

구조용 막재료의 재료 비선형성 평가기법

An Evaluation Method on the Material Nonlinearity of the Structural Membrane

한 상 을* 이 승 훈**
Han, Sang-Eul Lee, Seung-Hun

ABSTRACT

The purpose of this paper is to develop the evaluation technique to find proper elastic constants that characterize the material nonlinearity of structural membrane. The stress-strain curves of membrane material show strong nonlinearity. But generally the analysis is carried out under the assumption on material linear and geometrical nonlinear method. Because, it is very difficult to evaluate proper tangential stiffness. This paper use multi-step-linear approximation method taking the concept of effective stress for the evaluation of stiffness of membrane material, and then compare the results between linear and nonlinear analysis. Also, it shows better results than linear method

1. 서 론

막구조물에 사용되는 막재료는 그림 1과 같은 구조를 갖고 있어 강한 재료 비선형성을 보인다. 따라서 비선형성을 고려하지 않을 경우 해석상 큰 오차가 발생할 가능성이 있다. 그러므로 실제에 가까운 막 응력-변형 해석을 수행하기 위해서는 재료 비선형성과 기하 비선형성을 고려하는 것이 필요하다. 현재, 일반적으로 해석상의 어려움과 실용성 등으로 인해 막구조 해석에 이 비선형성은 고려하지 않고, 분할선에 의한 단순 선형근사를 바탕으로 하여 직교이방성 선형 탄성이론을 적용하는 실정에 있다. 이 경우 비선형 응력-변형률 곡선에 대한 선형 탄성이론의 적용은 불가피한 근사오차를 발생시키고 있다. 이 방법을 개선한 다단 선형근사법도 있으나, 다양한 응력비의 응력-변형률 곡선을 가질 경우 분할선을 결정하기 위한 기준점 결정방법 및 분할선을 사용한 재료정수의 계산 방식 등에서 임의성이 존재하는 문제가 있다. 이런 다양성 때문에 재료정수의 평가에 대한 많은 방법이 제안되었으나 좀더 실제 거동에 가까운 평가법의 도입이 필요하다. 이 연구에서는 막재료 A종에 관해 실험치의 응력-변형률 곡선을 몇 개의 구간으로 나누어 근사시킨 다단 선형근사법을 기초로, 여러 종류의 재료정수를 구하고 이것을 응력-변형 해석 수행 시 발생응력에 따라 수정하여 재료 비선형성을 고려한 해석을 수행한다.

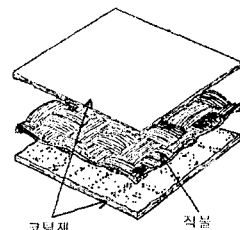


그림 1. 막재료의 구성

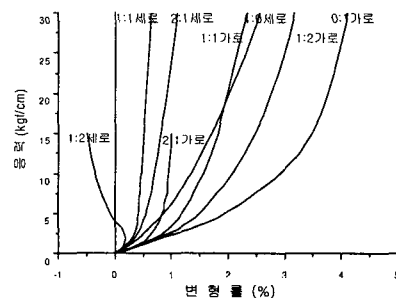


그림 2. 응력비에 따른 응력-변형률 곡선

* 정회원, 인하대학교 건축공학과, 교수

** 정회원, 인하대학교 건축공학과 대학원

2. 구조용 막재료의 재료정수 결정 방법

2.1 결정 알고리즘

막재료를 선형 이방성 탄성체라 가정하고 종사방향(warp) 인장강성을 E_1t , 횡사방향(fill) 인장강성을 E_2t , 면내 전단강성 Gt , 종사방향에 대한 포아송비를 ν_1 , 횡사방향에 대한 포아송비를 ν_2 로 표기한다.

또한, 인장강성과 포아송비 사이에는 베티(Betti)의 법칙에 의해 $\frac{E_1t}{E_2t} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$ 의 관계가 성립하는 것으로 가정한다. 종사, 횡사방향의 응력을 T_1, T_2 , 변형률을 ϵ_1, ϵ_2 로 하면 응력과 변형률의 관계는 다음 식 (1)과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= e_{11}T_1 + e_{12}T_2 & \text{여기서, } e_{11} &= \frac{1}{E_1t} & e_{22} &= \frac{1}{E_2t} \\ \epsilon_2 &= e_{21}T_1 + e_{22}T_2 & e_{12} &= e_{21} = -\frac{\nu_2}{E_2t} = -\frac{\nu_1}{E_1t} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 2축 인장시험에 의해 얻어진 응력비 [m:n]의 응력-변형률 곡선을 종사방향, 횡사방향의 각각에 관해 선형화하고, 그것에 의해 얻어지는 변형률과 식 (1)에 의해 주어진 변형률과의 차의 제곱의 합은 식 (2)와 같다.

$$S = \sum_{i=1}^n \{ (e_{11} \cdot T_{1i} + e_{12} \cdot T_{2i} - \epsilon_{1i})^2 + (e_{21} \cdot T_{1i} + e_{22} \cdot T_{2i} - \epsilon_{2i})^2 \} \quad (2)$$

식 (2)에서 정의된 S를 각 변형률에 대해 최소화 하면 식 (3)과 같다.

$$\begin{bmatrix} \sum T_{1i}^2 & \sum T_{1i}T_{2i} & 0 \\ \sum T_{1i}T_{2i} & \sum T_{1i}^2 + \sum T_{2i}^2 & \sum T_{1i}T_{2i} \\ 0 & \sum T_{1i}T_{2i} & \sum T_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1i}\epsilon_{1i} \\ T_{1i}\epsilon_{2i} + T_{2i}\epsilon_{1i} \\ T_{2i}\epsilon_{2i} \end{bmatrix} \quad (3)$$

식 (3)으로부터 미지수 e_{11}, e_{22}, e_{12} 를 구할 수 있으며, 식 (1)로부터 E_1t, E_2t, ν_1, ν_2 을 구할 수 있다. 여기에서 $e_{12} = e_{21}$ 으로 가정한다.

2.2 재료정수의 결정방법

그림 3에 나타낸 것과 같이 막면의 응력비가 [m:n] 일 때 종사방향 응력을 T_1 횡사방향 응력을 T_2 이라 하고, 그 응력상태에서의 막의 강성 $\{E\}$ 는 그림 4(a)에 나타낸 응력-변형률 곡선의 T_1, T_2 에 의한 접선기울기로써 나타낸다. $\{E\}$ 는 인장강성 E_1t, E_2t 포아송비 ν_1, ν_2 에 의하고 상반정리를 만족한다.

막의 강성 $\{E\}$ 를 구하기 위해서 그림 4(a)와 같이 곡선상의 접선기울기를 구해야 하지만, 계산상 2점을 연결하는 분할선의 기울기를 사용한다(그림 4(b)). 다만 선형근사의 마지막 단계에서, 기준응력 T_S 는 T_{S1} 과 T_{S2} 가운데 큰 쪽이 된다. 지금까지 이 기준응력 T_S 는 막면의 응력비가 어떻게 변하더라도 일정하다고 가정하였으나, 한 개의 축 방향에 응력이 작용하였을 경우에 막면에 나타나는 강성 $\{E\}$ 와 가로, 세로 각 축 방향에 응력을 작용시킨 경우에 막면에 나타나는 강성 $\{E\}$ 와는 다르며, 막면의 강성 $\{E\}$ 는 종사방향과 횡사방향의 2축 응력상태에 의해 결정된다. 결국 응력비에 의해 기준응력이 변화한다. 한편 응력비는 무한하게 존재할 수 있으므로, 막응력 변형해석에 적용하기 위해서는 응력비와 기준응력에 어떠한 관계를 부여하는 것이 필요하다.

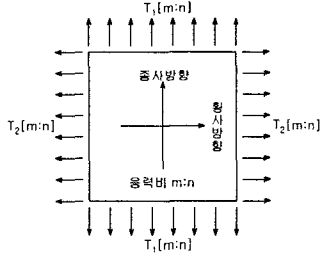


그림 3. 막면의 응력상태

막의 강성이 중사방향과 횡사방향의 2축응력 상태에 의해 결정되는 가정에서 2축응력을 단축 형태로 평가할 수 있으면, 모든 응력비에 대하여 용이하게 기준응력을 결정할 수 있다. 따라서, 금속의 항복조건등에 사용되는 등가응력의 개념을 도입하고, R-Hill⁴⁾의 이방성재료에 대한 항복조건식을 이용한다. 즉 재료정수를 구하기 위한 상대적인 기준값을 설정하기 위하여 이 개념을 이용하도록 한다.

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2(F+G+H)} [(G+H)\sigma_x^2 + (F+H)\sigma_y^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + 2N\tau_{xy}^2]} \quad (4)$$

여기에서 F, G, H, N은 재료에 따라 실험적으로 결정되는 이방성 파라미터이며, Ishii⁶⁾는 다음과 같이 가정하였다.

$$F = 1 + \alpha_o, \quad G = \alpha_o(1 + \alpha_o) \quad \alpha_o: \text{이방성 파라미터 상관계수}$$

$$H = -\alpha_o, \quad N = 0$$

$$a = \sqrt{\frac{3\alpha_o^2}{2(1 + \alpha_o + \alpha_o^2)}}, \quad b = \sqrt{\frac{3}{2(1 + \alpha_o + \alpha_o^2)}} \quad (5)$$

$$\bar{\sigma} = a\sigma_x + b\sigma_y \quad (6)$$

막의 등가응력은 중사방향 응력 T_1 과 횡사방향 응력 T_2 의 식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

\bar{T} : 막 등가응력

$$\bar{T} = \alpha T_1 + T_2 \quad (7)$$

T_1 : 중사방향 응력

T_2 : 횡사방향 응력

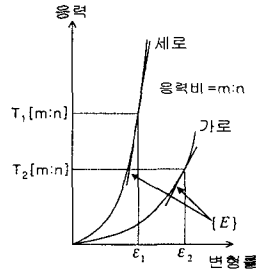
α : 등가응력 계수 ($0 \leq \alpha \leq 1$)

세로, 가로의 응력비가 [m:n] 이면 단단선형근사의 최종단계에서 분할선의 마지막 지점은 식 (7)에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

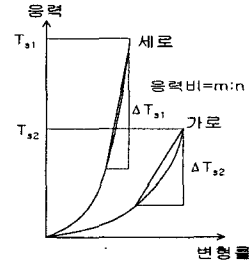
$$T_{S1} = \frac{m}{\alpha m + n} \cdot \bar{T} \quad (8)$$

$$T_{S2} = \frac{n}{\alpha m + n} \cdot \bar{T}$$

입의 응력비의 기준응력이 결정하면 식 (7)로 막 등가응력 \bar{T} 를 결정하고, 그 \bar{T} 를 사용하여 모든 응력비의 기준응력이 결정될 수 있다. 또한 다른 응력비의 대응 응력을 식 (7)과 (8)을 사용하여 구할 수 있다. 이상으로 얻어지는 각각의 선형화 구간에 최소사중법을 적용하여 해당 구간의 재료정수를 구하면, 각 응력비의 응력-변형률 관계를 연속된 꺾인 직선형태의 선형근사곡선으로 표시할 수 있다.



(a) 점선탄성계수



(b) 선형화 구간과 분할선

그림 4. 응력-변형률 곡선의 탄성계수 표현

3. 재료정수의 결정

3.1 등가응력 계수(α)의 결정

응력비 [1:0]의 종사방향 응력-변형률 곡선을 10 단계의 등구간으로 다단 선형근사하고, 기준응력 $T_s = 30 \text{ kgf/cm}$ 로 가정한다. 분할선의 연속점이 결정되면 선형근사곡선은 α 값에 의해 변화하기 때문이 α 값이 결정되어야 한다. 그림 5는 α 값이 변화하는 것에 따라 응력-변형률 곡선과 선형근사곡선의 기준응력에 대해 오차가 어느 정도 변화하는가를 나타내고 있다. 최소값은 $\alpha = 0.6$ 으로써 식 (8)에 의해 선형화 구간을 결정하면, 대체로 실험결과와 응력-변형률 곡선에 일치하는 선형 근사곡선을 얻을 수 있다.

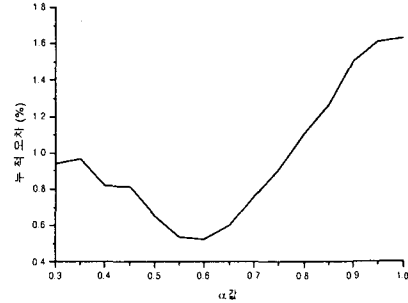


그림 5. α 값과 누적오차

한편 적정 선형화 구간수에 대해서는 실험치의 응력-변형률 곡선의 경향을 벗어나지 않는 범위에 있도록 임의로 선택할 수 있다. 편의상 선형화 구간을 10 구간으로 잡았지만, 실제 해석에서는 실험치의 응력-변형률 곡선을 가장 잘 근사하는 범위에서 계산 능률상 최소한의 구간 분할이 필요하다. 계산의 능률과 해의 정확성 유지를 고려할 때 표를 보면 5 개의 구간으로 분할 할 때부터 오차가 감소함을 알 수가 있었다. 따라서 최소한의 구간 분할을 위하여 6 구간으로 분할하였다.

표 1. 선형화 구간수와 변형율의 오차

| 분할구간수 | 누적오차 (%) |
|-------|----------|
| 5 | 0.62 |
| 10 | 0.53 |
| 15 | 0.56 |
| 20 | 0.55 |
| 30 | 0.60 |

분할방법은 연속점의 응력을 2, 6, 10, 20, 30 kgf/cm의 순서로 정하고 식 (8)에 의해 막 등가응력을 계산하여 다른 응력비의 선형화 구간을 결정하였다. 응력비[1:0], [0:1], [1:1], [1:2], [2:1]의 각각의 선형화 구간의 응력-변형률 관계에 최소자승법을 적용하여 구한 재료정수를 표 2에 나타내었다.

표 2. 6개의 구간으로 선형근사하여 구한 재료정수

| 막 등가응력(\bar{T}) $\alpha = 0.6$ (kgf/cm) | 종사방향 인장강성 (kgf/cm) | 횡사방향 인장강성 (kgf/cm) | 종사방향 포아송비 | 횡사방향 포아송비 |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------|--------------|
| 0.0~1.8 | 563 | 240 | 0.12 | 0.05 |
| 1.8~3.6 | 899 | 261 | 0.24 | 0.07 |
| 3.6~5.4 | 1258 | 446 | 0.62 | 0.22 |
| 5.4~7.2 | 1771 | 628 | 1.00 | 0.35 |
| 7.2~9.0 | 2476 | 1153 | 0.92 | 0.43 |
| 18.0~ | 4540 | 1940 | 0.77 | 0.33 |

4. 막구조물의 해석을 위한 유한요소 정식화

내력 및 외력의 평형조건식은 다음과 같다.

$$\{R(d)\} = [T]^T \int_S [B]^T \{n\} ds - \{W\} \quad (10)$$

여기서, $\{R(d)\}$: 불평형력 벡터, $[T]$: 좌표변환 매트릭스, $\{n\}$: 요소응력 벡터, $\{W\}$: 외부하중 벡터,

[B]: 변형률-변위 매트릭스이다. 식 (10)은 1개의 요소에 관해서 막장력 n_x, n_y, n_{xy} 를 그 요소의 각 절점의 절점력으로 변환한 식이고, 이것을 각 요소에 관해서 계산함으로써 전체 강성매트릭스를 구한다. 여기에서 얻은 연립방정식을 절점에 작용하는 하중 {W} 와 합하여 불평형력 벡터 {R} 이 영을 만족하는 해를 구한다. 식 (10)의 해를 찾는 것은 반복계산법에 의하지 않으면 안 되며, 이 논문에서는 뉴턴-랩슨법을 사용하였다. 식 (10)에 변분을 취하면

$$\delta\{W\} = [T]^T \int_S [B]^T \delta\{n\} ds + [T]^T \int_S \delta[B]^T \{n\} ds \quad (11)$$

여기서, $\delta\{n\} = [E][B]\delta\{d\}$ 이고, 변위 {d} 가 큰 경우, 변형률이 변위에 대해서 비선형관계를 갖게 되며, [B] 는 변위에 대한 선형부분과 대변형에 의한 비선형부분으로 나누어 생각할 수 있다.

$$[B] = [B_o] + [B_N(\{d\})] \quad (12)$$

[B_o] 는 선형 미소변위해석에 의한 것과 같은 매트릭스이고 식 (12)를 변위에 대해 변분하면 선형부분은 사라지고, 비선형 부분만 $\delta[B]^T = \delta[B_N]^T$ 로 나타나며 식 (11)에 대입하면 다음 식과 같다.

$$\delta\{W\} = [T]^T \int_S \delta[B_N]^T \{n\} ds + [T]^T \int_S [B]^T [E][B]\delta\{d\} ds \quad (13)$$

$$\delta\{W\} = [T]^T [k_E]\delta\{d\} + [T]^T [k_G]\delta\{d\} \quad (14)$$

[k_E] 는 탄성강성 매트릭스이고, [k_G] 는 기하강성 매트릭스이다.

$$[k_E] = \int_S [B]^T [E][B] ds, \quad [k_G]\delta\{d\} = \int_S \delta[B_N]^T \{n\} ds \quad (15)$$

위 식에서 변위 {d} 는 국부좌표계의 변위이므로, 전체좌표계 변위 {u} 로 변환하면

$$d\{W\} = ([K_E] + [K_G])\delta\{u\} = [K_T]\delta\{u\} \quad (16)$$

[K_T] 는 접선강성 매트릭스이다.

한편, 일반적인 구조용 막재료를 사용할 경우 막재료의 이방성을 고려해야 한다. 막재료의 종사방향, 횡사방향에 따른 재료적 성질을 고려한 이방성 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \begin{bmatrix} E_1 t & E_1 t \nu_{12} & 0 \\ E_2 t \nu_{21} & E_2 t & 0 \\ 0 & 0 & G t \cdot (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$[E] = \frac{E_2 t}{1 - \lambda \nu_{12}^2} \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \nu_{12} & 0 \\ \lambda \nu_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(1 - \lambda \nu_{12}^2) \end{bmatrix} \quad (18)$$

[E]: 응력-변형률 매트릭스, $E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}$, $\lambda = \frac{E_1}{E_2}$, $\alpha = \frac{G}{E_2}$ 이다.

여기에서 각각의 하중 증분에 대해 비선형 해를 구하게 된다. 이 논문에서 하중증분 단계에 막 등가응력 \bar{T} 를 판정 기준으로 하여 {n} 이 어떤 일정치를 넘을 때에는 [E] 를 변화시키고, 그 때마다 평형식을 구하여 이에 따라 재료 비선형성을 표현한다. 또한 모든 하중에 대한 변위는 각 하중에 대한 누적변위로써 구한다.

5. 막재료의 재료 비선형성을 고려한 수치해석

5.1 해석 모델 1 (평면 모델)

수치해석 모델로는 한 변이 100 cm인 정방형 평면 모델을 사용하였으며, 비선형 해석 알고리즘으로는 하중 증분법을 사용하였다. 재료정수를 결정하기 위하여 응력비 [1:0], [0:1], [1:1], [1:2], [2:1]의 2축 인장시험 결과를 이용하고 재료 선형 해석결과와 비교하였다. 재료 선형해석에 사용한 재료정수는 다음 표 3과 같다.

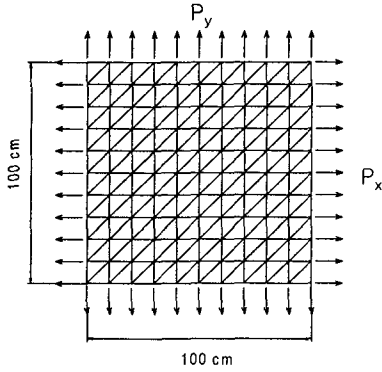


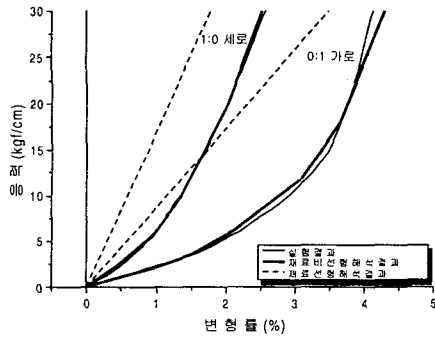
그림 6. 해석모델 1

표 3. 선형 탄성 재료정수

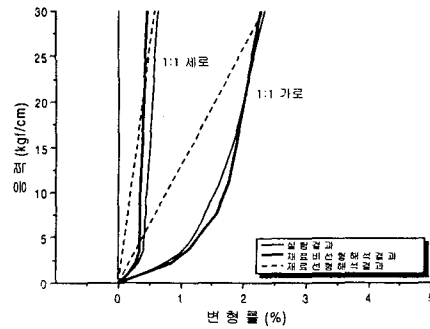
| 종사방향 인장강성 (kgf/cm) | 횡사방향 인장강성 (kgf/cm) | 종사방향 포아송비 | 횡사방향 포아송비 | 전단강성 (kgf/cm) |
|--------------------------|--------------------------|--------------|--------------|------------------|
| 1685 | 859 | 0.67 | 0.34 | 50 |

표 4. 면내전단강성

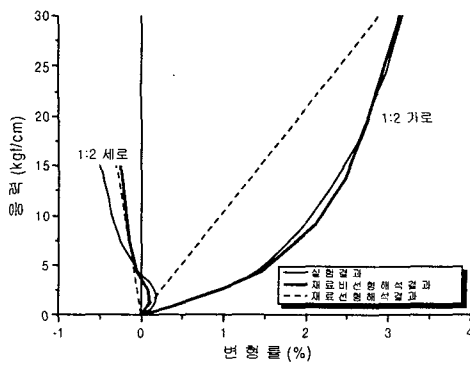
| 하중 W (kgf) | 면내전단강성(kgf/cm) |
|------------|----------------|
| 0.0~20.0 | 86.93 |
| 20.0~45.0 | 31.87 |
| 45.0~71.5 | 26.11 |



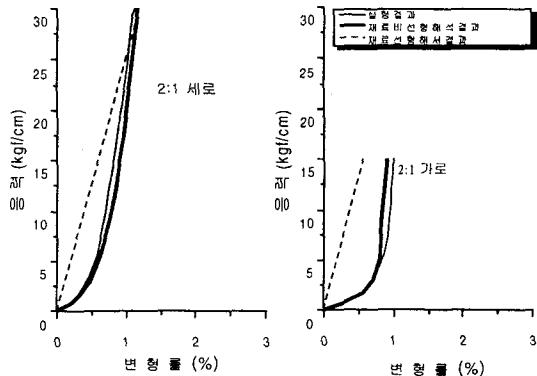
(a) 응력비 1:0, 0:1



(b) 응력비 1:1



(c) 응력비 1:2



(d) 응력비 2:1

그림 7. 재료 선형, 비선형 해석과 실험에 따른 응력-변형률 곡선의 비교

5.2 해석 모델 2 (HP형 모델)

안장형 곡면에 설하중(등분포하중) 0~300 kgf/m²을 가했을 때 최대 응력 및 중앙 처짐에 관해 재료 선형 해석과 재료 비선형 해석 결과를 비교하였다. 두 해석 모두 초기장력을 100 kgf/m로 가정하였으며 기하학적 비선형성도 고려하였다.

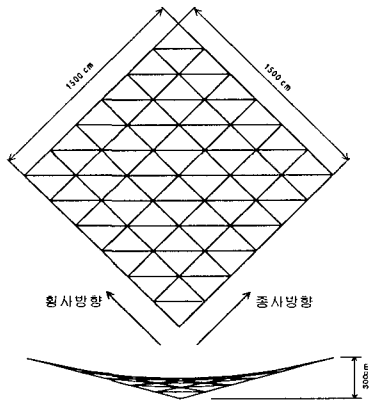


그림 8. 해석모델 2

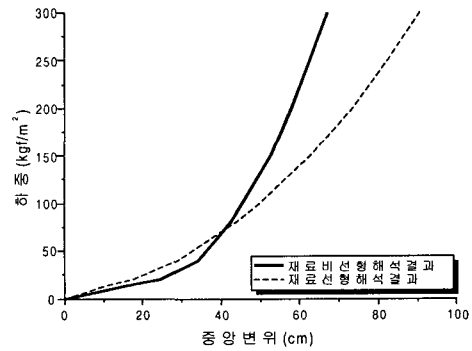
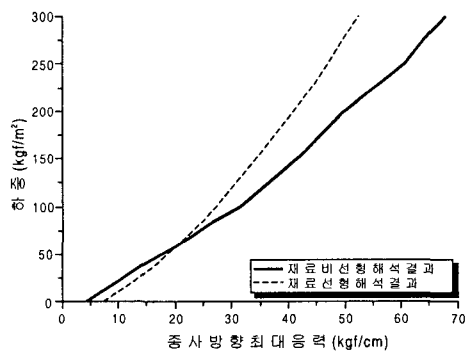
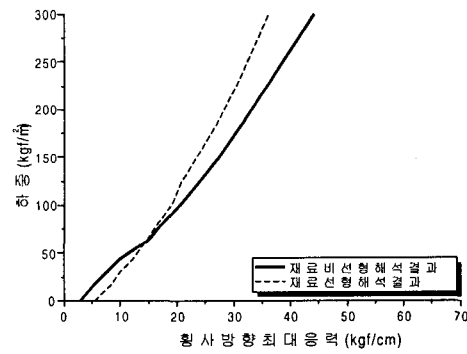


그림 9. 하중과 중앙변위의 관계

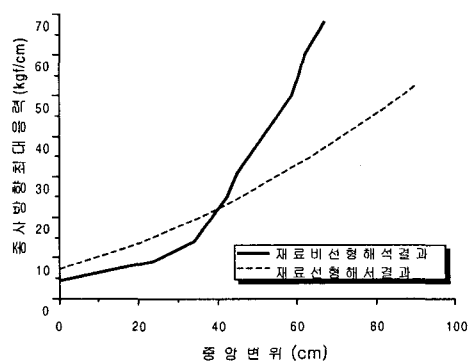


(a) 종사방향

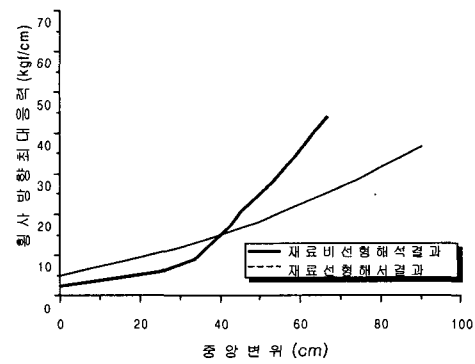


(b) 횡사방향

그림 10. 하중과 실 방향에 따른 최대 응력비교



(a) 종사방향



(b) 횡사방향

그림 11. 실방향에 따른 최대응력과 중앙변위의 관계

6. 결 론

실제 막재료는 막면의 응력상태에 따라 특유의 비선형성을 보이고 있으나, 막구조물에 대한 지금까지의 응력해석은 재료적인 측면에서 선형해석에 의존하고 있다. 이러한 해석결과는 실제 막재료의 응력상태와 큰 차이가 있다고 생각되며, 이에 대한 연구의 필요성이 꾸준히 제기되어 왔다. 이 연구에서는 실제 거동에 근접한 결과를 얻기 위한 재료정수의 평가기법에 대해 고찰하여 보았으며, 실험 결과와 비교함으로써 그 타당성을 검토하였다. 한편, 동일 모델에 대한 선형해석과 비선형해석을 통해 해석 결과의 차이점을 분석하였다. 연구를 통해 얻은 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 기준응력 30 kgf/cm 에서 선형근사의 경우 변형률에 대한 최소 오차를 보이고 있으나, 등가응력을 이용한 다단 선형근사보다는 크게 나타났다. 또한 기존의 단순 선형근사보다는 막의 2축응력에 상당하는 등가응력을 이용한 다단 선형근사를 통한 결과가 실제 실험값에 더욱 근접하고 있음을 알 수 있다.
2. 등가응력을 이용한 다단 선형근사의 선형화 구간수와 응력-변형률 곡선에 대해서, 그 누적오차가 점점 감소함을 보이다가 구간수가 일정치를 넘을 경우 오차가 다시 증가하고 있는 것으로 보아 선형화 구간수와 응력-변형률 곡선 사이에 비례관계가 성립하지 않음을 알 수 있었다. 이것은 해법이 근사해법이기 때문에 구간 수 증가에 따른 정밀도의 향상보다 누적오차의 크기가 더 커지기 때문인 것으로 생각된다. 그러므로 “등가응력을 이용한 다단 선형근사법”을 사용할 경우 최적 구간수의 고려는 반드시 필요하다고 사료된다.
3. 동일 해석모델을 통한 선형 및 비선형 해석결과를 비교할 때 비선형 해석이 실험값에 더욱 근접함을 알 수 있었다. 한편 일정 변위에 대한 응력값은 비선형 해석에 비해 선형 해석은 특정 응력값까지는 크게, 그 이후로는 작게 나타나고 있으며, 그 차이는 점점 증가함을 알 수 있다. 이는 막구조물의 응력 해석시, 막의 강성이 초기 응력단계에서는 실제 값보다는 크게 평가되며 특정 응력값을 지나서는 막의 강성이 실제보다 작게 평가될 수 있음을 나타낸다. 이것은 선형 해석 결과를 분석할 때 주의해야 할 점이라 생각된다.

참고 문헌

1. Minami, H., "On the Constitutive Equations of Coated Plain-Weaves Fabrics for the Analysis of Membrane Structures", Research Report Supported by Nomura Foundation for Promotion of Membrane Structures and Engineering, APCS, Oct. 2000.
3. Minami, H., "A Method for Membrane Material Nonlinear Stress Analysis Using a Linear Approximation", IASS International Symposium '97 Shell & Spatial Structures, Nov. 1997.
4. Hill, R., The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, 1960.
5. 石井一夫, "膜構造の應力・變形解析概説", 膜構造研究論文集, 1990年, pp.69~106.
6. (社)日本膜構造協會, (社)日本膜構造協會試驗法標準 膜材料彈性定數試驗方法(MSAJ/M-02-1995), (社)日本膜構造協會, 1995.
7. 南宏和, "コーテッド平織物の異方性伸長特性の評価と膜構造物への應用", 材料, Vol. 41, No. 460, 1991, pp.34~40.
8. 西川薫, "膜材料の剪斷特性について", 膜構造研究論文集, 1991年, pp.71~78.
9. 南宏和, 膜構造物設計における膜の彈性理論, 日刊工業新聞社, 1992.
10. 이경수, "인장구조물의 초기형상결정 및 안정화 이행과정해석", 인하대 학교 석사학위 청구논문, 2000년2월