

신뢰성 해석에 의한 평면응력요소의 설계변수 분석 A Design Variable Study of Plane Stress Element by Reliability Analysis

박석재* 최외호** 김요숙*** 신영수****
Park, Seok-Jae Choi, Wae-Ho Kim, Yosuk Shin, Yeong-Soo

ABSTRACT

In order to take account of the statistical properties of probability variables used in the structural analysis, the conventional approach using the safety factor based on past experience usually estimated the safety of a structure. The real structures could only be analyzed with the error in estimation of loads, material characters and the dimensions of the members. But the errors should be considered systematically in the structural analysis. Structural safety could not precisely be appraised by the traditional structural design concept.

Recently, new approach based on the probability concept has been applied to the assessment of structural safety using the reliability concept. Thus, the computer program by the Probabilistic FEM is developed by incorporating the probabilistic concept into the conventional FEM method. This paper estimated for the reliability of a plane stress structure by Advanced First-Order Second Moment method using von Mises, Tresca and Mohr-Coulomb failure criterions. The reliability index and failure probability of attained by the Monte Carlo Simulation method with the von Mises criterion were same as PFEM, but the Monte Carlo Simulation were very time-consuming. The variance of member thickness and load could influence the reliability and failure probability most sensitively among the design variables from the results of the parameter analysis. And proper failure criterion must be used to design safely.

1. 서론

기존의 구조설계와 해석은 구조물에 가해지는 하중, 재료적 특성 및 부재의 치수 등 일정한 값을 갖는 확률론적인 변수로 가정하여 구조해석을 수행하여 구조물의 안전성을 평가하여 왔다. 그러나, 최근 구조물의 대형화와 새로운 구조물의 출현으로 더 많은 불확실량(Uncertainty)이 실제 구조물에 존재하고 있다. 불확실량은 가해지는 하중의 추정에 의한 오차, 재료적 특성 및 부재 치수에 의한 오차뿐만 아니라 설계자의 실수에 의한 오차 등이 있다. 그러므로 구조물의 안전성 정도를 정확히 파악하기 위해서는 불확실량의 정도를 체계적으로 고려하여야 한다. 1960년대 이후 기존의 안전계수에 의한 안전성 평가 방법의 타당성 여부가 거론되기 시작하였고, 경험에 입각한 안전계수의 모순을 개선하기 위하여 체계적인 신뢰성 이론에 근거를 둔 보다 합리적인 구조 신뢰성 평가 방법의 개발이 시도되기 시작하였다. 구조 신뢰성 평가는 신뢰도 지수(Reliability index) β 에 의해 구조물의 파괴확률을 구할 수 있는데 신뢰도 지수를 구하기 위해서는 한계상태 방정식(Limit State Equation)이 필요하다. 복잡한 구조물의 경우에는 파괴모드에 대한 한계상태방정식을 설계변수의 함수로 나타낸다는 것이 매우 어렵기 때문에 Monte Carlo Simulation법을 사용할 수 있다. Monte

* 이화여자대학교 공학연구소 연구원
** 정회원, 단국대학교 토목환경공학과 교수
*** 정회원, 이화여자대학교 건축학과 연구교수
**** 정회원, 이화여자대학교 건축학과 부교수

Carlo Simulation법은 설계변수를 각각의 밀도함수에 맞도록 추출하고, 이 값으로 기존의 구조해석 방법을 통하여 상태함수 값을 구한 다음, 계산된 상태함수 값을 통계 분석하여 파괴확률을 구하는 방법이다. 이 경우 매우 정확한 파괴확률을 구할 수 있지만, 구조해석을 여러 번 수행해야 하므로 시간이 많이 소요되는 단점을 가지고 있다. 이와 같은 단점을 극복하기 위해 기존의 유한요소법에 확률이론을 도입한 확률 유한요소법(Probability Finite Element Method : PFEM)이 등장하였다. 확률 유한요소법은 구조해석을 단 한번 수행함으로써 나타나는 변위 또는 단면력의 결과인 평균과 표준편차로 복잡한 구조물의 신뢰성해석을 위한 불확실량을 얻을 수 있다. 따라서 확률 유한요소법으로 보다 빠르고 정확한 구조물의 안전성을 평가할 수 있다.

본 연구에서는 박판 구조물을 해석할 수 있는 확률 유한요소해석 프로그램을 개발하였다. 구조 해석에 필요한 변수들이 불확실량을 가질 경우 개발된 프로그램을 이용하면 단 한 번의 해석으로 요소의 응력에 대한 평균과 표준편차를 쉽게 구할 수 있다. 요소 응력에 대한 평균과 표준편차로 개선된 1계2차모멘트(Advanced First Order Second Moment : AFOSM) 신뢰성 해석법을 이용하여 신뢰도 지수 β 와 파괴확률을 구하였다. 한계상태방정식은 응력 상태가 고려된 항복조건식이어야 하기 때문에 본 연구에서는 다음 3가지 한계상태방정식 즉 von Mises, Tresca와 Mohr-Coulomb에 대한 신뢰도 지수 β 를 각각 구하였고 비교 검토하였다. 또한 설계변수로는 탄성계수, 프아송비, 하중, 부재 두께를 선정하였으며, 설계변수의 변동계수와 부재의 파괴확률과의 상관관계도 살펴보았다.

2. 확률 유한요소법에 의한 신뢰성 해석의 정식화

2.1 재료 상수의 확률특성 (Probability Characteristic of Material Constant)

구조해석시 고려되는 재료 설계변수로는 하중, 재료적 특성, 부재치수 등이 있는데, 본 연구에서는 하중(P), 탄성계수(E), 프아송비(ν), 부재 두께(t)를 확률 유한요소해석의 모델링 설계변수로 가정하여 확률론적 유한요소해석에 필요한 변이계수를 식(1)과 같이 나타내었다.

$$\begin{aligned} E(x) &= E_0(1+e(x)) \\ F(x) &= F_0(1+e(x)) \\ \nu(x) &= \nu_0(1+e(x)) \\ t(x) &= t_0(1+e(x)) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, E_0, F_0, ν_0, t_0 는 종래의 확정론적 유한요소해석에서 사용되는 평균값을 나타내며, $e(x)$ 는 각 설계변수의 통계적 특성을 지닌 설계변수의 변이를 나타내는 계수로서 정규분포로 가정하였다. 특히 $e(x)$ 는 설계변수가 음(-)의 값을 갖지 않도록 하기 위하여 $-1+\epsilon \leq e(x) \leq 1-\epsilon$ 의 범위로 국한시켰고, ϵ 는 '0'과 '1' 사이의 값을 가진다.

2.2 단면응력의 불확실량

구조물에 내재되어 있는 설계변수를 X로 나타내면 식(2)와 같다.

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (2)$$

일반적으로 구조해석 결과인 변위(Displacement : U)와 단면응력(Stresses : F)는 설계변수 X의 함수이므로 식(3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} U &= U(X) \\ F &= F(X) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, 설계변수 X는 하중, 부재 두께, 탄성계수, 프아송비이다. 구조해석이 확정론적인 설계변수가 아닌 평균과 표준편차를 가지는 확률론적인 설계변수이기 때문에 구조해석의 결과도 설계변수 X의 분산 정도에

다른 단면응력에 대한 평균과 표준편차로 나타나게 된다.

선형탄성해석을 위한 변위법(Displacement method)의 기본 가정 하에, 전체 구조물에 대한 하중-처짐 (Force-Displacement)의 강성방정식(Stiffness equation)은 식(4)와 같다.

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (4)$$

여기서, $[K]$ 는 전체 강성매트릭스(Stiffness matrix)이며, $\{U\}$ 는 미지의 변위이고, $\{F\}$ 는 외부 하중이다. 식 (4)를 평균과 표준편차가 포함된 형태의 하중-처짐 강성방정식으로 나타내면 식(5)와 같다.

$$([\bar{K}] + [\delta K])(\{\bar{U}\} + \{\delta U\}) = (\{\bar{F}\} + \{\delta F\}) \quad (5)$$

식(5)를 전개한 항에서 미소항의 제곱항 즉 $[\delta K][\delta U]$ 를 무시하면 식(6)과 같이 평균치에 의한 항과 식(7)의 표준편차에 의한 항으로 분리된다.

$$[\bar{K}]\{\bar{U}\} = \{\bar{F}\} \quad (6)$$

$$[\bar{K}]\{\delta U\} = \{\delta F\} - [\delta K]\{\bar{U}\} \quad (7)$$

식(7)에서 미지량인 $[\delta U]$ 에 대해 정리하면 식(8)과 같다.

$$\{\delta U\} = [\bar{K}]^{-1}(\{\delta F\} - [\delta K]\{\bar{U}\}) = [\bar{K}]^{-1}\{\delta P\} \quad (8)$$

단면응력의 평균과 표준편차는 부재요소의 극한 파괴확률 P_f 를 구하는데 매우 중요한 요소이다. 각 부재의 단면응력을 매트릭스로 표시하면 식(5)와 유사한 식(9)가 된다.

$$(\{\bar{f}\} + \{\delta f\}) = ([\bar{k}] + [\delta k])(\{\bar{u}\} + \{\delta u\}) \quad (9)$$

식(9)에서 미지량인 $[\delta f]$ 에 대해 정리하면 식(10)과 같다.

$$\{\delta f\} = [\bar{k}]\{\delta u\} + [\delta k]\{\bar{u}\} \quad (10)$$

2.3 강성매트릭스 구성

평면응력 요소에 대한 강성매트릭스 $[D_i]$ 는 식(11)과 같다.

$$[D_i] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

탄성계수 E 와 프아송비 ν 를 설계 확률변수로 고려하려면, 일반 강성매트릭스 $[D_i]$ 는 표준편차를 포함하는 강성매트릭스 $[D_s]$ 로 바뀌어야 하며, 이를 식으로 나타내면 식(12)와 같다.

$$[D_s] = \frac{(E + \delta E)}{1 - (\nu + \delta \nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu + \delta \nu & 0 \\ \nu + \delta \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - (\nu + \delta \nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서, δE 는 탄성계수의 불확실량이며, $\delta \nu$ 는 프아송비의 불확실량이다. 표준편차만으로 이루어진 강성 매트릭스 $[D_i]$ 는 식(12)의 $[D_s]$ 에서 식(11)의 $[D_i]$ 를 빼서 구할 수 있으며 식(13)과 같다.

$$\begin{aligned} [D_t] &= [D_s] - [D_i] \\ &= \frac{(E + \delta E)}{1 - (\nu + \delta \nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu + \delta \nu & 0 \\ \nu + \delta \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - (\nu + \delta \nu)}{2} \end{bmatrix} - \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

2.4 확률 유한요소 프로그램 구성

본 연구에서 개발한 확률 유한요소 프로그램의 흐름도를 그림 1에 나타내었다.

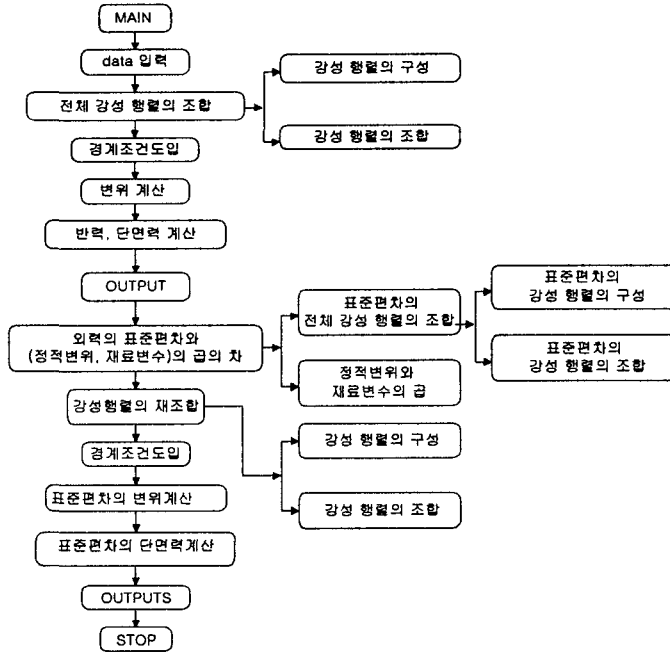


그림 1. 확률 유한요소법의 흐름도

2.5 확률 유한요소법에 의한 신뢰성 해석

본 연구에서는 Hasofer-Lind가 제안한 개선된 일계이차모멘트법을 신뢰성 해석기법으로 사용하였다. 개선된 1계2차모멘트법은 기본 설계변수 $x=(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ 의 비선형 함수(Nonlinear function)인 한계 상태방정식의 파괴면 $g(x)=0$ 을 독립된 표준변수 $x'=(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n')$ 로 변환시켜서 x_i' 의 방정식으로 표현된 $g(x)=0$ 인 한계상태표면까지의 원점에서의 최소거리를 신뢰성지수 β 로 정의한다. 이 때 상태함수의 평균과 표준편차를 식으로 나타내면 식(14)와 식(15)로 각각 나타낼 수 있다.

$$\bar{x}_g = \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i' - x_i'^*) \left(-\frac{\partial g}{\partial x_i'^*} \right) = - \sum_{i=1}^n (x_i'^*) \left(-\frac{\partial g}{\partial x_i'^*} \right), \quad \bar{x}_i = 1 \quad (14)$$

$$S_g^2 = \sum_{i=1}^n S_{x_i'}^2 \left(-\frac{\partial g}{\partial x_i'^*} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial g}{\partial x_i'^*} \right)^2, \quad S_{x_i} = 1 \quad (15)$$

식(14)의 평균과 식(15)의 표준편차의 비를 신뢰도 지수 β 라 정의하면 식(16)으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\bar{x}_g}{S_g} = \frac{- \sum_{i=1}^n x_i'^* \left(-\frac{\partial g}{\partial x_i'^*} \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial g}{\partial x_i'^*} \right)^2}} = \beta \quad (16)$$

Hasofer-Lind의 개선된 일계이차모멘트법은 기본적으로 $x_i'^*$ 를 찾는 과정을 식(17)과 같은 전형적인 최적화(Optimization) 과정으로 볼 수 있다.

$$\text{Minimize } \beta = \sqrt{x'^T x'}, \quad g(x) = 0 \quad (17)$$

파괴점에 대한 변환된 좌표 $x_i'^*$ 가 식(17)에서 결정되면 식(18)에 의해 신뢰도 지수 β 를 구할 수 있다.

$$x_i'^* = -\alpha_i^* \cdot \beta \quad (18)$$

본 연구에서 사용된 개선된 일계이차모멘트법을 그림 2에 흐름도로 나타내었다. 본 연구의 검증을 위하여 사용한 Monte Carlo Simulation법의 흐름도는 그림 3에 나타내었다.

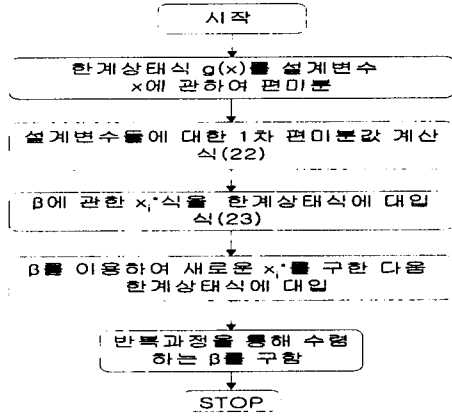


그림 2. 개선된 일계이차모멘트법

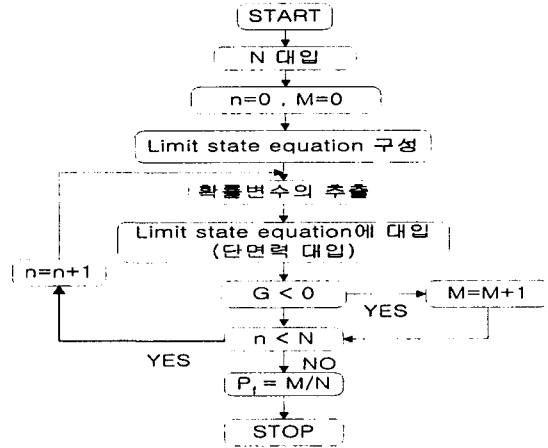


그림 3. Monte Carlo Simulation

그림 2에서 사용된 식들을 정리하면 다음과 같다. von Mises는 식(19), Tresca는 식(20), Mohr-coulomb은 식(21)에 각각 나타내었다. 단, Mohr-coulomb인 경우 주응력 σ_1 과 σ_2 가 양(+)이면 식(21a), σ_2 가 음(-)이면서 σ_2 의 절대값이 σ_1 의 절대값보다 클 경우는 식(21b)를 적용한다. 또한 그림 2에 사용된 식(22)와 식(23)도 아래에 나타내었다.

$$g(x) = Y - (\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + \sigma_x \sigma_y - 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

$$g(x) = \frac{Y}{2} - \left(\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

$$g(x) = Y \mp \left[\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \pm \left(\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (a, b) \quad (21)$$

$$\alpha_i^* = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x_i'^*} \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i'^*} \right)^2}} \quad (22)$$

$$x_i^* = (S_{x_i} \cdot x_i'^*) + \bar{x}_i = \bar{x}_i - (\alpha_i^* \cdot S_{x_i} \cdot \beta) \quad (23)$$

3. 적용모델 및 고찰

3.1 평면응력 부재의 확률 유한요소해석

본 연구에서는 확률유한요소법의 정식화 이론을 바탕으로 평면 응력(Plane stress) 구조물의 확률유한요소

해석 프로그램을 개발하였다. 본 연구에서 개발된 프로그램의 검증은 위하여 그림 4와 같은 0.1cm 두께의 40cm×20cm 박판 구조물을 해석하였다. 그림 4를 그림 5과 같이 총 16개의 삼각형 요소로 분할하였으며 총 절점수는 15이다. 해석에 사용된 설계변수의 평균, 표준편차 및 변동계수는 표 1에 정리하여 나타내었다. 검증에 사용된 강재는 SWS400이며, 자중의 영향은 무시하였다.

확률 유한요소 해석 결과 요소의 단면응력(kg/cm²)과 3개의 한계상태식에 의한 신뢰도 지수 β 의 값을 표 2에 정리하였다. 표 2에서 가장 큰 응력을 받는 1번 요소에 대하여 von Mises 항복조건식으로 단면력의 평균, 표준편차를 표 3에 나타내었다. 1번 요소에 대한 본 연구의 방법과 검증을 위한 Monte Carlo Simulation법에 의한 결과를 표 4에 등가응력과 파괴확률로 나타내었다. 단, 등가응력 σ_e 는 von Mises 한계상태식의 저항응력으로서 식(19)의 두 번째 항이다.

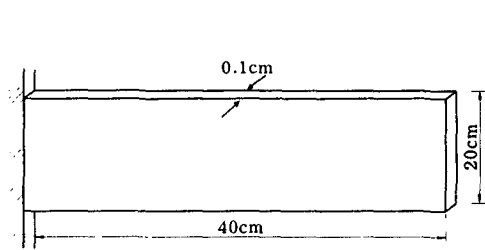


그림 4. 박판 구조물

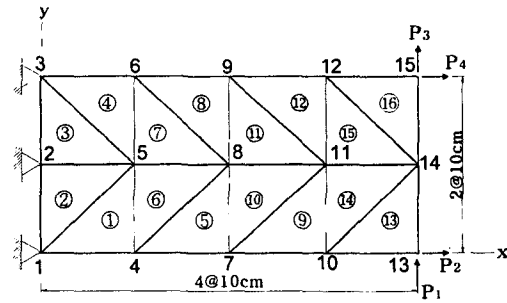


그림 5. 유한요소모델

표 1. 유한요소 모델에 대한 설계변수의 평균과 표준편차

설계변수	Y	E	ν	t	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
구분	kg/cm ²	kg/cm ²		cm	kg	kg	kg	kg
평균	2400	2×10^6	0.3	0.1	400	400	100	100
표준편차	120	0	0.03	0.01	40	40	10	10
변동계수(%)	10	0	1	1	10	10	10	10

표 2. 요소 단면응력과 신뢰도 지수 β

Element	ELEMENT STRESS			신뢰도 지수 β		
	σ_x	σ_y	τ_{xy}	Von-Mises	Tresca	Mohr-Coulomb
1	2034.222	286.432	-15.626	1.783	2.349	1.321
4	-1516.107	-246.507	-34.044	3.652	4.148	3.253
5	1563.944	196.893	-23.053	3.539	3.944	3.198
13	922.123	-677.877	122.123	3.924	3.040	5.869

표 3. 1번 요소 응력에 대한 평균과 표준편차

설계변수	Y	σ_x	σ_y	τ_{xy}
평균	2400	2034.2221	286.4322	-15.6263
표준편차	240	137.7816	20.7294	5.9889
변동계수(%)	10	6.77	7.24	38.32

표 4. 확률 유한요소법에 의한 등가응력과 파괴확률

확률변수	평균	표준편차	변동계수 (%)	Iteration	β	P_f (%)
PFEM - (1th)	1907.3984	129.0928	6.77	3	1.783	3.32
Monte Carlo - (1th)	1907.8075	128.3066	6.73	160000	1.782	3.75

표 2를 살펴보면 요소에 가장 크게 작용하는 응력에 따라 3개의 한계상태식으로 구한 신뢰도 지수 β 값이 서로 같지 않음을 알 수 있다. 따라서 인장이나 압축응력이 크게 작용하는 요소에 대해서는 주응력의 한계상태식인 Mohr-Coulomb이 적합하며, 전단응력이 크게 작용하는 요소에 대해서는 Tresca가 가장 작은 신뢰도 지수 β 값을 제시함을 알 수 있다. 등가응력 σ_e 에 대한 분포도는 그림 6, 각 요소의 신뢰도 지수 β 는 그림 7에 각각 나타내었으며, 그림 6과 그림 7이 잘 일치함을 알 수 있었다.



그림 6. 유한요소모델의 등가응력 σ_e 분포도

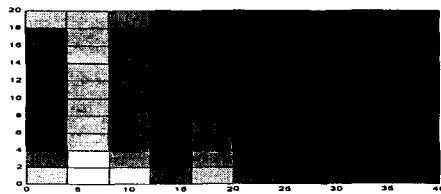


그림 7. 요소의 신뢰도 지수 β

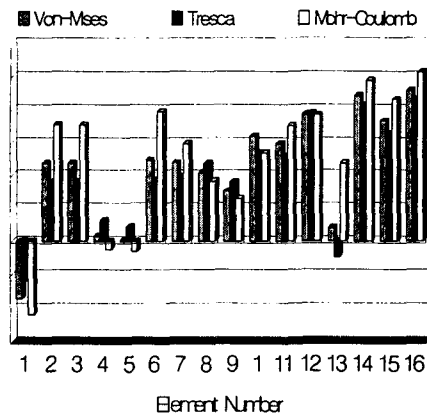


그림 8. 요소당 신뢰성 지수(기준 $\beta_T=3.5$)

3.2 설계변수 분석

설계변수 변동계수가 파괴확률에 미치는 영향을 Monte Carlo Simulation법과 개선된 일계이차모멘트법에 대하여 살펴본 결과 하중과 부재 두께의 영향에는 파괴확률이 민감하였으나 탄성계수와 프아송비의 변동계수는 파괴확률에 별 영향을 미치지 못함을 알 수 있었다. 따라서 하중과 부재 두께의 변동계수와 파괴확률과의 관계를 그림 9와 그림 10에 각각 나타내었다. 두 방법이 일치하다가 그 차이가 점점 벌어지는 이유는 개선된 일계이차모멘트법이 고차항을 무시하였기 때문에 생긴 오차로 판단된다.

4. 결론

본 연구에서는 평면응력 구조물의 확률 유한요소법을 이용한 신뢰성해석을 수행할 수 있는 프로그램을 개발하였으며, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. Monte Carlo Simulation은 각 변수의 정규분포를 형성하는 분포 데이터를 무작위로 추출하여 사용하기 때문에 난수 추출시 반복 횟수가 많아질수록 정확한 값을 얻을 수 있었지만, 난수 추출에 의한 해석 시간이 약 1시간 정도 소요되었다. 이에 반하여 확률유한요소법의 해석 시간은 약 1분 미만으로 해석 시간이

- 단축되었다. 복잡한 구조물인 경우 해석소요 시간이 많은 Monte Carlo Simulation법보다는 확률 유한요소법에 의해 구조물의 신뢰성해석을 하는 것이 경제적이다.
- 구조 해석에 필요한 설계변수들이 불확실량을 가질 경우, 확률 유한요소법에 의한 신뢰성 해석에 의해 구조물의 파괴확률 P_f 를 알 수 있기 때문에 보다 합리적으로 구조물의 안전도를 평가할 수 있다.
 - 구조물의 응력 상태에 따라 어떤 한계상태방정식을 사용하였는지에 따라 신뢰도 지수 β 값이 다르게 나오기 때문에 재료의 특성과 요소의 응력의 성질을 잘 고려할 수 있는 항복기준을 선택하는 것이 매우 중요함을 알 수 있었다. 따라서 인장이나 압축응력이 크게 작용하는 요소에 대해서는 주응력의 한계상태식인 Mohr-Coulomb의 한계상태식이 적합하며, 전단응력이 크게 작용하는 요소에 대해서는 Tresca 한계상태식을 사용하는 것이 바람직하다.
 - 확률 유한요소법에 의한 방법으로 설계변수에 대한 설계변수들의 변동계수 변화에 따른 영향을 비교·분석한 결과, 하중과 부재 두께의 변동계수는 파괴확률에 민감한 영향을 미쳤으나 탄성계수와 프아송비의 변동계수는 파괴확률에 별 영향을 미치지 못함을 알 수 있었다.

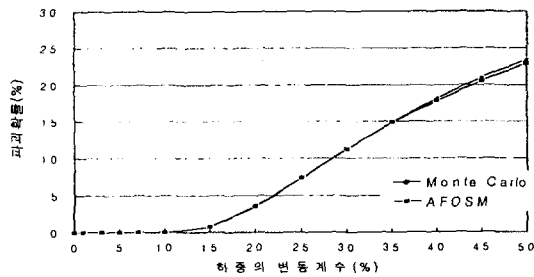


그림 9. 하중 변동계수-파괴확률

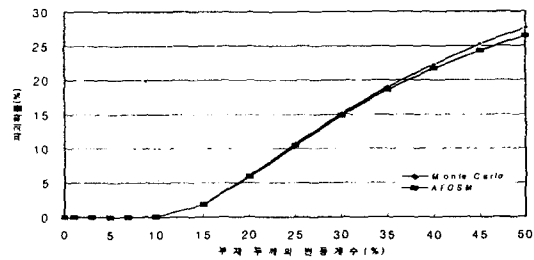


그림 10. 부재 두께 변동계수-파괴확률

참고 문헌

- Ang, A. H-S. and Tang, W-H., "Probability concepts in engineering planning and design", Vol. I, John Wiley & Sons, 1975
- Ang, A. H-S. and Tang, W-H., "Probability concepts in engineering planning and design", Vol. II, John Wiley & Sons, 1984
- Cambou, B., "Application of First Order Uncertainty Analysis in the Finite Element Method in Linear Elasticity", Proceedings, Second International Conference on Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, London England, 1971
- Handa, K. and Karrholm, G., "Application of Finite Element Method in the Statistical Analysis of Structures", Chalmers University of Technology, 1975, Sweden
- Mahadevan, S., "Stochastic Finite Element-based Structural Reliability Analysis and Optimization", Ph. D. Thesis, Department of Civil Engineering, Georgia Institute of Technology, July, 1988
- Hasofer, A.M. and Lind, N.C., "Exact and Invariant Second Moment Code Format", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.100, No. EM1, pp.111-121, 1974
- 양영순, 김지호, "평면 FRAME 구조물의 확률 유한요소 해석", 한국 전산구조 공학회지, 제2권, 제4호, pp.89-98, 1989
- 허택녕 역, "전산구조해석", 도서출판 엔지니어즈, 1994