y 는 용기와 같이 회전하는 무차원 좌표계를 나타낸다. 그리고 f 는 용기의 각속도 차이에 대해 무차원화한 것이며 다음과 같이 정의된다.

$$f = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1 + \cos \omega t) & \text{for } 0 \leq t \leq \pi/\omega \\ 0 & \text{for } t \geq \pi/\omega \end{cases} \quad (3)$$

식 (1a), (1b), (1c), (3) 및 기하학적 관계에서 사용된 무차원 변수는 다음과 같다.

$$Re = \frac{L^2 \Omega}{\nu}, \quad \omega = \frac{\omega^*}{\Omega}, \quad h = \frac{L}{H} \quad (4)$$

여기서, ω^* 는 용기가 정지상태에서 최종 각속도(Ω)로 이전 되는 동안의 변화를 나타내는 각속도로서 유차원이고, 용기의 회전 각속도 변화는 실제로 π/ω^* 의 시간만에 종료된다. 본 연구에서는 ω 가 매우 큰 값을 가지며 용기는 정지상태에서 아주 짧은 시간동안에 최종 각속도에 도달한다. h 는 용기의 수직중횡비로서 본 연구에서는 0.04와 0.02가 사용되었다.

x 방향과 y 방향의 와도(vorticity) 성분 ζ 와 수평면에서의 유체 divergence는 다음과 같다.

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_h = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6)$$

그리고 수평단면의 공간평균운동에너지는 다음과 같다.

$$E(t) = \frac{1}{A} \int (u^2 + v^2) dA \quad (7)$$

여기서 A 는 유동장의 면적으로서 1이다.

3. 수치해석

3.1 격자계

Table 1 Number of grids and Re for each computational case

h	Re	$I \times J \times K$
0.04	20850	$202 \times 202 \times 12, 202 \times 202 \times 52$
0.02	45000	$202 \times 202 \times 12, 202 \times 202 \times 32,$

Table 1은 본 연구에서 사용한 수직중횡비(h), 레이놀즈 수와 수치해석 시에 사용한 격자계를 나타낸다. 일반적으로 Re수가 증가할수록 격자계가 증가해야 하지만 본 연구에서는 동일한 격자계와 Re에 따른 서로 다른 격자계에 대해서 수치해석 결과를 비교하여 얇은 사각형의 용기내의 적정 격자계를 연구하였으며, z 방향에 대한 서로 다른 격자계에 대해서 동일한 결과임을 확인하였다.

지배방정식을 공간에 대해서는 중심차분으로 차분화하였고, 시간에 대해서는 오일러(Euler)법으로 처리하였으며, 무차원 시간 증분은 0.001로 두었다. 병렬처리를 위해 압력항은 수렴의 가속을 위한 전처리로 D-ILU법을 사용한 PCGM(pre-conditioned conjugate gradient method)을 사용하여 해를 구하였다.

속도경계조건은 각 벽면에 대해서 점착조건(no-slip condition)과 비침투조건(impermeable condition)을, 압력경계조건은 Neumann condition을 사용하였다.

3.2 병렬처리

Fig. 2는 병렬컴퓨터의 PE(processing element)의 영역별 배치를 나타낸 것이다. 전체 계산영역을 x 방향으로 8개, y 방향으로 2개, z 방향으로 2개의 작은 영역으로 분할하여 각 PE가 해당 영역을 계산하도록 하였으며, 영역과 영역사이의 경계부분에서는 각 PE간의 네트워크를 통한 데이터 전송이 이루어진다. 각 PE의 하드웨어의 사양을 같게 하는 한편, 전체 계산영역을 PE수에 맞게 균일하게 분할하여 PE의 계산량을 균일하도록 맞추었다.

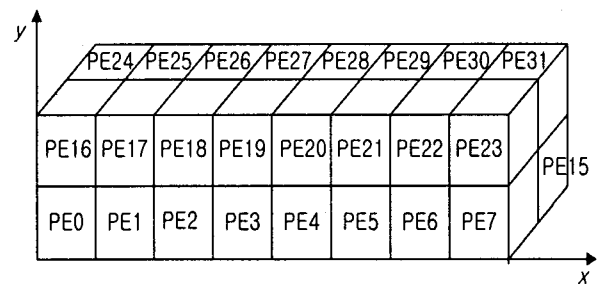


Fig. 2 Schematic of domain decomposition

Fig.3은 데이터 전송의 방법을 x 방향을 예로서 나타낸 것이다. PE1이 계산한 $i=i_{max}-1$ 의 데이터를 PE2의 $i=1$ 로 전송하며 동시에 PE2에서 계산한 $i=2$ 의 데이터를 PE1의 $i=i_{max}$ 의 데이터로 전송한다. 즉, 각 PE가 담당하는 계산영역이 인접한 PE와 겹치도록 하여 node boundary의 data가 잘못 전송됨으로서

나타낼 수 있는 error를 제거하였다.

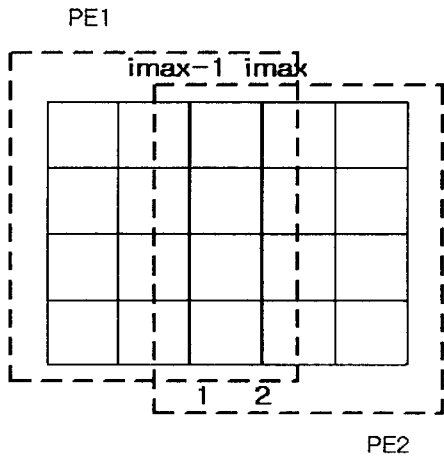


Fig. 3 Grid structure for the numerical calculation

4. 결과 및 검토

4.1 x-y 평면상의 유동

Fig. 4는 수평단면상의 공간평균 운동에너지 ($E(t)$)를 나타낸 것이다. 수평면의 유동은 상하 대칭을 이루기 때문에 공간평균 운동에너지도 대칭을 이룬다. 그리고 시간이 증가함에 따라서 유동이 급격히 줄어들음을 보여준다. 이는 임광옥 등(8)이 포물형 Poiseuille 유동모델을 사용하여 수치해석한 결과와는 차이가 있다.

Fig. 5는 동일한 Re에 대해서 수직방향의 격자수를 달리했을 때의 수평중앙단면의 공간평균운동에너지이다. 수직방향의 격자수가 12일 경우와 32일 경우에 대해 동일한 결과임을 알 수 있다.

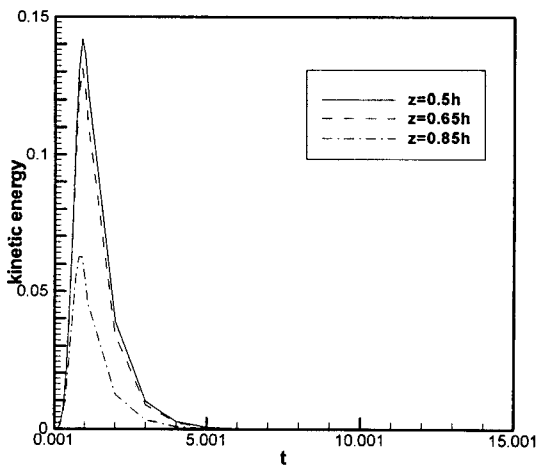


Fig. 4 Spatially averaged kinetic energy for $Re=45000$ and $h=0.02$

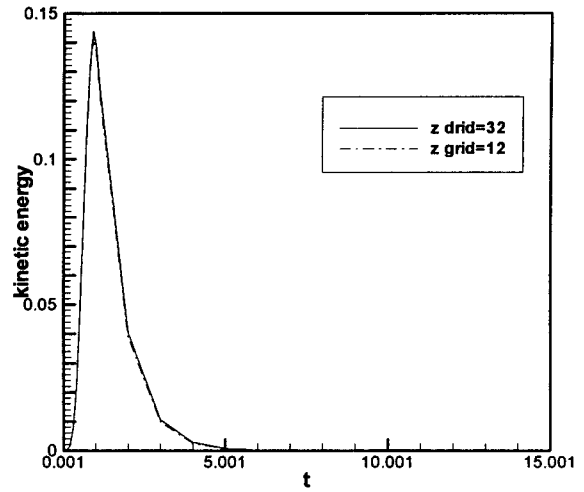


Fig. 5 Spatially averaged kinetic energy for $Re=45000$, $h=0.02$ at $z=h/2$

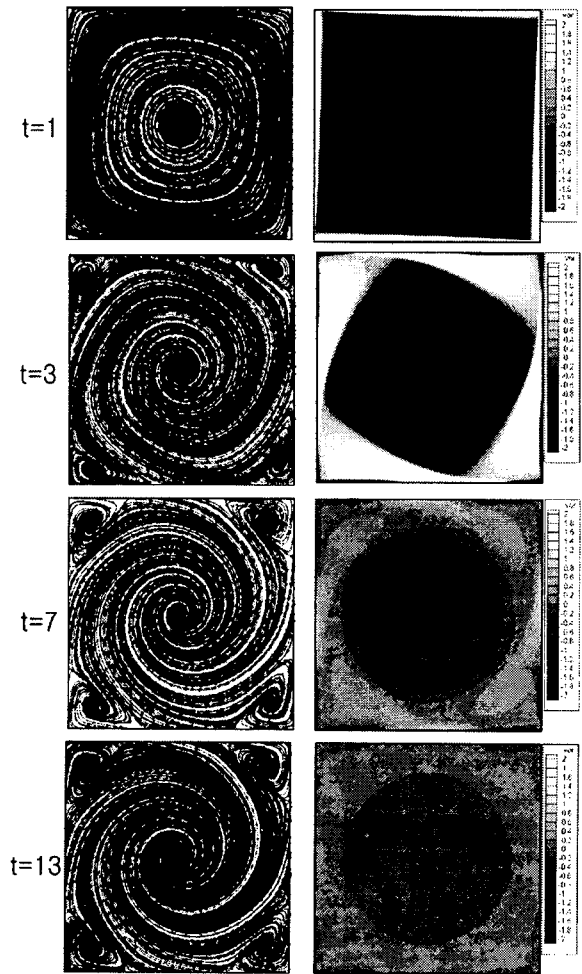


Fig. 6 x-y plane streamline and vorticity plots at $z=h/2$ for $h=0.04$, $Re=20850$

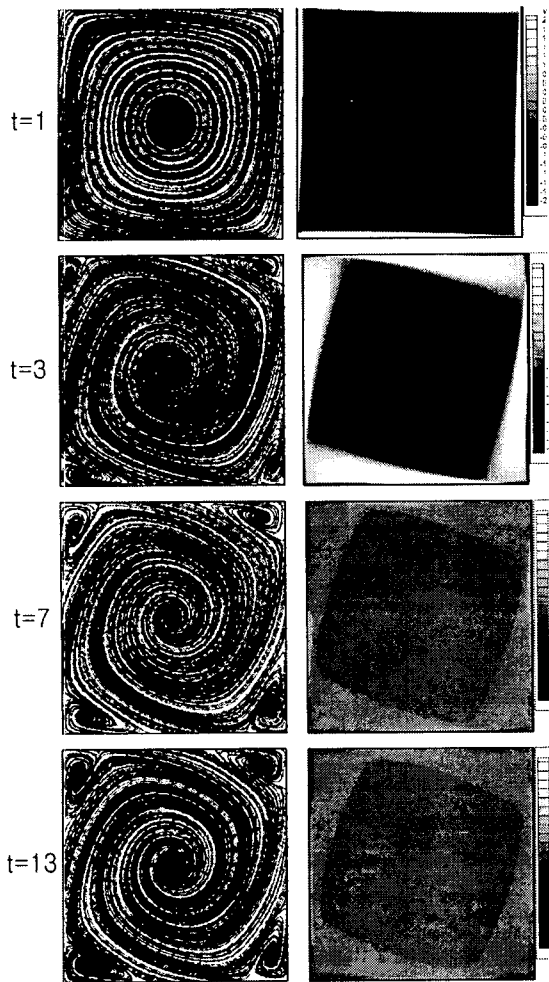


Fig. 7 x-y plane streamline and vorticity plot at $z = h/2$ for $h=0.02$, $Re=45000$

Fig. 6과 Fig. 7는 h 는 0.04 와 0.02 에 대한 수평단면상의 유선과 와도를 $z = h/2$ 에서 나타낸 것이다. 용기가 회전함에 따라서 용기의 중앙에 주 보텍스가 나타나고 용기의 네 모서리 부분에서 2차 보텍스가 생성되지만 시간이 지남에 따라서 더 이상 발달하지 못하고 강체운동(solid body rotation)으로 접어든다. 특히 유동의 감쇄 효과가 두드러지며, 이는 공간평균 운동에너지(Fig. 4)에서도 확인된다. 그리고 $Re=20850$ 경우에 비해서 $Re=45000$ 의 경우는 모서리의 2차 보텍스가 거의 발달하지 못하는데, 이는 얇은 사각용기내의 시간의 증가에 따른 유동의 변화는 Re 의 변화보다 수심의 변화에 더 큰 영향을 받는다는 것을 의미한다.

4.2 x-z, y-z 평면상의 유동

Fig. 8는 $h=0.04$, $Re=20850$, $y=1/2$, Fig. 9는 $h=0.02$, $Re=45000$, $y=1/2$, 수직방향의 격자수가 12일 때의 수직단면(x-z 단면)의 일부분($x=0\sim 0.3$)에서 속도벡터를 시간의 변화에 따라서 나타낸 것이며 Fig. 10은 $h=0.04$, $Re=20850$, $x=1/2$, $h=0.04$, 수직방향

의 격자수가 52, Fig. 11은 $h=0.02$, $Re=45000$, $x=1/2$, 수직방향의 격자수가 32일 때, 속도벡터를 Fig. 8과 Fig. 9과 동일한 시간에 대해서 y-z 단면에서 나타낸 것이다. 결과에서 보듯이 축대칭의 유동형태를 보임을 알 수 있으며 수직방향의 격자수를 달리하였을 경우, 벽면근처의 속도변화에 대해서 격자수가 많은 경우가 보다 확실한 유동의 형태를 보여주고 있지만 수직방향의 격자수를 적게 하여도 시간의 변화에 따른 유동의 형태는 차이가 없음을 알 수 있다.

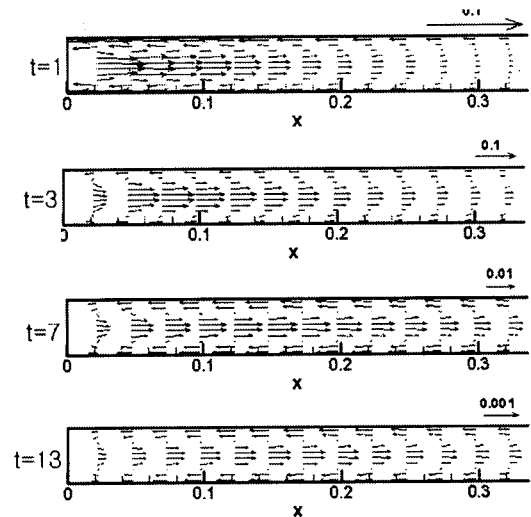


Fig. 8 x-z plane velocity vector plots at $y = 1/2$ for $h=0.04$, $Re=20850$

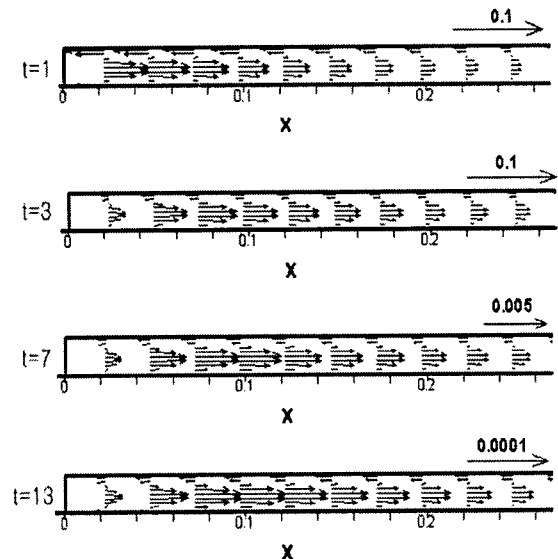


Fig. 9 x-z plane velocity vector plots at $y = 1/2$ for $h=0.02$, $Re=45000$

Fig. 8에서 Fig. 11의 결과를 통해 얇은 사각단면의 속도벡터는 z 에 대해 2차 함수의 포물형태보다는 4차 함수의 형태라는 것을 알 수 있다. 이는 점착조건에 의해 평판 위의 유체입자

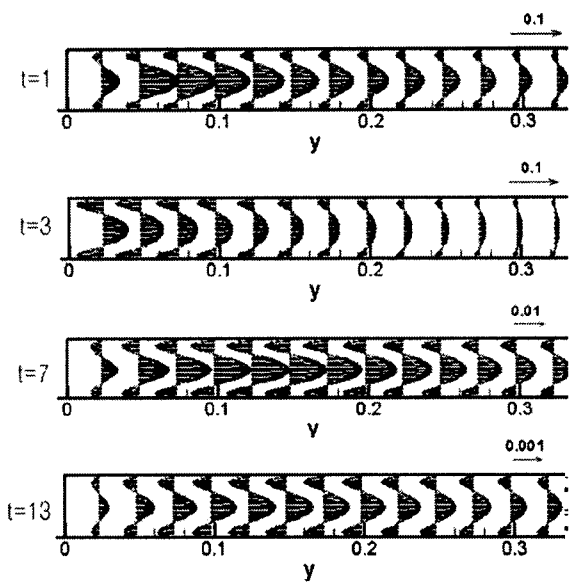


Fig. 10 y-z plane velocity vector plots at $y=1/2$ for $h=0.04$, $Re=20850$

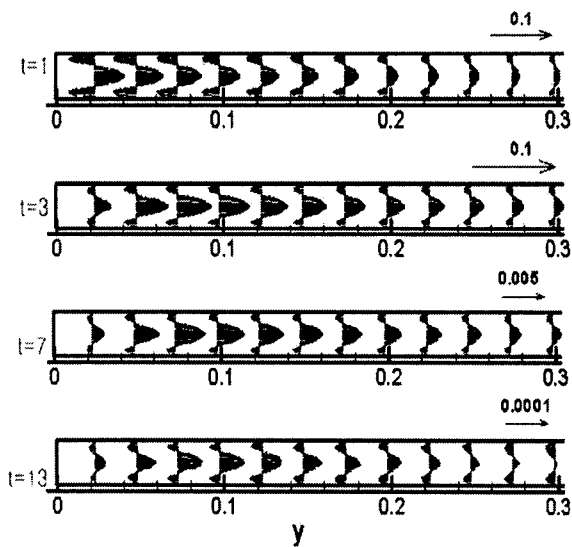


Fig. 11 y-z plane velocity vector plots at $y=1/2$ for $h=0.02$, $Re=45000$

는 평판과 같이 회전하게 되며 원심력에 의해서 회전 중심축에서 바깥 벽면 쪽으로 이동하고 그 주위의 입자가 그 자리로 이동하면서 전체적으로 순환유동의 양상을 보이기 때문이다. 더욱 중요한 사실을 이러한 유동형태가 시간이 지나도 지속된다는 것이다.

4.3 수평면에서의 유체 divergence($\nabla \cdot \vec{u}_h$)

Fig. 12 은 $h=0.04$, $Re=45000$ 의 $z=h/4$ 와 $3h/4$ 인 수평면

에서의 유체 divergence($\nabla \cdot \vec{u}_h$)를 나타낸 것이다. $z=h/2$ 인 수평중심단면에 대해서 서로 대칭의 위치인 $z=h/4$ 와 $z=3h/4$ 수평단면에서 $\nabla \cdot \vec{u}_h$ 가 동일함을 알 수 있다.

연속방정식을 만족해야하기 때문에 $\nabla \cdot \vec{u}_h < 0$ 인 영역에서는 미소 변위 dz 에 대해서 유체의 유입속도보다도 유출속도가 큰 pumping 현상이, $\nabla \cdot \vec{u}_h > 0$ 인 영역에서는 suction 현상이 발생한다. $z=h/2$ 을 중심으로 상하부 영역의 수직속도성분 w 의 방향이 반대이므로 주 보텍스 영역에서는 $z=h/2$ 인 중심단면에서 평판쪽으로 유체가 유출되는 현상이 발생하고 모서리에서 발행한 2차 보텍스 영역에서는 반대의 현상이 발생하며 시간에 지남에 따라서 그 강도가 줄어들음을 알 수 있다. 이 결과는 수직단면의 속도벡터결과와 일치한다. 이러한 중심단면과 평판사이의 활발한 물질교환은 전체적으로 유동을 감쇄시키는 damping 효과로서 작용한다.

얇은 정사각용기내의 유동을 포물형 Poiseuille 유동을 사용하여 해석한 quasi-3D-모델의 경우, 원심력에 의해 발생한 회전 유동이 만들어내는 $z=h/2$ 의 단면과 평판사이에서 발생하는 물질교환에 의한 damping 효과를 고려할 수 없기 때문에 보텍스의 성장과 발달, 지속시간이 길다. 따라서 얇은 평판사이의 유동을 해석하기 위한 새로운 모델에서는 수직단면의 유동이 4차 함수의 형태임을 고려해야 한다.

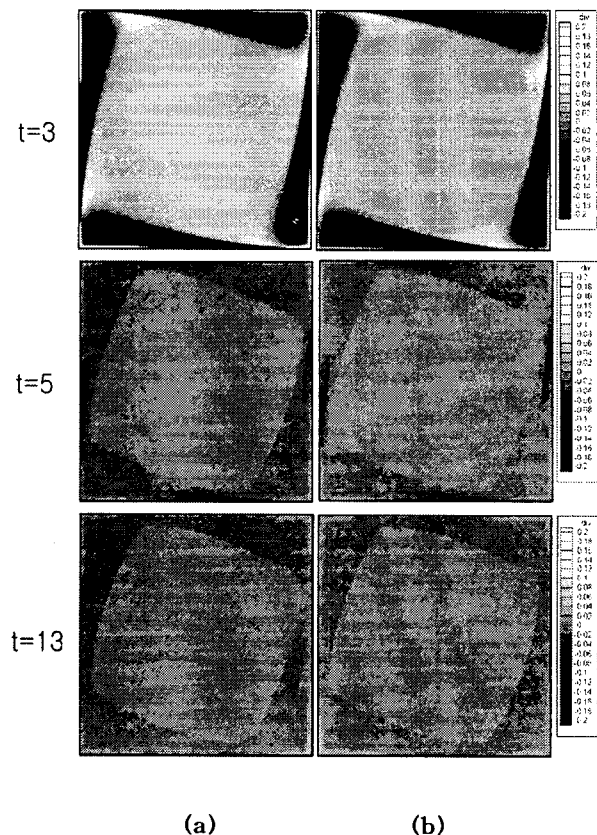


Fig. 12 Contours of x-y plane at (a) $y=1/4$ and (b) $y=3/4$ for $h=0.02$, $Re=45000$

4. 결 론

얇은 사각용기내의 스피업 유동에 대한 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 수직중횡비가 큰 매우 얇은 용기의 경우, 용기 내에 형성된 보텍스는 발달하지 못하고 시간이 지남에 따라 빠르게 감쇄된다.

(2) 수평 대응면과 용기의 벽면사이에는 pumping 현상과 suction 현상에 의한 damping 효과가 강하며 이것이 보텍스의 성장과 지속을 막는다.

(3) 수직중횡비가 큰 정사각형 용기내의 회전유동에 대한 효율적인 수치해석을 위해서는 수직단면의 유동이 4차 함수의 형태임을 고려해야 한다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(2000-1-30400-002-3) 지원으로 수행되었음.

참 고 문 헌

- (1) van Heijst, G.J.F. Davies, P.A. and Davis, R. G., (1990), "Spin-up in a Rectangular Container", *Phys. Fluids*, A2, pp.150~191.
- (2) van Heijst, G.J.F. Maas, L.R.M. and Williams, C.W.M., (1994), "The Spin-up of Fluid in a Rectangular Container with a Sloping Bottom", *J. Fluid Mech.*, 265, pp. 125~159.
- (3) 서용권, (1993), "직사각형 내부에서의 2차원 스피업", 대한기계학회논문집, 제17권 제7호, pp. 1805~1812.
- (4) Suh, Y.K., (1994), "Numerical Study on Two-Dimensional Spin-up in a Rectangle", *Phys. Fluids*, 6, pp. 2333~2344.
- (5) Henderson, D.M. Lopez, J.M. and Stewart, D.L., (1996), "Vortex Evolution in Non-axisymmetric Impulsive Spin-up from Rest", *J. Fluid Mech.*, 324, pp. 109~134.
- (6) 최윤환, 서용권, (1999), "수직격판이 있는 용기 내의 지균류", 한국해양공학회지, 제13권 제4호, pp.124~131.
- (7) 최윤환, 박준관, 서용권, (2001), "Ekman 분출모델에 의한 직사각형 용기 내의 스피업 유동 연구", 대한기계학회논문집, 제25권 제5호, pp. 680~687.
- (8) 임광욱, 권태종, (2001), "얇은 사각용기에서의 순간 회전 가속 유동에 관한 연구", 대한기계 학회 논문집 B권, 제25권 제3호, 339~346.