

균열이 있는 구조물의 형상 최적화 (Shape Optimization of Structures with a Crack)

한석영(한양대학교 기계공학부), 송시엽(한양대학원 항공공학과), 백춘호(한양대학원
자동차공학과)

Seog Young Han(Hanyang University), See Yeob Song(Graduate School), Choon Ho
Baek(Graduate School)

Abstract

Most of mechanical failures are caused by repeated loadings and therefore they are strongly related to fatigue. To avoid the failures caused by fatigue, determination of an optimal shape of a structure is one of the very important factors in the initial design stage. Shape optimization for a compact tension specimen in opening mode in fracture mechanics, was accomplished by the linear elastic fracture mechanics and the growth-strain method in this study. Also shape optimization for a cantilever beam in mixed mode was carried out by the same techniques. The linear elastic fracture mechanics was used to estimate stress intensity factors and fatigue lives. And the growth-strain method was used to optimize the shape of the initial shape of the specimens. From the results of the shape optimization, it was found that shapes of two types of specimens and a cantilever beam optimized by the growth-strain method prolong their fatigue lives very much. Therefore, it was verified that the growth-strain method is an appropriate technique for shape optimization of a structure having a crack.

Key Words : Shape Optimization, Growth-Strain Method, Fatigue Life, Opening Mode, Mixed Mode

1. 서론

기계 및 구조물에서 발생하는 파손의 대부분은 반복하중으로 인한 피로에 의한 것들이며, 현재 사용하고 있는 여러 분야의 기기나 부품들 거의 모두가 반복하중을 받고 있다. 따라서 기계 및 구조물의 안전성과 신뢰성을 확보하기 위해서는

설계단계에서부터 피로를 고려한 설계를 하는 것이 필수적이다.

그러나, 피로수명을 향상시키기 위한 형상 최적화에 관한 연구는 수학적 프로그래밍법으로 외팔보의 형상 최적화를 수행한 Gani⁽¹⁾의 연구 이외에는 거의 보고되지 않고 있다.

따라서 본 연구에서는 콤팩트(compact) 인장 시편에 대해 최적기준법인 성장-변형률법⁽²⁾⁻⁽³⁾을 이용하여 형상 최적화 한 후, Paris law를 이용하여 초기 형상의 시편과 형상 최적화 후의 시편에 대해 피로수명을 계산함으로써 형상 최적화의 타당성을 확인하였다. 그리고 혼합 모드에 있는 외팔보에 대해 같은 방법으로 형상 최적화 한 후 Gani의 연구결과와 비교하였다.

2. 응력확대계수 및 피로수명의 계산

2.1 수치해석을 이용한 응력확대계수의 계산

균열이 존재하는 구조물에 대하여 수치해석적으로 응력확대계수를 계산하기 위해서는 \sqrt{r}^{-1} 항을 고려하여 개발된 특이요소(singular element)를 이용하여 계산하여야 한다. 본 논문에서는 모든 특이요소와 변환요소(transition element)⁽⁴⁾의 크기를 초기 균열길이의 0.1의 크기⁽⁵⁾로 사용하였다.

수치해석을 이용한 응력확대계수를 계산하는 방법에는 크게 J 적분법과 균열 선단 주변 4분의 1 지점의 절점들의 변위를 이용하여 계산하는 QPDT(Quarter Point Displacement Technique), DCT(Displacement Correlation Technique), DET(Displacement Extrapolation Technique) 등

이 있으며 본 연구에서는 QPDT법을 이용하였다. 열립 모드와 전단 모드에 대한 응력확대계수 K_I 과 K_{II} 는 다음 식으로부터 구해진다.

$$K_I = \sqrt{2\pi} \frac{G}{1+k} \frac{|v'_2 - v'_4|}{\sqrt{r}} \quad (1)$$

$$K_{II} = \sqrt{2\pi} \frac{G}{1+k} \frac{|u'_2 - u'_4|}{\sqrt{r}} \quad (2)$$

$k = 3 - 4\nu$ 평면변형률의 경우

$k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ 평면응력의 경우

여기서, G 는 전단계수, v'_i 는 i 절점에서의 국부좌표 v' 방향의 변위량, u'_i 는 i 절점에서의 국부좌표 u' 방향의 변위량, r 은 균열선단으로부터 i 절점까지의 거리, 그리고 ν 는 포와송비이다.

2.2 실험식을 이용한 응력확대계수의 계산

본 논문에서는 수치해석적으로 구해진 응력확대계수의 계산값에 대한 정확도를 확인하기 위해 Tada⁽⁶⁾의 핸드북에 수록된 실험식을 이용하여 구해진 응력확대계수의 계산값과 비교하였다.

2.3 피로수명 계산

구조물의 피로수명은 다음과 같은 두 부분의 값을 더함으로써 구할 수 있다.

$$N = N_0 + \sum_{i=1}^n \Delta N_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5)$$

여기서, N_0 는 초기 균열이 발생하기까지의 피로수명, $\sum_{i=1}^n \Delta N_i$ 는 초기 균열길이(a_i)에서 임계균열길이(a_f)에 이르기까지의, 또는 균열 선단에서의 응력확대계수 K_I 이 K_{IC} 에 도달하기까지의, 또는 최대 von Mises 응력값이 항복응력에 도달하기까지의 피로수명 값이다.

혼합 모드에 대한 균열 성장에 따른 ΔN_i 를 구하기 위하여 다음과 같이 변형된 Paris law를 사용하였다.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eff})^m \quad (6)$$

$$\Delta K_{eff} = \frac{1}{2} \{ \Delta K_I + \sqrt{(\Delta K_I^2 + \Delta K_{II}^2)} \} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \Delta K_I = K_{I_{max}} - K_{I_{min}} \\ \Delta K_{II} = K_{II_{max}} - K_{II_{min}} \end{cases}$$

여기서, C 와 m 은 실험적으로 얻어지는 재료 상수, a 는 균열의 길이 그리고 N 은 피로수명이다.

피로수명은 위의 식 (6)을 적분하여 구해진다.

$$N = \int_{a_i}^{a_f} \frac{1}{C(\Delta K_{eff})^m} da \quad (8)$$

식 (8)을 수치해석적으로 구하기 위해 다음과 같은 가정을 도입⁽¹⁾하였다.

① 균열 증가량 da 는 구조물의 크기에 비해 매우 작다.

② 응력확대계수는 선형함수인 $K = K(a)$ 로 근사화 할 수 있다.

위의 가정을 이용하면 $K = K(a) = pa + b$ 로 표현할 수 있으며, 균열 증가량 da 에 대한 피로수명은 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\Delta N = \frac{1}{C} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (pa + b)^{-m} da \quad (9)$$

$$\Delta N = \frac{1}{C(1-m)p} [(pa + b)^{1-m}]_{a_i}^{a_{i+1}} \quad (10)$$

$$\Delta N = \frac{1}{C(1-m)p} (\Delta K_{i+1}^{1-m} - \Delta K_i^{1-m}) \quad (11)$$

여기서, ΔK_i 는 균열 진전 시작부분에서의 ΔK_{eff} 값이고, ΔK_{i+1} 는 균열 진전 끝부분에서의 ΔK_{eff} 값이다. 그리고 p 는 다음과 같이 정의되는 기울기이다.

$$p = \frac{\Delta K_{i+1} - \Delta K_i}{a_{i+1} - a_i} = \frac{\Delta K_{i+1} - \Delta K_i}{\Delta a_i} \quad (12)$$

위 식들을 이용하여 결과적으로 식 (8)을 계산할 수 있다.

3. 성장-변형률법

피로수명을 향상시키기 위해서는 식 (8)의 응력확대계수범위 ΔK_{eff} 의 값을 최소화시켜야만 하며, 응력확대계수는 식 (1)과 (2)와 같이 균열선단 주변 절점들의 변위를 이용하여 계산된다. 따라서 균열 선단을 둘러싼 요소들에 집중된 von Mises 응력값을 최소화 함으로써 균열 선단 상의 절점들의 변위를 최소화 할 수 있다. 이를 위해 매개변수(예를 들면 von Mises 응력)를 균질

화하는 성장-변형률법을 이용한다.

성장-변형률법은 매개변수를 균일하게 분포시키는 과정에서 발생하는 체적변형으로 형상을 최적화 시킨다. 이 최적화 과정은 2단계의 반복과정으로 구성되어 있다. 첫 단계는 역학적인 조건 하에서 매개변수를 계산하기 위한 응력해석 단계이며, 두 번째 단계는 응력해석을 바탕으로 계산된 결과에 의해 구조물의 형상을 최적 형상으로 변화시켜 가는 성장해석(체적변형) 단계이다. 매개변수가 균일화된 형상을 만들기 위해서는 체적변형의 성장법칙인 식 (13)에 따라 체적변형을 발생시킨다. 모든 요소에서 축소 체적변형은 σ 와 $\bar{\sigma}$ 의 편차에 비례해서 σ 가 $\bar{\sigma}$ 보다 작은 곳에서 발생하고, 팽창 체적변형은 σ 가 $\bar{\sigma}$ 보다 클 때 발생한다.

$$\epsilon_{ij}^B = \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \delta_{ij} h \quad (13)$$

식 (13)에서 ϵ_{ij}^B 는 체적변형, $\bar{\sigma}$ 는 매개변수의 기준값(예를 들면, 평균응력), δ_{ij} 는 크로네커 델타(Kronecker delta) 그리고 h 는 성장변형의 크기를 조절하는 성장률이다.

성장법칙(growth law)의 형태는 체적을 구속한 채 응력을 축소하는 방법(체적 제어)을 적용한다. 따라서 체적을 목표값으로 제어하기 위해 식 (13)을 개선하여 체적을 제어할 수 있는 개선된 성장법칙 식 (14)를 유도하였다. 각 반복에서 성장변형에 의한 체적의 변화량은 외란(disturbance)과 같이 간주되어질 수 있고 이 문제는 자동 제어 이론에서 외란에 대한 자동조절(automatic regulation)에 대응할 수 있다. 그러므로 체적 제어는 PID 제어의 개념을 이용해 효율적으로 수행될 수 있으며, 식 (15)에서와 같이 평균응력은 기본값으로 사용된다.

$$\epsilon_{ij}^{B(n)} = \frac{\sigma^{(n-1)} - \bar{\sigma}^{(n-1)}}{\bar{\sigma}^{(n-1)}} \delta_{ij} h - \left\{ K_p \frac{V^{(n-1)} - V_{obj}}{V_{obj}} + K_I \sum_{k=1}^{n-1} \frac{V^{(k)} - V_{obj}}{V_{obj}} + K_D \frac{V^{(n-1)} - V^{(n-2)}}{V_{obj}} \right\} \quad (14)$$

$$\bar{\sigma}^{(n)} = \sum_e \frac{\sigma_e v_e}{V^{(n)}} \quad (15)$$

여기서, (n) 은 반복횟수, K_p , K_I , K_D 는 비례상수, σ_e 는 각 요소의 대표응력, v_e 는 각 요소의 체적, V_{obj} 는 목표하는 총 체적, $V^{(n)}$ 은 n 번째 반복횟수에서의 총 체적, σ_{obj} 는 목표하는 응력 값 그리고 $\sigma_{max}^{(n)}$ 은 n 번째 반복횟수에서의 최대 응력이다.

따라서, 위에 기술한 피로수명 향상을 위한 최적화 과정을 도식적으로 표현하면 Fig. 1과 같다. Fig. 1의 수렴조건으로는 균열길이가 임계균열길이(a_f)에 도달하였는가, 균열 선단에서의 응력확대계수 K_I 이 K_{IC} 에 도달하였는가, 또는 최대 von Mises 응력값이 항복응력에 도달하였는가를 사용하였으며, 가장 먼저 만족하는 수렴조건에 의해 최적화 과정을 마치게 된다.

4. 형상 최적화의 예

4.1 컴팩트 인장 시편

컴팩트 인장 시편의 재료는 AL7075-T6를 사용하였고, 시편에 양쪽에 최대 하중 4.88 kN에서 최소 하중 4.87 kN까지의 하중폭을 갖는 반복하중(P)을 주었으며, 형상 최적화에 필요한 자료들을 Table 1에 나타내었다.

컴팩트 인장 시편에 대하여 체적의 목표값을 초기 체적의 100%로 설정하고, 성장률 h 값을

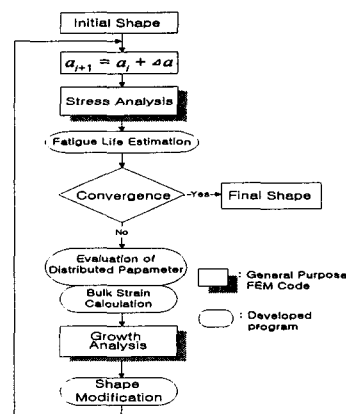


Fig. 1 A schematic diagram of shape optimization process

0.05로, K_P , K_I , K_D 값을 각각 15, 2, 0으로 설정하여 체적 제어를 통한 형상 최적화를 수행하였다. 초기 형상과 경계조건을 Fig. 2에, 최적화된 형상을 Fig. 3에 나타내었다.

체적 제어를 수행하여 매 반복 시의 초기 체적에 대한 체적비와 초기 최대 von Mises 응력에 대한 응력비, 초기 형상의 응력확대계수에 대한 응력확대계수비의 변화를 Fig. 4에 나타내었다.

최적화된 형상의 체적은 설정한 대로 초기 체적값으로 수렴하였으며, 최대 von Mises 응력값은 초기 최대 von Mises 응력값의 82.8%로, 응력확대계수의 값은 초기 응력확대계수 값의 73.6%로 감소하였다.

이 시편에 대한 피로수명은 $N_0 = 0$, $C = 2.71 \times 10^{-8} \frac{mm/cycle}{(MPa\sqrt{m})^m}$, $m = 3.70$ 로 계산하였을 때, 초기 형상에 대한 피로수명은 66회였으나 최적화된 형상에 대한 피로수명은 245회로 크게 증가하였다. 초기 형상에 대해 수치해석적으로 구해진 응력확대계수는 최대 오차 4% 이내에서 계산되었다.

4.2 외팔보

외팔보의 형상 최적화를 위한 자료는 Gani⁽⁶⁾의 자료들을 사용하였으며, 외팔보의 고정단은 벽에 고정시키고, 자유단에는 최대 전단응력 5.171 MPa에서 최소 전단응력 0 MPa까지의 반복 전단응력(τ)을 주었다. 형상 최적화를 위해 사용한 자료들을 Table 2에 나타내었다.

외팔보에 대하여 체적의 목표값을 초기 체적의 100%로 설정하고, 성장률 h 값을 0.1로, K_P , K_I , K_D 값을 각각 6, 20, 0으로 설정하여 체적 제어를 통하여 형상 최적화를 수행하였다. 외팔보의 초기 형상을 Fig. 5에, 최적화된 형상을 Fig. 6에 나타내었다.

체적 제어를 수행하여 매 반복 시의 초기 체적에 대한 체적비와 초기 최대 von Mises 응력에 대한 응력비, 초기 형상의 응력확대계수에 대한 응력확대계수비의 변화를 Fig. 7에 나타내었다. 또한, 매 반복 시의 열립 모드에 대한 응력확대계수 K_I 과 전단 모드 K_{II} 에 대한 응력확대계수의 변화를 Fig. 8에 나타내었다.

Table 1 Data for compact tension specimen

Item		Value
E	Modulus of Elasticity	71 GPa
P_{max}	maximum force	4880 N
P_{min}	minimum force	4870 N
ν	Poisson ratio	0.33
t	Thickness	25 mm
K_{Ic}	Material toughness	29 MPa \sqrt{m}
σ_Y	Yielding stress	523 MPa
a	Initial crack length	10 mm

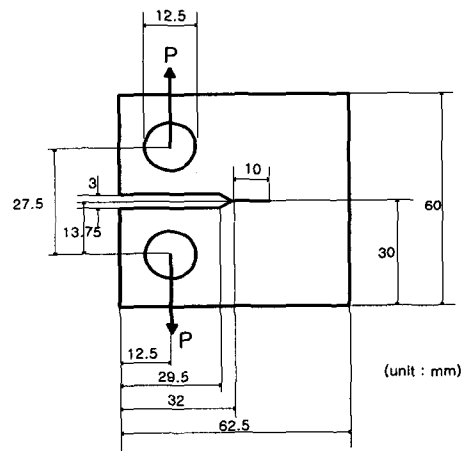


Fig. 2 Initial Shape of a compact tension specimen

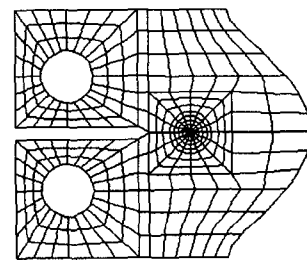


Fig. 3 Optimized shape of a compact tension specimen

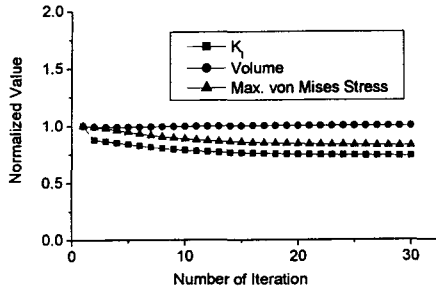


Fig. 4 History of iteration for the change of volume, von Mises stress, and K_I of a compact tension specimen

최적화 된 형상의 체적은 설정한 대로 초기 체적값으로 수렴하였으며, 최대 von Mises 응력값은 초기 최대 von Mises 응력값의 66.7%로 감소하였다. 또 열림 모드의 응력확대계수 K_I 값은 초기 응력확대계수 K_I 값의 67.1%로 감소하였으며, 반대로 전단 모드의 응력확대계수 K_{II} 값은 초기 응력확대계수 K_{II} 값의 0.03%로 증가하였다.

성장-변형률법과 Gani⁽⁸⁾에 의해 최적화 된 형상을 비교해 보면, Gani는 네 개의 점을 이용한 Bezier 커브로 형상을 구성하였으며 상하대칭을 시킨 뒤 균열을 만들어 최적 형상을 구하였다.

혼합 모드 하에서 균열 진전을 시킬 때 피로균열의 진전방향은 최대 주응력 이론을 사용하였으며, 피로수명의 계산은 $N_0 = 0$ 으로 두고, $C = 2.8 \times 10^{-22} \frac{mm/cycle}{(MPa\sqrt{m})^m}$, $m = 4.9$ 로 계산하였을 때, 초기 형상에 대한 피로수명은 18회였으나 최적화 된 형상에 대한 피로수명은 148회로 크게 증가하였다.

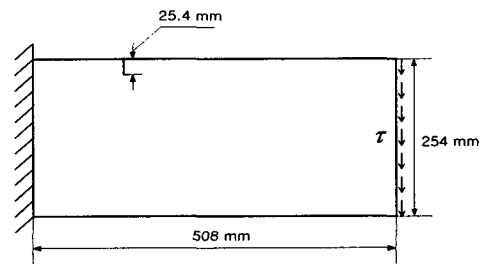


Fig. 5 Initial Shape of a cantilever beam

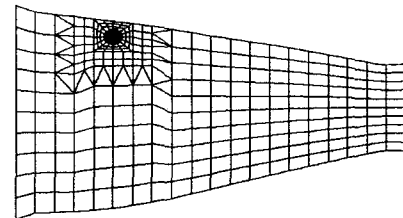


Fig. 6 Optimized shape of a cantilever beam

Table 2 Data for a cantilever beam

Item		Value
E	Modulus of Elasticity	72 GPa
τ_{max}	maximum shear load	5.171 MPa
τ_{min}	minimum shear load	0 MPa
ν	Poisson ratio	0.33
t	Thickness	0.914 mm
K_{Ic}	Material toughness	154 $MPa\sqrt{m}$
σ_Y	Yielding stress	690 MPa
a	Initial crack length	25.4 mm

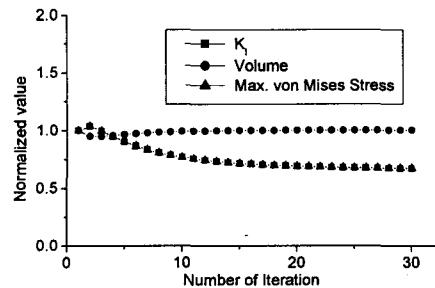


Fig. 7 History of iteration for volume, von Mises stress, and K_I of a cantilever beam

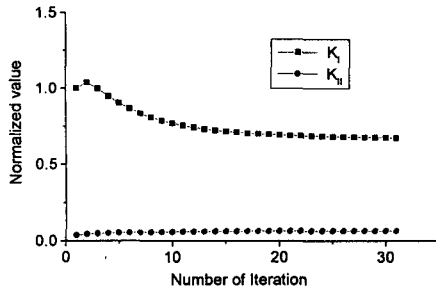


Fig. 8 History of iteration for K_I and K_{II} of a cantilever beam

반면, 성장-변형률법에 의해 최적화 된 형상은 초기 균열이 존재하는 상황에서 성장법칙에 의해 최적 형상을 구하였다. 두 가지의 최적 형상은 서로 매우 유사하나 성장-변형률법을 이용한 최적 형상은 Gani의 최적 형상과 같이 실제로 상하 대칭을 이루고 있지 않다.

피로수명을 비교해 보면, Gani의 형상은 피로수명이 14회에서 430회로 증가하였으나, 성장-변형률법의 형상은 피로수명이 18회에서 148회까지 증가하였다. 이는 최적화 된 형상의 차이에 의해 피로수명이 크게 차이나는 것으로 판단된다.

또한, Gani의 모델은 균열진전 반복과정 중 값이 변화하는 특이요소 6개를 덧붙여 만든 방사꼴 요소(Rosette element)의 크기를 초기 균열 길이의 0.5에 해당하는 크기로 만들어 응력확대계수의 값을 구하였다. 반면, 본 연구에서는 응력확대계수 계산시 오차를 적게 하기 위하여 특이요소의 크기를 초기 균열 길이의 0.1에 해당하는 크기로 만들어 계산하였다. 일반적으로 특이요소와 변환요소의 크기가 응력확대계수를 계산하는데 있어 오차를 발생하는 원인이 되는데 이러한 차이가 피로수명에 큰 차이를 나타낸 것으로 판단된다.

4. 결론

본 연구에서는 성장-변형률법을 이용하여 피로수명을 향상시키기 위한 형상 최적화를 수행함으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

- ① 성장-변형률법과 선형 탄성파괴역학을 적용하여 균열이 있는 구조물의 피로수명을 크게 향상시킬 수 있었다.
- ② 형상 최적화 된 compact tension 시편의 피로수명을 계산해 본 결과 초기 형상에 대한 피로수명이 271%로 크게 증가하였다.
- ③ 형상 최적화 된 외팔보의 피로수명을 계산한 결과 초기 형상에 대한 피로수명이 722.2%로 크게 증가하였다.
- ④ 혼합모드의 응력확대계수 값은 균열진전 초기에는 전단 모드의 응력확대계수 값의 영향을 받았으나, 균열이 진전됨에 따라 그 영향도가 감소되어 열림 모드에 가까운 응력확대계수의 값을 나타내었다.
- ⑤ 성장-변형률법이 균열이 있는 구조물의 형상 최적화에 타당함을 확인하였다.

참고문헌

- (1) Gani L. and Rajan S. D., 1999, Use of Fracture Mechanics and Shape Optimization for Component Designs, AIAA Journal, Vol. 37, No. 2, pp. 255-260
- (2) 한석영, 배현우, 1999, 일반적인 2차원 구조물의 형상 최적화, 대한기계학회논문집(A), 제23권, 9호, pp. 1622-1627
- (3) Shimoda, M., Sajura, T., Kondo, Y. and Azegami, H., 1993, Shape Optimization of Solid Structures Using the Growth Strain Method (Application to Chassis Components), SAE 1992 Transactions, Vol. 101, Section 6, pp. 1136-1145
- (4) Barry, D., Fehl Kevin Z. Truman, 1999, An evaluation of fracture mechanics quarter-point displacement techniques used for computing stress intensity factors, Engineering Structures 21, pp406-415
- (5) Anderson T. L., 1995, Fracture Mechanics (Fundamentals and Applications), 2nd ed., CRC Press
- (6) Tada H., Paris P. C. and Irwin G. R., 1973, The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corporation.