한국전산구조공학회
2001년도 봄 학술발표회 논문집

특이 형상함수를 이용한 Pollution 적응 요소생성 알고리즘

A Pollution Adaptive Mesh Generation Algorithm Using Singular Shape Functions

유 형 선* 장 준 환** 편 수 범***

Yoo, Hyeong Seon Jang, Jun-Hwan Pyun, Soo Bum

ABSTRACT

In many areas of finite element analysis, elements with special properties are required to achieve maximal accuracy. As examples, we may mention infinite elements for the representation of spatial domain that extend to special and singular elements for modeling point and line singularities engendered by geomeric features such as reentrant corners and cracks. In this paper, we study on modified shape function representing singular properties and algorigthm for the pollution adaptive mesh generation. We will also show that the modified shape function reduces pollution error and local error.

1. 서론

Pollution 오차의 개념은 오차에 대한 재정의에 따라 기존의 오차 추정자(error estimator)로 계산되지 못한 오차를 보완하기위하여 정의되었다[1]. 기존의 적응 요소 분할 알고리즘이 전체 오차 중 일부에 해당하는 Local error 에 의한 것이므로[1], 전체 오차 중 나머지 부분, 즉 pollution 오차를 이용한 새로운 요소 분할 알고리즘에 대한 연구가 더 적은 자유도의 허용을 가능하게 한다는 실험 결과에 따른 것이다. 기존의 pollution 적응 요소 분할 알고리즘[1,2]은 pollution 오차를 구성하는 각 요소의 값에 따라 그 요소를 균등하게 세분화하는 것이었다. 그러나 이와 같은 요소 분할은 원하는 정확도를 얻기 위해 많은 반복이 필요하다. 특히, 초기 요소 분할이 세밀하지 못할수록 , 반복 횟수는 더 많아지게 된다. 뿐만 아니라, 요소의 분할이 점점 세분화되면서 메모리의 효율적인 사용을 위해 현재 계산이 끝나면 메모리를 변수 사용으로부터 자유로워야 한다. 본 논문에서는 특정부분, 즉 특이점을 포함하는 요소에 변형 형상함수를 적용하고 그 외의 부분은 일반적인 형상함수를 적용하고 제안된 pollution algirithm을 이용하여 특이점에서의 효과를 낮추고 오차를 낮추고 반복횟수를 줄이고자 한다.

* 정회원 · 인하대학교 자동화공학과 교수
** 인하대학교 자동화공학과 석사과정
*** 새빛정보통신 대리

2. 오차의 해석

2.1 해석모델

해석모델에서 다루는 모형은 혼합 경계 조건을 가지는 L형의 형상을 가지며, 두께는 고려하지 않는다[Fig. 1]. 이 형상은 오차 추정이나 적응 요소 분할과 관련된 논문에서 자주 등장하는 적용 형상이다. 이 형상의 특징은 (0,0)인 C점에 특이성이 있고 정해의 형태를 다음과 같이 가정한다.[1-4]

$$u(r,\theta) = r^{\frac{1}{3}} \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\theta\right) \qquad 1)$$

이와 같은 정해에 대한 계산은 오차 계산에서 효능지수(local effectivity)를 구하기 위해 필요하다. 경계조건 $\Gamma = \Gamma_D \bigcup \Gamma_N$ 여기서 Γ_D는 Dirichlet 이며 Γ_N 은 Newmann 경계조건이다.

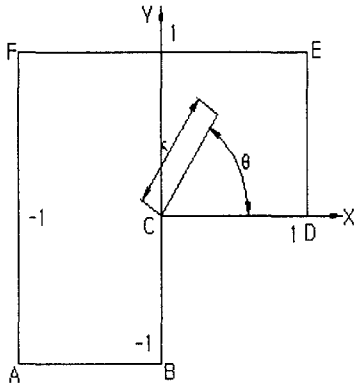

Fig. 1 The L-shaped domain for the numerical model

$$\Gamma_D = CD, \quad \Gamma_N = AB \cap BC \cap DE \cap EF \cap FA$$

여기서 주어진 경계조건은 Dirichlet 경계조건과 Newmann경계조건의 혼합된 형태이다.

유한요소 근사해는 다음과 같이 표현될 수 있다[1,2].

$$B_{\Omega\Gamma}(u_h, v_h) = \int g v_h \qquad v_h \in S_{h,\Gamma_D}{}^{p} \qquad 2)$$

오차는 pollution error와 local error의 합으로 표현할 수 있으며 pollution error은 전체 패치에서 추출하여 계산할 수 있다.

$$e_h \mid_{\omega_h} = V_1{}^{\bar{\omega}} + V_2{}^{\bar{\omega}} \qquad 3)$$

$V_1{}^{\bar{\omega}}$, $V_2{}^{\bar{\omega}}$; local and pollution error on $\overline{\omega_h}$, $\overline{\omega_h}$; ω_h + a few mesh layers

여기서 $S \subseteq Q$ 이며 $|||\ v\ |||_S = \sqrt{B_S(v,v)}$의 형태로 energy norm이 된다.

pollution error의 추정자는 다음과 같이 표현할 수 있다.[2-5]

$$|||\ V_2^{\overline{\omega_h}}\ |||_{\omega_h} = \sqrt{|\omega_h|} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial V_2^{\overline{\omega_h}}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_2^{\overline{\omega_h}}}{\partial x_2}\right)^2} \qquad 4)$$

오차를 추정할 때에는 오차 추정 방법중의 하나인 부분 복원법의 대표적인 것으로, Zienkiewicz 와 Zhu[5-8]에 의해 개발된 ZZ-SPR(Zienkiewicz & Zhu Superconvergent Patch Recovery)를 사용한다. 후과정에서 직접 구한 응력으로부터 복원될 응력에서 사용할 절점의 각 절점에서의 응력값을 구하기 위해 다항식, $\sigma_p^* = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{a}$ 를 최소 자승법을 이용하여 구성한 다항식으로부터 구한 각 절점에서의 응력값에 유한 요소법에서 변위의 내삽에서 사용된 기저함수의 벡터를 스칼라 곱하여 각 요소에서의 복원 응력 σ^{ZZ}를 구성한다[5-8].

$$\sigma^{ZZ} = N^T \cdot \overline{\sigma}^* \qquad 5)$$

이 식에서 $\overline{\sigma}^*$는 각 절점에서의 응력값이다. 이 응력을 가지고 다음과 같이 각 요소마다 오차 표시자를 구한다.

$$\eta_\tau^{ZZ} \equiv \| \sigma^{ZZ} - \nabla u_h \|_{L^2(\tau)} \qquad 6)$$

2.2 알고리즘

적용된 알고리즘을 이용하여 r법과 h법을 한 주기를 이루며 오차를 계산한다. r법의 적용으로경계조건의 노드를 오차가 적어지는 방향으로 옮긴다. 경계선에서의 절점은 특이점 부근으로 치우치게 되는 반면, 전체적으로 경계선에서의 절점의 수는 유지된다. [1-4]

$$|||\ V_2^{\tilde{\omega_h}}\ |||_{\omega_h} = Ch^{2\alpha+1} \qquad 7)$$

경계선에서의 절점수가 일정할 경우 특히, 특이점 부근의 경계선에서 절점수의 증가가 없으면 오차가 적은 유한요소해의 개선도 기대할 수 없게 된다. 절점의 수를 증가시킬 것인지 판별할 기 위해 다음의 식을 적용한다. 요소 분할 상태에서 경계선에 접한 모든 요소의 pollution error indicator를 계산하여 계산된 값이 최대값의 γ%보다 큰 요소에 대해 경계선에 놓은 두 절점 사이에 새로운 절점을 추가하고, 이 절점들을 가지고 요소 분할을 수행한다. pollution error에 대해 다음과 같은 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$h_{k+1} = h_k \times \left(\frac{|||\ V_2^{\tilde{\omega_h}}\ |||_{\omega_h}^{(k)}}{|||\ V_2^{\tilde{\omega_h}}\ |||_{\omega_h}^{(k+1)}} \right)^{-\frac{1}{2\alpha+1}} \qquad 8)$$

(k+1)의 식을 local error의 백분율로 나타낸다면 아래와 같이 간략화한다.

$$h_{k+1} = h_k \times \left(\frac{\mu_\tau}{t\%\varepsilon_{\omega_k}} \right)^{-\frac{1}{2\alpha+1}} \qquad 9)$$

h는 요소의 길이이고 α는 특이성을 나타내는 지수이다.

3. 특이성을 고려한 형상함수

n개의 노드을 갖는 유한의 요소에서 'preliminary' 형상함수를 얻을 수 있다. 이 형상함수로 구한 유한요소해의 오차는 특이점을 가지는 기하학적 특징을 갖는 영역에서 크게 나타난다. 따라서 형상함수를 특이점 보완하는 방향으로 변형함으로써 오차의 향상성을 가져오게 된다. 형상함수는 다음과 같은 알고리즘으로 변형할 수 있다[9].

Step 1 $$N_{m+1}(r) \leftarrow \frac{N_{m+1}(r) - \sum_{a=1}^{m} N_{m+1}(r_a) N_a(r)}{N_{m+1}(r_{m+1}) - \sum_{a=1}^{m} N_{m+1}(r_a) N_a(r_{m+1})}$$

Step 2 $$N_a(r) \leftarrow N_a(r) - N_a(r_{m+1}) N_{m+1}(r), \qquad a = 1, 2, \cdots, m$$

Step 3

If m+1 < n, replace m by m+1 and repeat steps 1-3

If m+1 = n, stop.

특이성에 막대한 영향을 끼치는 인자가 x방향에 있다고 놓고 x방향의 형상함수를

$$N_1 = 1 - 2r, \qquad N_2 = 2r \qquad , N_3 = r^\alpha \qquad 10)$$

라고 놓고 위의 알고리즘으로 특이성을 나타내는 형상함수를 계산한다. .

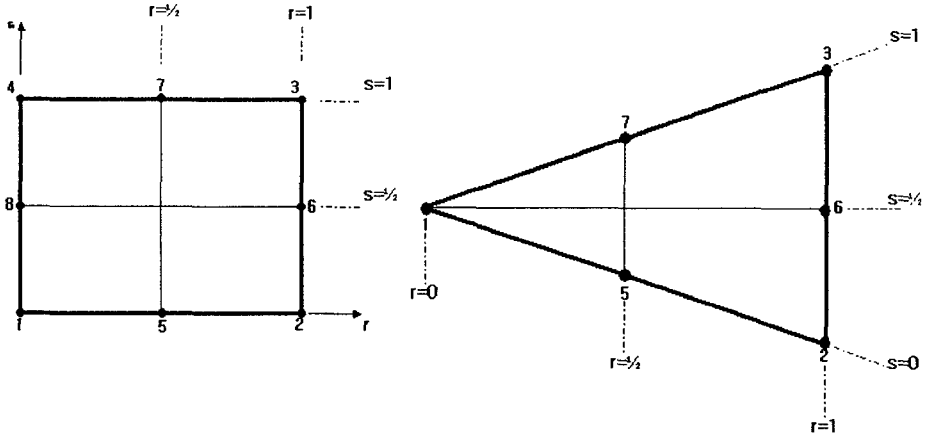

Fig. 2 Degeneration from quadrilateral element to triangular element

Fig. 2과 같이 특이성을 나타내는 4각형 형상함수를 구하면 아래의 식을 적용하여 특이점을 포함하는 삼각 형상함수를 만들고 특이점을 포함하는 요소에 적용시킨다.

$$N_1(r,s) \leftarrow N_1(r,s) + N_4(r,s) + N_8(r,s) \qquad 11)$$

4. 수치예의 적용 및 결과분석

Dirichlet 경계조건과 Newmann경계조건의 혼합된 형태의 문제에서 실제해는 다음과 같다.특이점에서 멀리떨어진 안쪽 육각영역의 패치요소 ω_h 는 다음 그림과 같다. L자형의 모델에서 Fig. 4와 같은 직각이등변 삼각형의 mesh를 만들고 육각형의 24개 삼각형 요소의 한 부분의 오차를 ZZ-SPR[5-8] 로 검출하여 Table. 1과 같은 값을 얻는다.

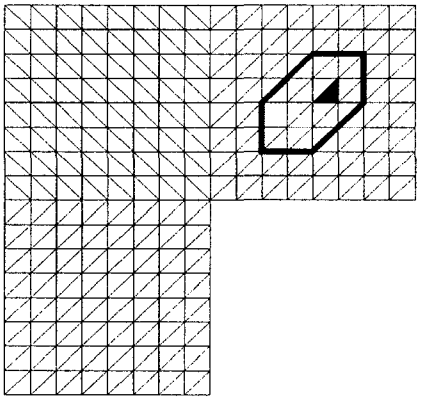

Fig. 3 The initial mesh of the numerical model

Table. 1 의 값들은 특이점을 고려하지 않은 일반적인 삼각형의 형상함수를 적용하여 r-h알고리즘을 2번 수행한 값들이다.

Table. 1 The result of each step for general shape function

Iteration	Local error 추정치 × E-05	Local Effectivity (%)	Pollution error 추정치× E-05	Pollution Factor × E-01
1	8.29	25.4681	21.9	26.4
2	8.33	61.3042	7.00	8.41
3	8.33	66.2488	6.09	7.31
4	8.32	99.2191	2.88	3.46

Local Effectivity : estimated error/true error,

Pollution Factor : pollution error/local error

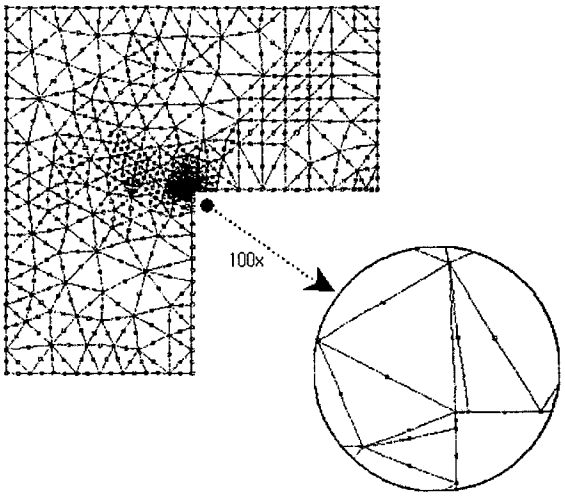

Fig.4 The mesh after the 1st step of the adaptive algorithm (E=416, N=907)

Fig 4는 초기 메시에서 r법을 적용하여 노드점들을 오차가 줄어드는 방향, 즉 특이점 방향으로 옮긴 다음 mesh를 하여 나타낸 그림이다. 메시는 Unstructured mesh algorithm인 mesh 2D[10,11]를 사용하여 경계조건의 노드를 옮긴다. 노드의 이동은 식 8), 9)으로 판별한다.

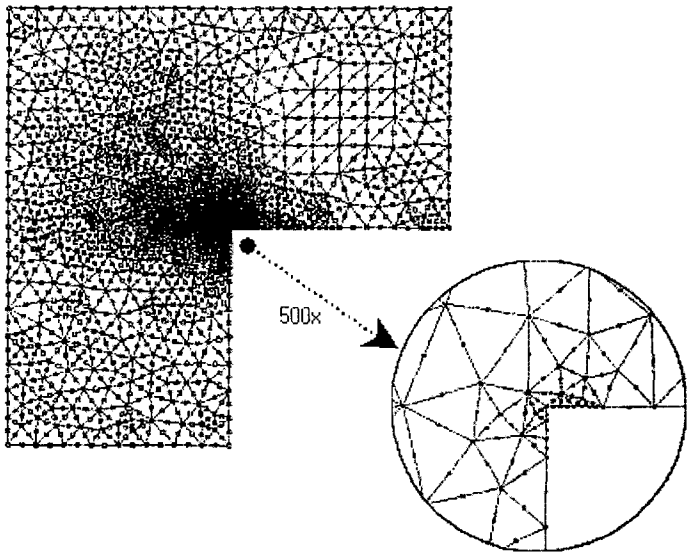

Fig.5 The mesh after the 4st step of the adaptive algorithm (E=1696, N=3493)

다시 h법을 적용하여 1696개의 요소를 가지게 되면 pollution error의 최대값×0.02%보다 큰 오차는 검출되지 않는다. 특이점을 고려하여 변형 형상함수를 만들어 일반적인 삼각형의 형상함수과 함께 쓴다면 Table. 2와 같은 값들을 얻는다.

Table. 2 The result of each step for modified shape function

Iteration	Local error 추정치 × E-05	Local Effectivity (%)	Pollution error 추정치× E-05	Pollution Factor× E-01
1	8.29	1.0296	4.32	5.21
2	8.33	1.0376	4.03	4.84
3	8.33	1.0541	3.85	4.62
4	8.32	1.0453	2.75	3.30

효능지수(Local Effectivity)가 첫 번째 특이점을 고려했을 때 아주 많은 향상이 이루어진다. 거의 1에 가깝게 수렴한다. 특이점을 고려한 형상함수를 적용함으로써 local error와 pollution error에 영향을 주는 인자들을 제거한다. 2번, 3번 4번 적용했을 때 처음 적용할 때와 거의 일정한 값을 나타내고 있다. 이는 반복횟수를 그만큼 낮출수 있다는 것을 보여준다.

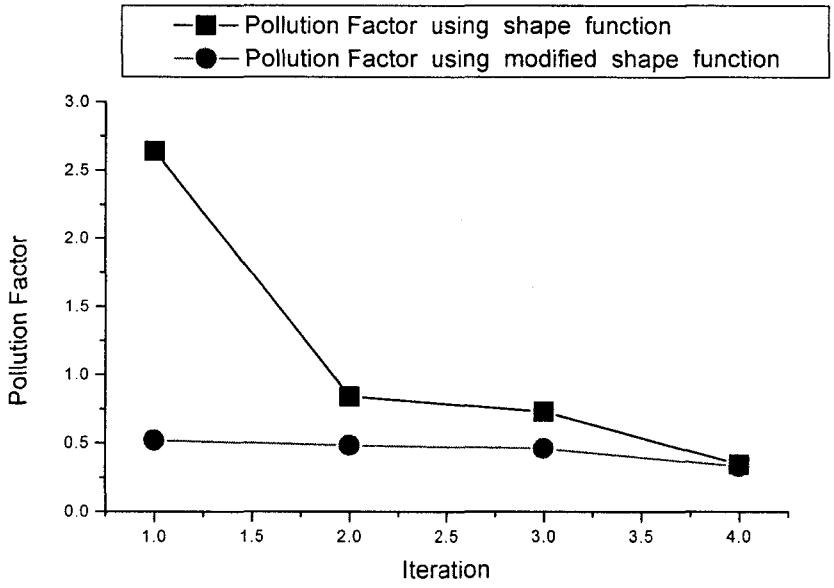

Fig. 6 The pollution factor for mesh after each step

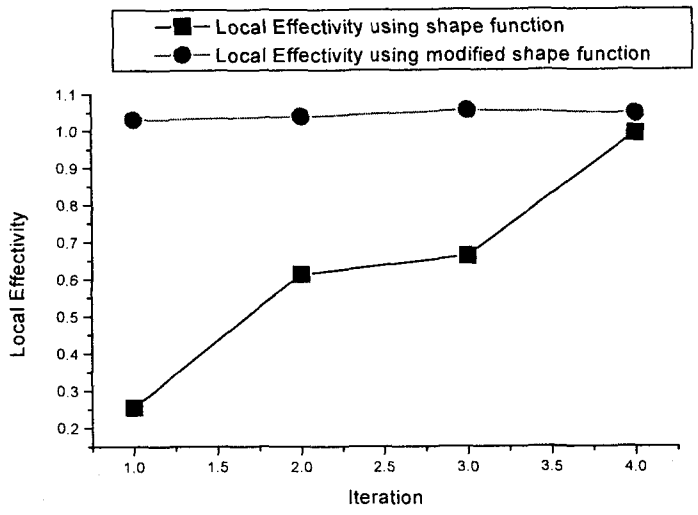

Fig. 7 The effectivity index for the mesh after each step

결론

본 논문에서는 새로운 오차해석의 화두가 되고 있는 pollution error를 이용하여 생성된 mesh의 노드의 위치를 이동시키는 r법과 요소의 수를 증대시키는 h법을 사용하였다. r-h법 알고리즘은 p법이나 h법을 여러번 반복하는 것보다 동일한 횟수에서 더 나은 효율성을 가져다 준다. 기존의 형상함수를 이용한 오차해석과 함께 pollution error를 크게 유발시키는 특이점의 고려한 형상함수를 이용하면 첫 번째 적용했을 때 효능지수가 1.0296이 나오므로 이미 주어진 해에 근접했다고 볼수 있다. 즉 반복은 한번으로 만족한다. 4번 반복하여 r-h법으로 얻어진 pollution error값은 2.88e-5이며 변형형상함수를 적용한 pollution error의 값은 2.75e-5이다.

결국 변형형상함수의 효능이 더 우수하다는 것을 증명한 것이며 여러번의 반복을 하지않고 유한요소의 해와 실제해를 근접시킬 수 있다는 결과를 확인할 수 있었다.

후기

본 연구는 인하대학교의 2000년도 연구비 지원에 의하여 수행되었음.

참고문헌

1. Ivo. Babuska , T. Strouboulis, A. Mathur and C.S. Upadhyay, Pollution error in the h-version of the finite element method and the local quality of a-posteriori error estimates, Finite Elements Anal, Des., 17 ,1994, pp273-321

2. Ivo. Babuska , T. Strouboulis, C.S. Upadhyay and S.K. Gangaraj, A posteriori estimation and adaptive control of the pollution error in the h-version of the finite element method, Int. J. Numer. Method Engrg., 38, 1995, pp4207-4235

3. Ivo. Babuska, T. Strouboulis, S.K. Gangaraj, Practical aspects of a-posteriori estimation and adaptive control of the pollution error for reliable finite element analysis, 1996, http://yoyodyne.tamu.edu/research/pollution/index.html

4. Ivo. Babuska, T. Strouboulis, S.K. Gangaraj and C.S. Upadhyay, Pollution error in the h-version of the finite element method and the local quality of the recovered derivatives, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.,140, 1997, pp1-37

5. Zienkiewicz, and J.Z.Zhu, The Superconvergent Patch Recovery and a posteriori estimators. Part1. The recovery techniques, Int. Numer. Methods Engrg., 33, 1992, pp1331-1364

6. O.C. Zienkiewicz, and J.Z.Zhu, The Superconvergent Patch Recovery and a posteriori estimators. Part2. Error estimates and adaptivity, Int. J. Numer. Methods Engrg., 33, 1992, pp1365-1382

7. O.C. Zienkiewicz, and J.Z.Zhu, The Superconvergent Patch Recovery(SPR) and adaptive finite element refinement, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. ,101 1992, pp207-224

8. O.C. Zienkiewicz, J.Z.Zhu and J. Wu, Superconvergent Patch Recovery techniques Some further tests, Comm. Numer. Methods Engrg., Vol. 9, 1993, pp251-258

9. Huges TJR, Akin. , Techniques for developing special element shape functions with particular reference to singularities. , Int. J. Numer. Meth in Engng, 45 , 1980, pp733-751

10. B.K. Karamete, T. Tokdemir and M. Ger, Unstructured grid generation and a simple triangulation algorithm for arbitrary 2-D geometries using object oriented programming, Int. J. Numer. Methods Engrg., 40, 1997, pp251-268

11. 유형선, 편수범, "Pollution 오차를 이용한 요소생성에 관한 연구", 한국철도학회 논문집, 제2권 제3호, 1999, pp46-53