

무요소법에서 절점 적분의 효과적 개선방안

Improvement Scheme of Nodal Integration in Meshless Method

송 태 한* 임 장 근**
Song, Tae-Han Lim, Jang-keun

ABSTRACT

Meshfree methods have been attracting issue as computational methods during past a few years. Nowadays, various meshfree methods such as EFGM, RKPM, h-p cloud method and etc. were developed and applied in engineering problems. But, most of them were not truly meshless method because background mesh of cell was required for the spatial integration of a weak form. A nodal integration is required for truly meshless methods but it is known that this method gives a little unstable and incorrect solutions. In this paper, an improvement scheme of the existed nodal integration which the weak form can be simply integrated without any stabilization term is proposed. Numerical tests show that the proposed method is more convenient and gives more correct solutions than the previous method.

1. 서론

무요소법은 유한 요소법의 적용과정에서 발생하는 요소구성에 대한 근본적인 문제를 해결하기 위해 제안된 것으로 절점들만으로 해석을 수행한다. 무요소법에서는 함수근사를 위한 형상함수를 공간상에 배치한 절점들만으로 구성하기 때문에 이를 구하는 수식화 과정에 따라서 서로 다른 이름의 무요소법들이 개발되었다.⁽¹⁻⁵⁾

최근, 이러한 무요소법은 여러 가지 역학 문제들에 응용되면서 전산역학적 방법으로서의 자리 매김을 시도하고 있으나 아직 해결해야 할 몇가지 문제점들이 남아 있다. 행렬 방정식의 구성을 위한 수치적분도 그러한 문제점들 중의 하나이다. 유한 요소법에서는 수치 적분을 요소의 영역에 따라 차례로 수행하면 되지만 무요소법에서는 요소가 없기 때문에 적분을 위한 정확한 영역을 설정하여야 한다. 이와 같은 적분영역을 지정하기 위하여 초기에는 무요소법의 의미에 충실하게 절점을 이용한 절점 적분을 생각하여 적용하였으나 그 정확도와 안정성의 문제로 만족한 결과를 얻지 못하였다.⁽⁶⁻⁸⁾ 따라서 요즘 대부분의 무요소법에서는 절점과는 상관없는 적분격자(integral cell)를 이용하여 수치적분을 수행하고 있다. 그러나 적분격자가 형상함수의 구성과 무관하게 이루어진다 하더라도 유한요소법의 요소를 구성하듯 미리 형성해놓아야 한다는 단점과 이것이 해의 안정성에 영향을 준다는 문제 그리고 순수한 의미의 무요소법이 되기 위해서는 실제적으로 절점만으로 모든 계산과정이 이루어져야 한다는 것으로 절점적분의 필요성이 요구되고 있다.

초기 무요소법의 연구에 적용되던 절점적분 방법은 해의 불안정성과 부정확성으로 인해 널리 활용되지 못하였다. Belytschko 등⁽⁷⁾은 이러한 불안정성을 제거하기 위하여 지배방정식에 잔류항(residual)을 추가하여 처리함으로써 안정화된 방법을 제안하였으나 해의 정확도에는 그다지 만족스러운 결과를 얻을 수 없었다. 따라서 본 논문에서는 절점 적분 방법의 간단한 개선안을 제안하고 RKPM⁽³⁾을 이용한 무요소법으로 몇 가지 수치 예제를 실험하여 이의 타당성을 보이고자 한다.

* 회원, 한양대 대학원

** 정회원, 한양대 기계공학부 교수

2. RKPM의 기본방정식

편리상 미소변형 조건에서 해석 영역이 Ω 이고 경계 Γ 로 둘러싸인 선형탄성문제를 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (2)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (3)$$

여기서 $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{b} 는 응력 텐서와 체적력을 나타내며 Γ_u , Γ_t 는 필수경계와 자연경계를 나타낸다. 또한 $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{t}}$ 는 각각 주어진 변위값과 트래션 값이다. 식(1~3)에 대한 포텐셜 에너지식과 그의 변분식은 다음과 같다.

$$\pi = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (4)$$

$$\delta\pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega} (\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (5)$$

식(4), (5)의 식으로부터 무요소법을 적용하기 위하여 다음과 같은 RKPM⁽³⁾을 도입한다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum \Psi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (6)$$

$$\Psi_I(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^T(0) \bar{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \quad (7)$$

식(7)은 RKPM의 형상함수를 나타낸다. 또한 $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ 는 커널 함수를 의미하고 $\bar{\mathbf{M}}$ 과 \mathbf{Q} 는 다음과 같이 표시된다.

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \mathbf{Q}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \quad (8)$$

$$\mathbf{Q}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = \begin{bmatrix} 1 & (\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) & (\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)^2 & \dots \end{bmatrix} \quad (9)$$

상기 식(5)를 이산화 시키기 위하여 다음 관계식들을 도입한다.

$$\mathbf{u} = \Psi(\mathbf{x}) \mathbf{d} \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (11)$$

식(11)에 사용된 \mathbf{d} 는 절점 변위이고 변형을 행렬 \mathbf{B} 는 다음과 같이 정의되며 \mathbf{C} 는 구성행렬(constitutive matrix)⁽⁷⁾을 나타낸다.

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_n]$$

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \Psi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Psi_{I,y} \\ \Psi_{I,y} & \Psi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (12)$$

식(10)~(12)를 이용하여 식(5)에 대입하고 정리하면 식(13)과 같은 행렬식을 얻게 된다.

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (13)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad (14)$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Gamma_t} \Psi^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \Psi^T \mathbf{b} d\Omega \quad (15)$$

식(14), (15)의 강성행렬과 외력벡터는 이론적으로 전체 해석 영역과 트래션 경계에서의 적분으로 구할 수 있다. 그러나 실제로 무요소법에서는 영향역이 존재하기 때문에 전체 영역을 적절하게 분할하여 적분하는 적분 계획이 중요하다.

3. 절점적분

3.1 절점적분법

절점 적분은 식(16), (17)과 같이 1 포인트 가우스적분 형태로 표현된다. ^(6,7)

$$\mathbf{K} \approx \sum_I^n q_I^\Omega \mathbf{B}(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{C}(\mathbf{x}_I) \mathbf{B}(\mathbf{x}_I) \quad (16)$$

$$\mathbf{f} \approx \sum_{I=1}^s q_I^{\Gamma_I} \Psi(\mathbf{x}_I)^T \bar{\mathbf{i}}(\mathbf{x}_I) + \sum_{I=1}^n q_I^\Omega \Psi(\mathbf{x}_I)^T \mathbf{b}(\mathbf{x}_I) \quad (17)$$

여기서 n 은 해석영역 내의 절점 수를 의미하며 s 는 Γ_I 에서의 절점을 의미한다. 또한 q_I^Ω 은 절점 I에 관련된 가중계수(weight coefficient)로서 적분 영역을 의미하는 값으로 다음 식으로 결정된다. ⁽⁷⁾

$$q_I^\Omega = \frac{f_{\Omega,I} \rho_I^2}{\sum_{J=1}^n (f_{\Omega,J} \rho_J^2)} A_\Omega \quad (18)$$

A_Ω , ρ_I 은 각각 전체 영역과 절점 I에 관련된 가중함수의 영향영역반경을 의미한다. $f_{\Omega,I}$ 는 해석 영역 Ω 에 위치한 절점의 영향계수로서 사각형의 경우 내부에서는 1의 값을 갖고며 변에서는 0.5 모서리에서는 0.25의 값을 갖게 된다. 또한 $q_I^{\Gamma_I}$ 에 대한 값은 다음 식으로부터 얻을 수 있다.

$$q_I^{\Gamma_I} = \frac{f_{\Gamma,I} \rho_I}{\sum_{J=1}^n (f_{\Gamma,J} \rho_J)} L_{\Gamma_I} \quad (19)$$

L_{Γ_I} 는 자연경계의 전체길이이고 $f_{\Gamma,I}$ 는 경계상의 절점 I가 갖는 영향 계수 값이다.

3.2 절점 적분의 안정화

3.1 절의 절점적분으로 무요소법의 행렬방정식을 구성하면 절점이 있는 위치에서만 적분점이 설정되기 때문에 가상의 단파장모드(short wavelength mode)가 나타나는 불안정성을 보이게 된다. 따라서 Belytschko 등 ⁽⁷⁾은 식(4)에 다음과 같은 안정화 항을 추가 하였다.

$$\pi_s = \pi + \frac{\alpha_s l_c^2}{E} \int_\Omega (\bar{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{b})^2 d\Omega \quad (20)$$

여기서 α_s 는 무차원 안정계수이며 l_c, E 는 분할 특성길이와 탄성계수를 나타낸다. 식(20)의 안정화 항은 평형방정식의 제곱 항으로 이의 약형(weak form)은 다음과 같이 표현된다

$$\delta \pi_s(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta \pi(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \frac{2\alpha_s l_c^2}{E} \int_\Omega (\bar{\nabla} \cdot \delta \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\bar{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{b}) d\Omega \quad (21)$$

식(5)의 약형에 대하여 절점 적분을 할 경우 절점에서의 1차 미분치가 거의 0에 가깝게 얻어지기 때문에 충분히 단파장모드의 에너지를 반영하지 못하여 강성행렬을 과소평가(underestimate)하게 된다. 따라서 식(21)과 같이 절점에서 변위의 2차 미분 항을 포함하는 안정화 항으로 강성행렬이 과소평가 되는 것을 보상해 준다. 위식을 이산화하고 정리하여 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_s] \{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{f} + \mathbf{f}_s\} \quad (22)$$

여기서 식(25)의 안정화 안정화 항에 대한 절점 적분은 다음식으로 표현된다.

$$\mathbf{K}_s = \frac{2\alpha_s l_c^2}{E} \int_\Omega \mathbf{D}^T \mathbf{C}^T \mathbf{C}' \mathbf{D} d\Omega \approx \frac{2\alpha_s l_c^2}{E} \sum_{I=1}^n q_I^\Omega \mathbf{D}(x_I)^T \mathbf{C}(x_I)^T \mathbf{C}(x_I) \mathbf{D}(x_I) \quad (23)$$

$$\mathbf{f}_s = -\frac{2\alpha_s l_c^2}{E} \int_\Omega \mathbf{D}^T \mathbf{C}^T \mathbf{b} d\Omega \approx -\frac{2\alpha_s l_c^2}{E} \sum_{I=1}^n q_I^\Omega \mathbf{D}^T(x_I) \mathbf{C}(x_I)^T \mathbf{b}(x_I) \quad (24)$$

4. 개선된 절점 적분법

4.1 절점 적분의 개선방안

앞의 행렬식(22)에 의해 얻어진 수치해석 결과는 안정화 항에 의해서 해의 안정성에 도움을 주지만 적분 셀을 사용한 결과에 비해서는 현저히 해가 부정확해진다. 이것은 절점에서의 영역 값을 q_I^Ω 로 직접 부여하기 때문으로 생각된다. Fig.1 에서 점 I 에 대한 절점 적분이 수행될 경우에 점 I 의 영역값 q_I^Ω 에 대하여 관련을 갖는 절점들은 점 b, d 가 되고 I 점과 절점간의 거리를 계산하여 형상함수의 값을 결정하게 된다. 또한 절점 I 에서의 1 차 미분 항은 절점 위치에서 계산하여 직접 얻게 됨으로써 정확한 값을 얻지 못하게 된다. 그러나 보통 적용하고 있는 적분 셀을 설정하여 그 영역에 대한 가우스 적분을 할 경우에는 그림에서와 같이 가우스 적분 점에서 각 절점과의 거리를 이용하게 됨으로 계산 절점의 해당영역 q_I^Ω 에 영향을 미치는 a~f 의 절점들에 대한 영향이 정확하게 평가된다. 이러한 것은 절점 적분 시에 절점의 수를 현저히 증가 시키면 적분 셀을 설정하여 계산하는 경우와 비슷한 결과를 얻을 수 있는 것으로부터 알 수 있다. 따라서, 본 논문에서는 각 절점 적분에 이용되는 절점 적분 영역의 값을 식(25)와 같은 반지름 r_I 인 원의 형태로 치환하고 이 영역에 대하여 가우스 적분을 수행함으로써 적분 절점의 해당영역에 영향을 미치는 절점들을 적절히 고려 할 수 있도록 하였다.

$$r_I = \frac{1}{f_{\Omega,I}} \left(\frac{q_I^\Omega}{\pi} \right)^{0.5} \quad (25)$$

이렇게 하면 절점에서의 1 차 미분에 따르는 불안정성 해소에 도움을 주며 주어진 절점의 영역에 영향을 미치는 모든 절점들의 평가를 정확히 할 수 있다. 따라서 절점 적분만으로 적분셀을 사용한 것과 같은 효과를 얻을 수 있다.

4.2 경계에서의 영역 적분법

개선된 절점 적분법을 사용하면 경계에서의 분할부분을 편리하게 처리 할 수 있다. 기존의 방법에서는 절점에 해당되는 영향영역의 분할부분을 이용하여 $f_{\Omega,I}$ 값을 적용하였는데 이 값을 θ 의 함수로 정의하여 사용한다. Fig. 2 에 보이는 경계상에서의 절점들에 관련된 전역 좌표계의 각도 값을 얻기 위해서 다음과 같은 식을 정의한다.

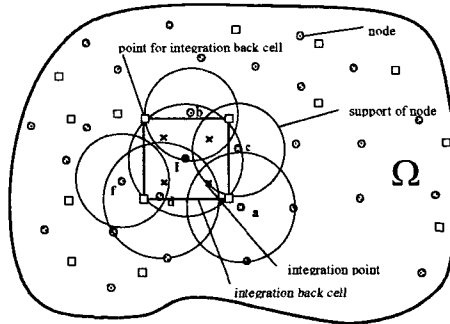


Fig. 1 Nodal points for integration back cells, integration points and supports of nodes in Ω .

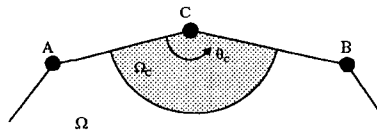


Fig. 2 Boundary nodes for area fraction calculation.

$$\theta_{ij}^G = \cos^{-1} \left[\frac{|dx_{ij}|}{\sqrt{(dx_{ij}^2 + dv_{ij}^2)}} \right] \quad (26)$$

각 위치에서의 각도 값을 이용하면 다음과 같은 수식으로 절점에 해당하는 $q_i^\Omega, f_{\Omega,I}$ 값을 얻게 되며 이 식을 이용하면 경계부분에서의 영역적분을 편리하게 수행할 수 있다.

$$f_{\Omega,I} = \frac{\theta_{CB}^G - \theta_{CA}^G}{2\pi} = \frac{\theta_C}{2\pi} \quad (27)$$

5. 수치예제 및 검토

제안한 방법의 타당성을 검토하기 위해 몇 가지 예제로 수치실험 하였으며 그 결과를 식(28)의 상대 오차를 이용하여 비교 평가하였다. 또한 필수 경계 조건을 위한 처리법은 형상함수 수정법⁽¹¹⁾을 적용하였다

$$r = \frac{\|u^{num} - u^{exact}\|}{\|u^{exact}\|} \quad (28)$$

5.11 차원 문제

Fig.3 과 같이 양단이 고정되고 분포하중 b 가 작용하는 1 차원 문제를 수치실험 하였다. 경계조건이 식(29)와 같이 선형조건으로 주어지고 있는 경우를 11 개의 절점으로 분할하여 해석하였으며 그 결과로써 내부 절점에서의 변위를 비교하여 Fig. 4 에 도시하였다.

Fig. 4 는 해석 결과를 서로 비교하기 위하여 절점 적분 시에 안정화 항을 추가한 경우(Δ)와 추가하지 않은 경우(\square) 본 논문에서 제안한 수정 절점적분 방법(\times) 기존의 적분셀을 이용한 RKPM 에 의한 결과(\diamond)와 엄밀해($*$)를 도시한 것이다. 그림에 보이는 바와 같이 안정항을 추가하지 않은 기존의 절점 적분방법의 경우를 제외하고 모두 엄밀해와 유사한 결과를 얻을 수 있다. 또한 Belyschko 등⁽⁷⁾은 이와 같은 예제의 경우 선형 기저를 이용하여 계산을 하거나 영향영역을 크게 하는 경우 진동현상이 나타나지 않는다고 보고하였다. 따라서 안정화 항은 일부 이러한 진동현상이 나타나는 부분에서 억제 시키는 역할을 하고 있음을 알 수 있으며 본 논문에서 제안한 방법으로도 동일한 효과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{u}(0) = 0, \quad \bar{u}(L) = 0 \\ b = Lx \end{aligned} \quad (29)$$

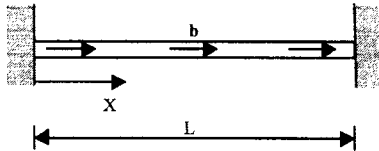


Fig. 3 1-D bar problem.

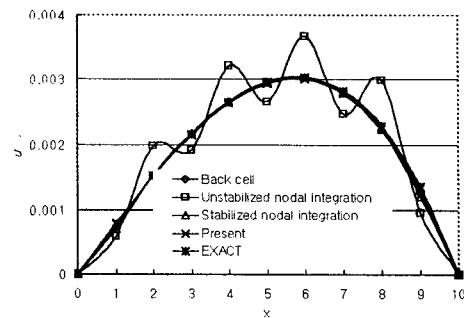


Fig. 4 Nodal displacements in 1-D bar problem with regular node distributions.

5.2 외팔보 문제

Fig. 5 은 2 차원 문제의 수치 실험으로 끝단에 트래クション을 받고 있는 외팔보 문제를 보인다. Fig. 6(a)는 15 개의 절점으로 구성된 해석 모델의 절점 분포이며 Fig.6 (b),(c),(d)는 논문에서 비교하고 있는 적분 방법들에서 적분 영역의 차이를 보이는 그림이다.

Fig.6(b)는 기존의 절점적분 방법으로써 사각형 형태의 격자는 절점영역의 형태를 해석 영역으로 나누어 그린 것이다. 절점분포가 일정한 경우 이와 같은 형태로 표현할 수 있으나 절점이 불규칙한 경우에는 어떠한 형태로 이루어지는지 정확히 알 수는 없다. 이 그림으로부터 각 절점에 해당하는 위치에 사실상 1 포인트적분을 하는 경우와 유사 하다고 할 수 있으며 이러한 적분방법으로 인해 해의 신뢰성을 위해서는 많은 절점분포와 안정화 항이 필요하게 된다. (c)는 보통 무요소법에서 사용하는 적분 방법으로 적분 셀을 이용한다는 단점 이외에는 가장 안정적인 해를 준다. (d)는 본 논문에서 사용한 방법으로 (c)와 같이 적분 셀을 미리 형성하지 않고도 절점의 정보만으로 (c)와 같은 결과를 얻기 위해 만든 방법이다. 이 그림을 살펴보면 절점에 해당하는 절점 영역의 값을 원으로 치환한 상태에서 적분점을 잡아 해석하는 방법으로 적분셀의 설정이 필요없음을 알 수 있다. 이렇게 적분을 하면 해석해의 값은 (a)방법보다는 정확하면서 (c)의 방법에 근사한 값을 얻게 된다. 하지만 원의 형태로 나누어 지면서 빈구역이 생기게 되나 이구간에 대한 영역값은 겹쳐지게 되는 영역으로 대치되며 해석과정에서는 (a)방법과 동일한 영역 값으로 계산되어지게 된다. 물론 이렇게 빈 구역이 나타나게 되면 결과에는 좋지 않은 영향을 미치게 되나 기존의 방법으로도 이러한 것은 대치할 수 없다. 따라서 해의 신뢰성에 도움을 주기 위해서는 두경우 모두 절점의 분포를 가능한 규칙적으로 혹은 간격을 적절하게 해주는 것이 좋다.

Fig. 7 은 외팔보 수치실험 결과로 절점 변위의 상대오차를 절점수에 따라 비교하여 나타낸 것이다. 논문에서 제안한 방법이 기존의 절점 적분에 비해서 적분 셀을 이용한 방법에 근사한 결과를 보이고 있음을 알 수 있다.

절점이 불규칙하게 분포될 경우에 해에 미치는 영향을 검토하기 위하여 같은 문제를 Fig. 8 과 같이 모델링 하여 수치실험을 하였다. Fig.8 은 절점의 수 91 개를 임의로 뿌려놓은 모델이다. 해석 결과는 절점의 수가 많아 비교적 해가 안정되었으며 그 결과를 Fig. 9 에 도시하였다. Fig.9 (a)는 각 절점의 변위를 기존의 절점적분에 의한 결과와 논문에서 제안한 방법의 결과를 정해와 비교하여 나타낸 것이다. 이 문제에서는 안정화 항을

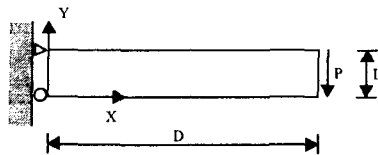


Fig. 5 Cantilever plane under end traction.

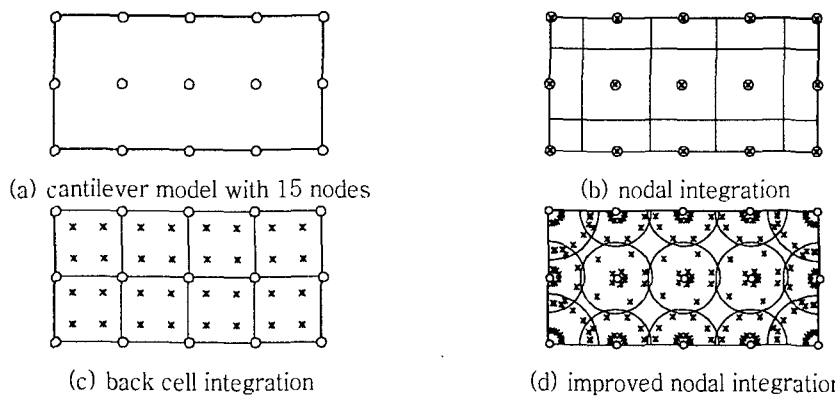


Fig. 6 Regular nodes and integration parts in the cantilever model. (x: integration points, o: nodes)

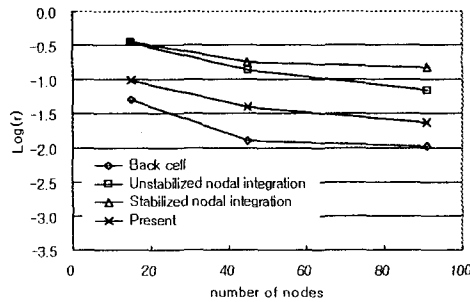


Fig. 7 Comparison of relative error norms in the cantilever model with regular node distributions.

추가한 결과와 추가하지 않은 결과가 거의 같으므로 이것은 Fig. 9 (b)에 상대오차를 이용하여 막대그래프로 나타내었다. 역시 적분셀을 이용한 결과가 가장 좋은 것을 알 수 있으며 본 논문에서 제안한 방법은 기존의 방법에 비하여 좋은 결과를 보임을 알 수 있다.

5.3 원형홀이 있는 무한 평판 문제

다른 2 차원 탄성예제로 Fig.10에 보인 중앙에 원형 구멍을 갖는 유한 평판의 인장 문제를 수치 실험 하였다. 평판문제는 x 방향 인장력 T_x 를 받는 무한 평판 문제와 동일한 해를 얻기 위하여 Fig. 10과 같은 유한 평판의 응력해를⁽⁷⁾ 이용하여 평판의 트랙션 경계조건을 부여하였다.

Fig. 11은 해석 결과의 상대 오차를 절점수에 따라 비교하여 나타낸 것이다. 모두 절점 수의 증가에 따라서 수렴되는 결과를 보여주고 있으며 논문에서 제안한 방법이 적분 셀을 이용하는 경우에 비해서는 값이 떨어지고 있으나 기존의 절점 적분 방법에 비해서 향상됨을 알 수 있다.

6. 결론

대부분의 무요소법에서 수치 적분을 위해 사용하고 있는 적분 셀의 불편함과 이것이 해에 미치는 영향 등을 없애기 위해서 절점만으로 수치계산이 이루어지는 절점 적분 방법을 연구하였다. 기존의 절점 적분 방법은

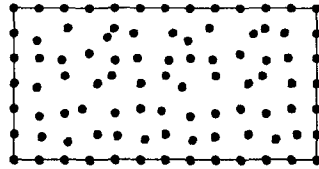
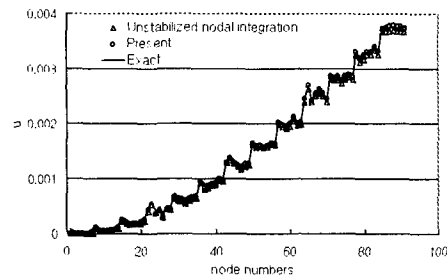
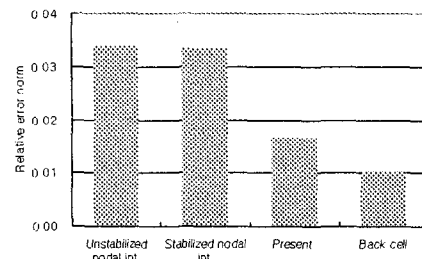


Fig. 8 Cantilever plane model with irregular node distributions.



(a) Displacements



(b) Relative error norms

Fig. 9 Comparison of displacements and relative error norms according to the irregular node distributions in the cantilever model.

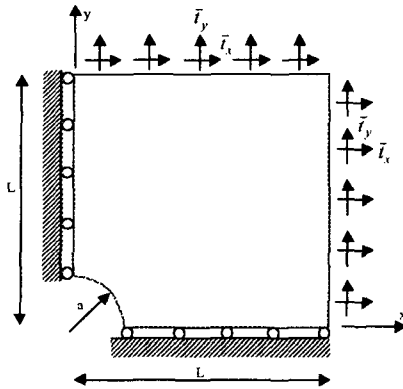


Fig. 10 A finite quarter plane with a circular hole at center.

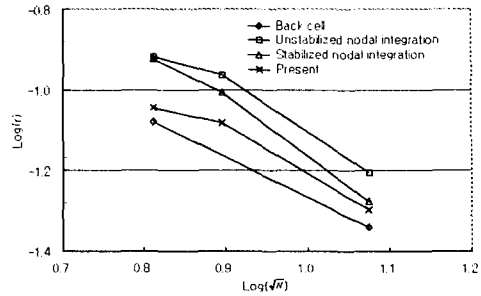


Fig. 11 Comparison of relative error norms for the plane model with a circular hole.

해의 안정성과 정확도가 떨어지기 때문에 사용에 어려움이 있다. 따라서 본 논문에서는 기존 방법에 합리적인 적분영역을 설정함으로써 이들 특성을 향상 시키고자 수정하였다. 제안한 수정 절점적분 방법의 타당성과 그 특성을 규명하기 위하여 몇 가지 탄성 문제를 수치 실험하였으며 그 결과를 검토하여 다음 결론을 얻었다.

- 1) 제안한 절점적분 방법을 사용하면 적분 셀을 구성할 필요가 없기 때문에 무요소법에 의한 해석을 편리하게 한다.
- 2) 기존의 절점적분 방법에 비해 정확도를 크게 향상 시킬 수 있으며 안정성을 위해 추가되었던 안정항을 배제하여 간단한 수식화와 일관성 있는 해를 얻을 수 있다.
- 3) 제안한 절점적분 방법에서는 경계부분에서의 영역 적분처리를 간단히 자동화 할 수 있다.

참고문헌

1. Monaghan J. J., 1988, "An Introduction to SPH," *Computer Physics Communications*, Vol. 48, pp. 89~96.
2. Belytschko T., Lu Y. Y. and Gu L., 1994, "Element Free Galerkin Methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229~256
3. Liu W. K., Jun S. and Zhang Y. F., 1995, "Reproducing Kernel Particle Methods," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, pp. 1081~1106
4. Duarte C. A., Oden J. T., 1996, "An h-p Adaptive Method Using Clouds," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp.237~262
5. Belytschko T and Tabbara M., 1996, "Dynamic Fracture Using Element-Free Galerkin Methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 923~938
6. Liu W. K., Jun S., Li S., Adee J. and Belytschko T., 1995, "Reproducing Kernel Particle Methods for Structural Dynamics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, pp. 1655~1679
7. Beissel S., Belytschko T., 1996, "Nodal integration of the element-free Galerkin method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 49~74
8. Liu W. K., Chen Y., Jun S., Chen J. S., Belytschko T., Pan C., Uras R.A. and Chang T., 1996, "Overview and Applications of the Reproducing Kernel Particle Methods," *Archives of computational Methods in Engineering: State of the art reviews*, Vol. 3, pp.3~80.
9. Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M. and Krysl P., 1996, "Meshless Methods : An Overview and Recent Developments," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 3~47
10. 석병호, 임장근, 1998, "갤러킨 정식화를 사용한 무요소법의 구성과 그 특성," 대한기계학회 '98년도 추계학술대회논문집, pp.396~401
11. 석병호, 송태한, 임장근, 2000, "EFGM에서 필수경계조건 처리를 위한 형상함수 수정법", 대한기계학회 논문집, pp.803~809