

1차원 표면유동의 정량화에 따른 직사각형 용기내의 정상유동 해석

변민수 · 서용권
 동아대학교 기계공학과

Analysis of Steady Flows in a Rectangular Container with a Characterization of the Free Surface by One-Dimensional Motion

MIN-SOO BYUN AND YONG-KWEON SUH

School of Mechanical Engineering, Dong-A University, Pusan 604-714, Korea

KEY WORDS: Reciprocation Motion 왕복운동, Rectangle 직사각형, Steady Flow 정상유동, Surfactant 계면활성제, Surface Tension 표면장력

ABSTRACT: Analysis of two-dimensional unsteady flows with a free surface in a rectangular container subject to a linear reciprocating force is performed by numerical and experimental methods. FVM is used for the numerical computation of the two-dimensional flows. We consider the surface tension as well as the viscous/elastic properties of the free surface. One-dimensional analysis as well as experiment is used in establishing the free surface properties. The steady recirculatory flow is visualized by a laser sheet. It is shown that the one-dimensional analysis provides useful informations associated with the free surface properties.

1. 서 론

혼합효과가 탁월한 유체유동은 일반적으로, 심한 전단변형을 동반한다. 이는 생체 배양시 전단력에 매우 취약한 미생물의 초기조직을 죽여버리는 결과를 초래하기 때문에, 교반의 입장에서 전단변형을 크게 일으키지 않으면서 혼합효과가 좋은 유동을 일으키는 것이 중요하게 된다.

한편, shaker table을 사용한 비커 내 배양에서는 유체의 1차 유동보다는 상대적으로 매우 약한 2차 유동이 혼합에 더 큰 영향을 미치게 된다. 특히, 2차 유동은 자유표면의 성질에 의해 많은 영향을 받게된다.

서용권과 박준관^[1], 서용권과 김현민^[2], 그리고, Suh^[3]는 원통 내 액체의 유동에 대한 연구로 자유표면의 상태가 2차유동 형성에 매우 중요한 역할을 할 것이라고 예측하였고, 김석우와 김경훈 등^[4]은 자유표면을 갖는 유체유동이 전체 유동장에 큰 영향을 미치는 물론, 자유표면에서의 표면점성계수가 2차유동에 영향을 주는 요소라는 사실을 실험을 통해 밝혀 낸 바 있다. 또한, 서용권과 백진수^[5]는 실제로 표면의 오염상태 및 오염물질에 의해 발생된 표면 점성계수를 임의로 가정함으로써 교반 및 혼합효과에 대해 연구한 바 있다.

본 연구는 직선왕복하는 직사각형 용기내 유체의 2차적 유동 특성을 실험적인 방법과 수치해석적 방법으로 조사하였으며, 유체의 오염상태(계면활성제 사용)에 따른 표면물성치는 별도의 실험과 수치해석을 통해 도출하여, 유체의 2차유동 특성을 알아보는 데 적용시켰다.

2. 이론적 배경

2.1 지배방정식

Fig. 1은 본 연구에서 적용한 모델로서 서용권과 백진수^[5]의 연구에서 사용한 모델과 동일하다. ω 는 크랭크의 회전 각속도, ε_0^* 는 크랭크 반경, x^* 는 수평방향좌표, y^* 는 수직방향좌표, L 은 용기의 길이, t^* 는 시간, h^* 는 자유표면의 높이를 나타낸다. 계속해서, u^* , v^* 는 각각 수평, 수직방향의 유속, p^* 는 압력, ρ 는 유체밀도, g^* 는 중력가속도이다. 여기서, 각속도, 용기의 길이, 유체의 밀도를 제외한 나머지 변수의 뒀 첨자 “*”는 무차원을 나타낸다.

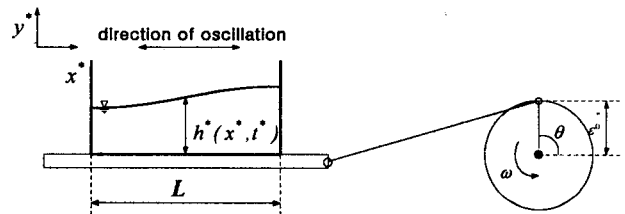


Fig. 1 Geometry of the flow model

특성 길이를 L , 특성 시간을 $1/\omega$, 특성 속도를 $L\omega$ 로 하여 지배방정식을 무차원화하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u + a \cos t \end{aligned} \tag{2a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v \tag{2b}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v \quad \text{at } y = h \quad (3)$$

여기서, 압력은 다음과 같이 두었다.

$$p^* = \rho(L\omega)^2 p + \rho g^* h^* - \rho g^* y^* \quad (4)$$

벽면과 바닥에서의 경계조건으로서 점착조건을 사용하였다. 자유표면에서의 압력 p_f 는 다음과 같다. 첨자 f 는 표면 바로 밑의 내부지점을 뜻한다.

$$p_f = \frac{2}{Re} \frac{\partial u_n}{\partial n} - We \frac{\partial^2 h / \partial x^2}{[1 + (\partial h / \partial x)^2]^{3/2}} \quad (5)$$

자유표면에서의 유속은 자유표면에서의 전단력 τ_s 와 내부 유체유동에 따른 전단응력 τ_f 를 같게 둬으로써 구할 수 있다.

$$\tau_f = \tau_s \quad (6)$$

τ_f 는 다음과 같이 정의된다.

$$\tau_f = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial s} \right) \quad (7)$$

Miles[6]에 의하면, 자유표면에서 surfactant의 존재로 인한 접선방향의 전단응력은 다음과 같다.

$$\vec{\tau}_s = \vec{\nabla}_s \sigma + \frac{k_s}{Re} \vec{\nabla}_s (\vec{\nabla}_s \cdot \vec{u}_s) + \frac{\mu_s}{Re} \nabla^2 \vec{u}_s \quad (8)$$

여기서, $\vec{\nabla}_s = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ 이며, σ 는 무차원 표면장력을 나타낸다.

k_s , μ_s 는 차례로 무차원 표면확장 점성계수, 무차원 표면전단 점성계수로서 각각 $k_s^*/\mu L$, $\mu_s^*/\mu L$ 으로 두었다. 이 식 (8)을 식 (7)과 함께 식 (6)에 적용하면 표면의 상태가 고려된 표면거동에 관련된 식이 된다.

수식 중 n 은 표면에 수직인 좌표를 나타내고, 아랫첨자 n 은 표면에 수직인 방향을 나타낸다. 동일한 맥락으로, s 는 표면을 따르는 좌표를 나타내고, 아랫첨자 s 는 표면을 따르는 방향을 나타낸다.

이상의 식에서 사용되는 무차원 변수는 다음과 같다.

$$g = \frac{g^*}{L\omega^2}, \quad a = \frac{\epsilon_0^*}{L}, \quad Re = \frac{L^2\omega}{\nu}, \quad We = \frac{\sigma^*}{\rho L^3\omega^2}$$

위 파라미터는 각각 무차원 중력가속도, 무차원 진폭, 레이놀즈수, 웨버수를 나타낸다.

2.2 1차원 표면유동

식 (8)에서 k_s 와 μ_s 는 상수이나, 그 값을 알 수 없으므로, Fig. 2와 같은 모델을 사용하여 구하도록 한다. 이 장치를 이용한 실험은 매우 짧은 시간에 수행되므로, 유체운동의 지배방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (9)$$

1차원 표면거동으로서의 경계조건으로 식 (8)은

$$-\mu \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)_{y^*=0} = \frac{\partial \sigma^*}{\partial x^*} + k^* \frac{\partial^2 u_s^*}{\partial x^{*2}} \quad (10)$$

가 된다. 여기서, k^* (이하 표면점성계수라 하겠다)는 $k_s^* + \mu_s^*$ 이고, u_s^* 는 유체표면의 유속이다.

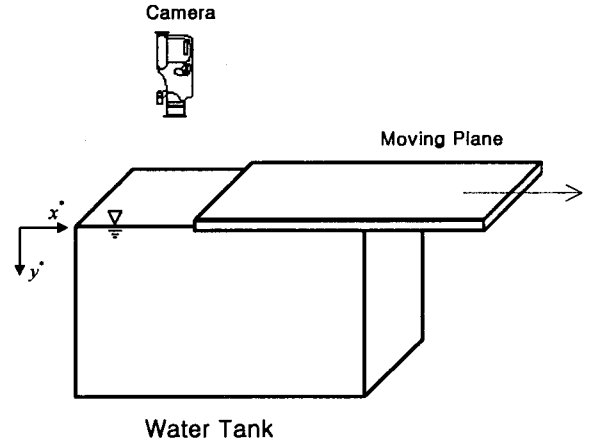


Fig. 2 Experiment apparatus for one-dimensional free surface flow

식 (10)의 우변 첫째항을 surfactant의 농도와 연관시키기 위하여 Frumkin 방정식[7]을 도입하면, 다음과 같다.

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial x^*} = -R^* T_K^* \Gamma_\infty^* \frac{1}{1-\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x^*} \quad (11)$$

R^* , T_K^* , Γ_∞^* 는 각각 가스상수, 온도, surfactant의 포화흡착 (saturated adsorption)을 나타낸다. γ 는 무차원 계면농도(또는 표면농도)로써, Γ^*/Γ_∞^* 이다. 여기서 Γ^* 는 계면농도이다. 마지막으로, 무차원계면농도 γ 의 dynamic condition은

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} (u_s^* \gamma) = 0 \quad (12)$$

이다.

3. 수치해석 및 실험

3.1 수치해석

1차원 자유표면 거동을 수치해석하기 위해 사용된 격자계는 균일 표준격자계이다. 단, 이동 평판이 맞물려 있는 수면의 경계에서는 시간에 따라 격자를 생성해 나아가는 방식을 적용하였다. 격자계를 구성함에 있어서 y^* 방향의 격자도 고려를 해주어야 한다. 그것은 표면거동이 일어날 때 표면 바로 아래에 아주 얇은 층의 내부 유동이 존재하고, 이 층의 유속정보가 표면 거동에 관한 경계조건에서 사용되기 때문이다.

공간에 대한 차분으로는 중심차분법을, 시간에 대한 차분으로는 양적인 Euler법을 사용하였으며, 계면농도의 dynamic condition은 풍상차분법으로 차분하였다.

2.1절의 수치해석을 위하여 staggered grid를 택하고 FVM을 사용하였다. 공간에 대해서는 2차정확도의 중심차분을 사용하여 차분하였으며, 압력은 의사압축성 방법(pseudo-compressibility method)을 이용하여 차분하였다. 시간에 대해서는 양적인 Euler법으로 차분하였으며, 자유표면의 전단력으로 인한 표면유속은 TDMA를 이용하여 차분식을 구성하였다. 좌우 측벽에 존재하는 유체와의 접촉면에서 적심(wetting)에 따른 미끄럼 속도(slip

velocity)는 자유표면의 수직운동 속도에 비례하며, 그 비례상수는 s_f 로 두었다. 시간에 따라 변하는 계면농도는 풍상차분법으로 차분하였다.

3.2 실험방법

실험에 사용되는 장치는 Fig. 3과 같다.

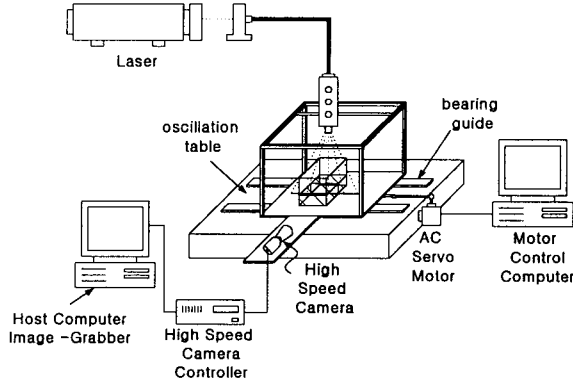


Fig. 3 Experimental apparatus for visualization of the steady current

실험에 사용된 용기는 길이×폭×높이=0.1×0.15×0.07[m]로서 폭을 길이보다 크게 함으로써 유동의 3차원 영향을 줄이도록 하였다. 모터의 회전수는 2400rpm이고, 실험에 사용된 무차원 높이 h_0 는 0.3, 0.5이다.

각 수심에 대하여 surfactant를 혼합하여 2차 유동을 확인하고자 하였다. 사용된 surfactant는 주위에서 흔히 구할 수 있는 주방용 식기세제(트리오)이며, 혼합농도는 0.02%, 0.05%로 두었다.

2차유동의 가시화에 사용된 염료는 물과 비중이 같은 Fluorecent이며, 레이저를 중앙 수직단면에 투사하여 염료의 형상을 촬영하였다.

4. 결과 및 검토

Fig. 4는 Fig. 2의 1차원 유동 모델에 대한 실험과 수치해석

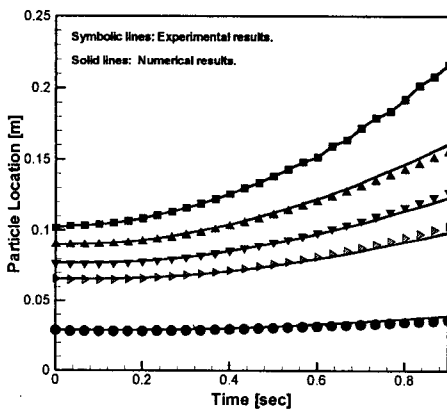


Fig. 4 Particle location for surfactant 0.02% at 151×201 grids

을 비교한 것이다. 표면점성계수의 크기는 시간에 따른 입자의

위치를 결정하는데 결정적인 영향을 미치는 것을 확인하였으며, 최소자승오차법으로 k^* 를 구하였다. box모양의 symbol선은 Fig. 2의 이동 평판의 위치를 나타내며, 수치해석 시에 경계 조건으로 쓰인다.

Fig. 5는 Fig. 4의 선도와 같이 실험과 수치해석의 차이가 최소화될때의 표면점성계수 k^* 를 x^* 방향 격자 크기에 관하여 도시한 것으로, 격자수가 증가함에 따라 값이 안정화되어 가는 것을 볼 수 있다.

Fig. 6은 무차원 수심이 0.5일 때, 수면의 평균높이가 시간의 경과에 따라 얼마나 변하는가를 도시한 것으로, 오차는 0.2%이하임을 알 수 있다.

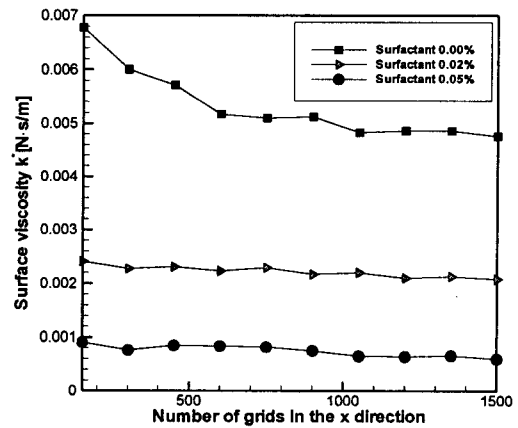


Fig. 5 Dependence of k^* on the number of grids in one-dimensional simulation

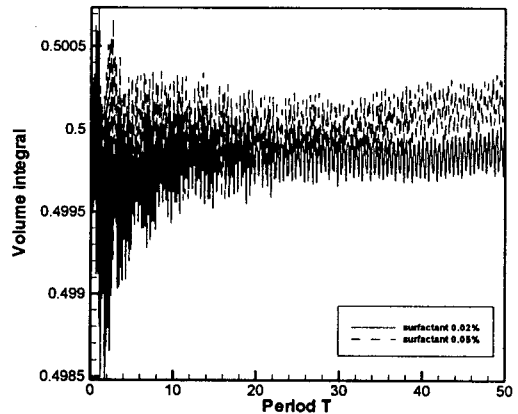


Fig. 6 History for volume integral of the liquid height at $h_0=0.5$, $\alpha=0.3$, $s_f=1.0$, Period=1.25[sec]

Fig. 7은 Fig. 6과 동일한 수심에서의 결과로, 각 지점의 수면 높이에 대한 면적모멘트

$$M = \int_{x_0}^1 \left(x_p - \frac{1}{2}\right) h dx \quad (13)$$

를 도시화한 것이다. 30주기이상부터 진폭의 차이가 거의 없음을 확인할 수 있으며, 이것은 내부유동이 30주기부근부터 주기적인 상태에 도달한다는 것을 말해준다. 여기서 M 은 모멘트, x_p 는 격자셀 중심의 x 방향좌표를 나타낸다. x_0 는 $x_0 \rightarrow 0$ 이다.

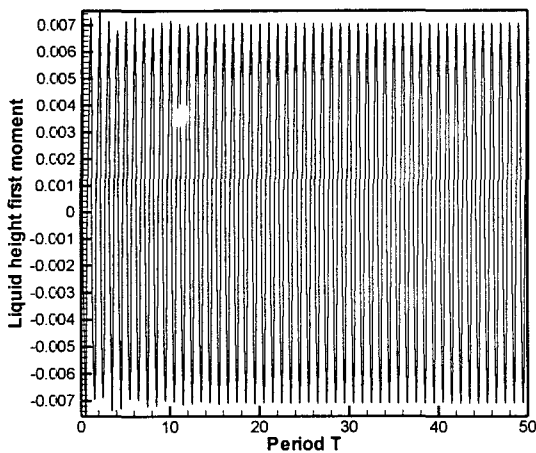


Fig. 7 History of the first moment of the liquid height at $h_0=0.5$, $a=0.3$, $s_f=1.0$, Period=1.25[sec]

Fig. 8은 무차원 수심 $h_0=0.3$ 일때의 정상유동으로서, 수직 중앙 단면에서의 유동형태를 실험 결과와 수치해석 결과로 나타낸 것이다. 그림에서 보여 주는 바와 같이, 중앙 지점을 기준으로 좌우 양방향의 큰 회전 유체덩치가 전체 유동장을 지배

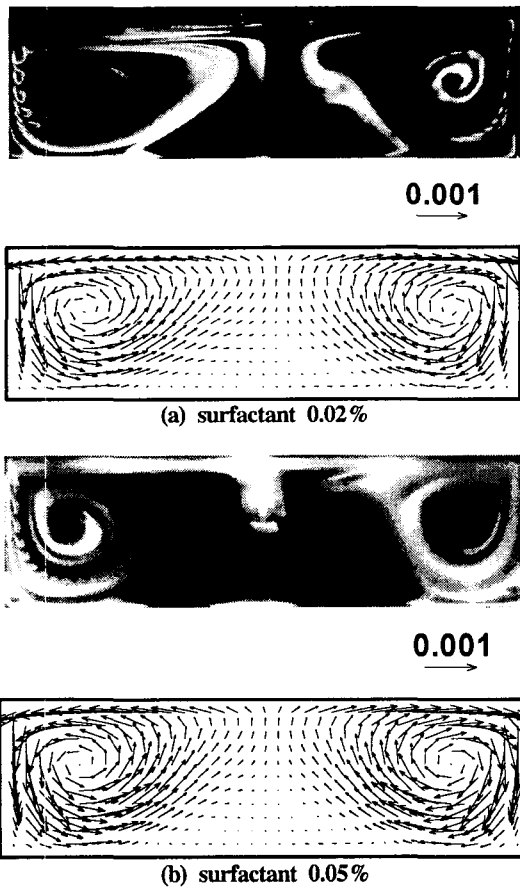


Fig. 8 Visualization of the steady current through a laser sheet on the vertical central plane(top) and numerical results(bottom) for $h_0=0.3$, $a=0.3$, $s_f=1.0$, Period=1.25[sec]

하고 있다. 실험시 회전유동의 유동방향은 수치해석의 유동 방향과 일치하였다. 수치해석상에서 단면 중앙 지역은 좌우 회전 유동의 크기에 비해 약한 유동을 가짐을 볼 수 있으며, 실험과 정에서도 그러한 특성을 확인할 수 있었다.

Fig. 9의 결과는 무차원 수심이 0.5일때의 정상유동상태이다. 가시화 및 수치해석에서 발견되는 것은 단지 좌우 대칭의 주 보텍스이며, 이 형태가 관찰되는 시점에서 시간을 수 분 더 경과시켜도 큰 변화는 일으키지 않았다.

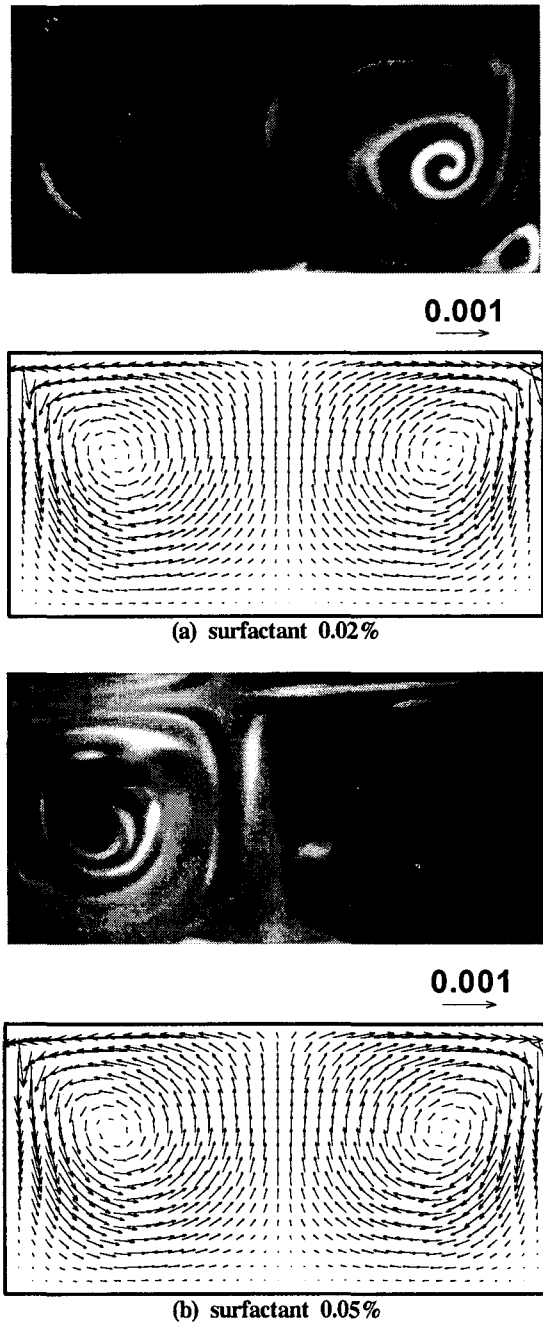
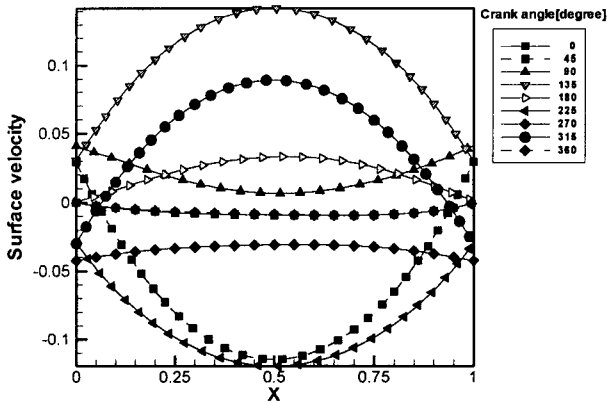
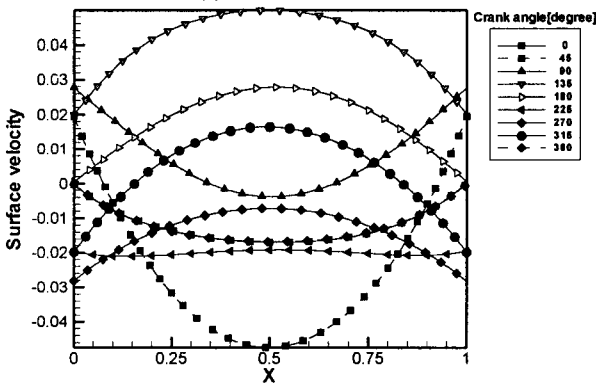


Fig. 9 Visualization of the steady current through a laser sheet on the vertical central plane(top) and numerical results(bottom) for $h_0=0.5$, $a=0.3$, $s_f=1.0$, Period=1.25[sec]

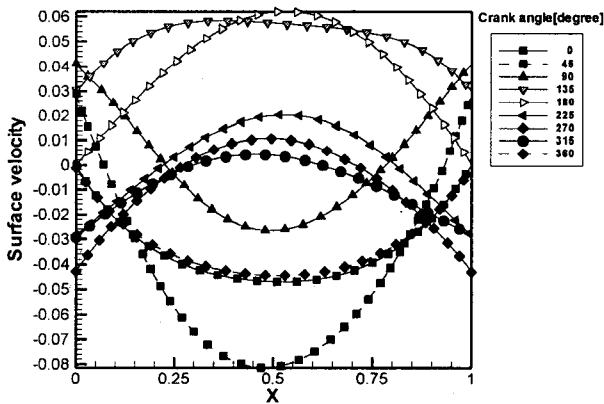
Fig. 10은 수치해석 상의 마지막주기(50주기)에서 계산된 표면유속이다. 0.0%~0.05%까지 surfactant 농도를 변화시킴에 따라 한 주기동안 자유표면의 진동 횟수가 달라짐을 알 수 있으며, 실험을 통해 검증한 결과 수치해석과 같았다는 것을 확인하였다. 실험결과 surfactant 0.01%를 기준으로, 이 이하의 농도에서는 한 주기동안 2번의 진동이 있었고, 이 이상의 농도에서는 한 주기동안 1번을 진동하였다. 이런 현상에 대한 부분은 아직 밝혀진 바가 없으므로, 좀 더 연구가 필요하다고 판단된다. 내부의 주유동과 비교하면 표면유동은 약 90° 정도의 위상차이로 앞서가고 있다.



(a) surfactant 0.00%



(b) surfactant 0.02%



(c) surfactant 0.05%

Fig.10 History of the surface velocity distribution during the last period(50 period) at $h_0=0.5$, $a=0.3$, $s_f=1.0$, Period=1.25[sec]

4. 결 론

본 연구에서는 직선왕복운동하는 직사각형 용기내의 자유표면을 가진 유체유동을 수치해석적, 실험적 방법으로 조사하였다. 그리고, 직사각형 용기내의 표면거동은 별도의 수치해석과 실험을 통해 계면상태에 따른 표면점접계수 k^* 를 산출해 내어 이를 적용시켰다. 그 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 수치해석으로부터 정상유동을 구한 결과와 실험을 통한 가시화 결과는 정성적으로 일치한다.

(2) 수치해석으로부터 수심의 변화에 따른 정상 유동을 관찰한 결과, 지배적인 좌우대칭의 순환 유동은 수심에 크게 영향을 받지 않음을 알 수 있었다.

(3) 내부유동이 주기적으로 된 후의 표면 속도를 검출한 결과, 유체가 한 주기동안 운동할 때 표면 거동은 surfactant의 농도에 따라 왕복주기가 달라짐을 확인하였다.

(4) surfactant를 혼합한 물은 surfactant의 농도가 0.0%인 물에 비해 2차유동이 확연하게 드러나게 하는 역할을 해주었다.

참 고 문 헌

- [1] 서용권, 박준관(1996) "회전요동하는 원통내의 유동특성-수치해석 및 실험", *대한기계학 회논문집(B)*, 20권 12호, pp3970-3979
- [2] 서용권, 김현민(1996) "회전요동하는 원통내의 유동특성-이론적해석", *대한기계학회논문집(B)*, 20권 12호, pp3960-3969
- [3] Y. K. Suh(2000) "Analysis of linear viscous flow with a free surface in a circular cylinder subjected to small-amplitude circular oscillation", *Theoret. Comput. Fluid Dynamics* 14, pp109-134
- [4] 김석우, 김경훈, 이승환(2000) "자유표면과 수직와류의 반응에 대한 유동해석", *한국유체공학학술대회 논문집*, pp851-854
- [5] 서용권, 백진수(2000) "자유표면의 거동을 동반하는 직사각형 용기내의 정상유동", *한국유체공학학술대회 논문집*, pp863-866
- [6] J. W. Miles(1996) "Surface-wave damping in closed basins", *Proc. R. Soc. Lond*, A297, pp459-475
- [7] Veniamin G. Levich(1962), "Physicochemical Hydrodynamics", *Prentice-Hall, Inc*, pp402-416