

구성부재의 위상을 이용한 불안정 트러스 구조물의 안정화 이행과정

Analysis of Stabilizing Process for the Unstable Truss Structures using a Topology of Member Connection

권택진* 김진우** 김재열***
Kwun, Taek-Jin Kim, Jin-Woo Kim, Jae-Yeol

ABSTRACT

Cable and membrane structures can be classified as a unstable structure in the view point of shape determination process. An unstable structure at the initial state generally cannot take a role as the resistance for the external force. Therefore, there should be a stabilizing process to get the stable state of a structure and it is necessary to visualize the shape finding from unstable state to stable state.

In this paper, a numerical method of stabilizing procedure for the link structures is presented. The structures are assumed to have rigid movements and thus only changing of the topology of member is considered during the analysis. The generalized inverse matrix and the principle of minimum potential energy are used in the process. Illustrative examples are presented and the results show good convergence.

1. 서론

일반적으로 라멘구조와 같은 강성구조물은 초기에는 안정한 상태를 유지하지만, 점차 과도한 외부하중을 받게 되면 좌굴과 같이 구조적으로 불안정한 상태가 된다. 반면에, 케이블이나 막과 같은 연성구조물은 구조물 자체에 휩 강성이 존재하기 않기 때문에 초기에 불안정한 상태가 된다. 구조물이 형태불안정한 상태가 되면 「강체변위(변형도 0에서 생기는 변위)」가 생기게 된다. 다음 그림은 강체변위의 두 가지 형태를 보여준다. 이 두가지 구조물은 Maxwell의 공식¹⁾에 따르면 불안정 구조물이므로 강체변위가 생기게 된다. 이러한 강체변위로부터 안정된 형태가 되면 더 이상 강체변위는 일어나지 않는다. 즉, 불안정한 구조물이라 하

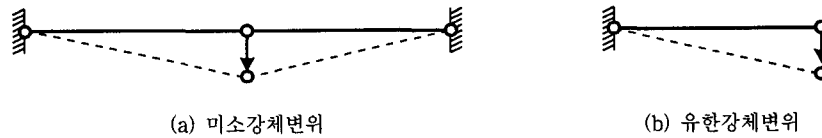


그림 1. 강체변위의 분류

* 정회원 · 성균관대학교 건축학과 교수
** 성균관대학교 건축학과 석사과정
*** 정회원 · 성균관대학교 건축학과 연구조교수

더라도 초기응력도입이나 안정화 이행단계를 통하여 안정한 구조물의 형태를 이룰 수가 있다. 이러한 구조물을 「Tensegrity(Tension + integrity(rigidity))」라고 한다. 공기막이나 케이블돔과 같은 구조물은 초기상태는 불안정하지만 내압이나 초기장력(prestress)의 도입과정을 통해 안정상태를 찾아가는 불안정 구조물이다. 불안정 구조물이 초기장력도입에 의해 안정한 상태로 이행하는 과정을 불안정 구조물의 안정화이행과정(stabilizing process)이라 하고, 안정화 이행과정을 통해 불안정 구조물의 부재강성이 결정되어 외부하중에 저항할 수 있는 안정구조물의 상태를 확보하게 된다.

본 논문에서는 불안정 구조물의 안정화 이행과정을 구조물을 구성하는 부재의 위상만을 고려하여 전개하였고, 이 과정 중에 나타나게 되는 장방형 매트릭스를 풀 수 있는 해법에 관하여 다루었다.

2. 안정화 이행과정의 정식화

2.1. 불안정 구조물의 기하학적 관계식

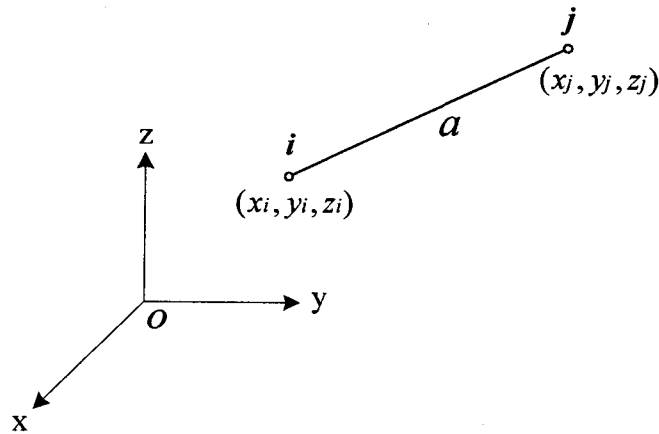


그림 2. 부재와 절점좌표

절점 (i, j) 의 좌표와 부재의 방향여현을 벡터의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_a = \begin{bmatrix} \lambda_{ij} \\ \mu_{ij} \\ \nu_{ij} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

부재 길이 l_a 는 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$l_a = [(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i)^T(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i)]^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

윗식을 이용하여 방향여현 벡터 $\boldsymbol{\lambda}_a$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\lambda}_a = \frac{1}{l_a}(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i) \quad (2.3)$$

식(2.2)를 미분하고 식(2.3)을 이용하면 다음과 같은 식(2.4)와 식(2.5)를 얻을 수가 있다.

$$\dot{l}_a = \lambda_a^T (\dot{\bar{X}}_j - \dot{\bar{X}}_i) \quad (2.4)$$

$$\dot{l}_a = \lambda_a^T (\bar{X}_j - \bar{X}_i) + \dot{\lambda}_a^T (\dot{\bar{X}}_j - \dot{\bar{X}}_i) \quad (2.5)$$

식(2.3)을 미분하면,

$$\dot{\lambda}_a = \frac{1}{l_a} (\dot{\bar{X}}_j - \dot{\bar{X}}_i) - \frac{\dot{l}_a}{l_a^2} (\bar{X}_j - \bar{X}_i) \quad (2.6)$$

식(2.4)를 매트릭스의 형태로 표현하면,

$$\begin{bmatrix} -\lambda_a^T & \lambda_a^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{X}}_i \\ \dot{\bar{X}}_j \end{bmatrix} = \dot{l}_a \quad (2.7)$$

식(2.7)을 전체부재로 확장하고 매트릭스의 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$A\dot{\bar{X}} = \dot{l} \quad (2.8)$$

자유도수를 n , 부재수를 m 이라고 하면 A 는 (m, n) 형 매트릭스이다. 식(2.8)을 시간 t 에 관해 미분하면,

$$A\ddot{\bar{X}} + \dot{A}\dot{\bar{X}} = \dot{l}, \quad \dot{A} = \dot{A}(l, \dot{\bar{X}}) \quad (2.9)$$

강체변위에서는 $\dot{l} = \ddot{l} = \mathbf{0}$ 이므로, 식(2.8)과 (2.9)는 다음과 같은 식이 된다.

$$A\dot{\bar{X}} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

$$A\ddot{\bar{X}} + \dot{A}\dot{\bar{X}} = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

2.2. 불안정 구조물의 역학적 관계식

그림 2에서 i, j 절점에 작용하는 하중을 $f_{ix}, f_{iy}, f_{iz}, f_{jx}, f_{jy}, f_{jz}$ 라고 하고, 부재력을 n_a 라고 하자. 여기서 외부하중을 벡터로 표현하면 다음과 같은 식이 된다.

$$F_{ia} = \begin{bmatrix} f_{ix} \\ f_{iy} \\ f_{iz} \end{bmatrix}, \quad F_{ja} = \begin{bmatrix} f_{jx} \\ f_{jy} \\ f_{jz} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

부재 a 의 평형식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} -\lambda_a \\ \lambda_a \end{bmatrix} n_a = \begin{bmatrix} F_{ia} \\ F_{ja} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

윗식을 구조물 전체로 확장하면 다음과 같은 식을 얻을 수가 있다.

$$A^T n = F \quad (2.14)$$

2.3. 최소 포텐셜 에너지의 원리(Principle of minimum potential energy)

불안정 구조물의 안정화 이행과정중에 안정된 상태를 찾는 기준으로써 최소 포텐셜 에너지의 원리를 도입했다.

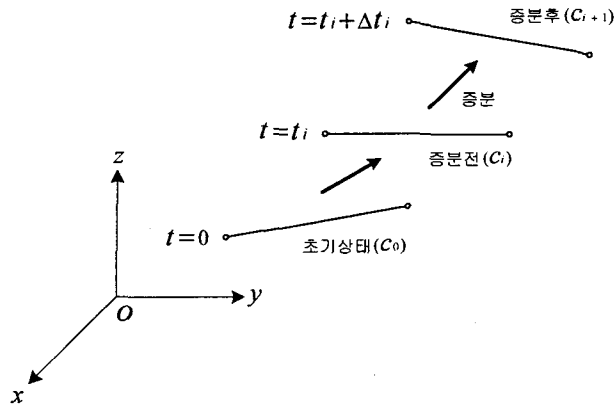


그림 3. 초기상태와 증분전후의 부재변위

그림 3에서 보는 바와 같이 C_{i+1} 상태의 변위 X_{i+1} 은 C_i 상태의 변위 X_i 에 변위 증분 ΔX_i 를 더한 결과가 된다.

$$X_{i+1} = X_i + \Delta X_i \quad (2.15)$$

여기서 ΔX_i 를 Maclaurin급수로 전개하면 다음식과 같다.

$$\Delta X_i = \bar{X}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{X}_i (\Delta t)^2 + \dots \quad (2.16)$$

본 연구에서는 식(2.16)의 우측항들 중에서 2차항까지 채택한다. 결과적으로 현재시점에서의 변위속도와 가속도를 이용하여 다음 단계의 변위를 구할 수가 있다.

다음으로, 증분변위를 가지고 각 단계마다의 포텐셜 에너지를 계산하여 이 포텐셜 에너지가 최소가 되는 시점을 찾는다. 따라서 단계가 진행될수록 포텐셜 에너지는 감소하여야 하므로 다음과 같은 식을 만족하여야 한다. 여기서 C_f 는 최종 평형형상을 의미한다.

$$\Pi(C_0) > \dots > \Pi(C_i) > \dots > \Pi(C_f) \quad (2.17)$$

포텐셜 에너지가 최소가 되는 시점은 포텐셜 에너지의 변화율이 0이 되는 시점이므로, $\Delta \Pi = 0$ 이 되는 점을 찾고 그때의 점을 정류점이라고 한다. 여기서 $\Delta \Pi$ 는 다음과 같은 식으로 구할 수 있다.

$$\Delta \Pi = -\Delta X \cdot F \quad (2.18)$$

3. 일반역행렬의 도입

식(2.10)에서 방향여현 매트릭스인 A 는 (m, n) 형 이므로, 장방형이 되어 수치적인 불안정성이 발생하게 된다. 따라서 장방형 매트릭스의 역행렬을 구할 수 있는 일반역행렬을 도입하였다.

3.1. 일반역행렬의 정의

일반역행렬은 다음과 같이 정의할 수 있다. 「 A 를 (m, n) 형 매트릭스라고 할 때, 다음의 조건을 전부 만족하는 매트릭스 A^{-} 가 A 의 일반역행렬이다.」

$$\begin{aligned} (AA^{-})^T &= AA^{-} \\ (A^{-}A)^T &= A^{-}A \\ AA^{-}A &= A \\ A^{-}AA^{-} &= A^{-} \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2. 해의 형식

$Ax = b$ 를 만족하는 해는 a 를 임의의 벡터로 하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = A^{-}b + [I_n - A^{-}A]a \tag{3.2}$$

여기서, $A^{-}b$ 를 특해(particular solution)라 하고, $(I_n - A^{-}A)a$ 를 여해(homogeneous solution)라 한다. 식(3.2)에서 임의의 a 값에 따라 무수히 많은 해가 존재하게 되고, 이것은 무수히 많은 안정화 경로를 의미한다. 본 연구에서는 식(2.10)의 A 매트릭스가 장방형이므로, 일반역행렬을 이용하여 해 \dot{X} 과 \ddot{X} 을 구하였다.

4. 예제해석 및 결과분석

4.1. 예제 구조물 I

본 예제는 절점 7개, 부재 6개로 구성된 간단한 구조물이다. 하중은 ②, ③, ④절점에 각각 단위하중 1을 주어 해석을 수행하였다.

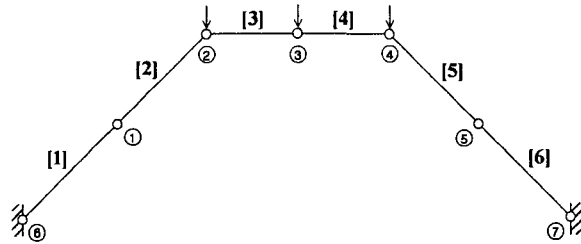


그림 4. 절점번호 및 부재번호

표 1. 해석결과

절점번호	절점좌표(초기상태)		절점좌표(최종상태)	
	x	y	x	y
1	10.000	10.000	10.258	-9.751
2	20.000	20.000	20.507	-19.498
3	30.000	20.000	30.000	-22.508
4	40.000	20.000	39.493	-19.498
5	50.000	10.000	49.742	-9.751
6	0.000	0.000	0.000	0.000
7	60.000	0.000	60.000	0.000

절점번호 및 부재번호는 그림 4와 같고, 해석결과는 표 1에 나타내었다. ΔX 의 수렴과정은 그림 5에 나타내었고, 그림 6은 포텐셜 에너지의 변화율을 나타내고 있다. 부재력의 변화, 길이의 변화, 그리고 수렴과정을 각각 그림 7, 그림 8, 그리고 그림 9에 나타내었다. 그림 6에서 보는 바와 같이, 포텐셜 에너지의 변화율은 단계가 진행할수록 0에 접근하고 최종단계에서는 0이 됨을 알 수 있다. 또한 최종단계에서 모든 부재는 인장만을 받는 요소가 되고, 전 단계에 걸쳐서 부재의 길이변화는 일어나지 않음을 알 수 있다.

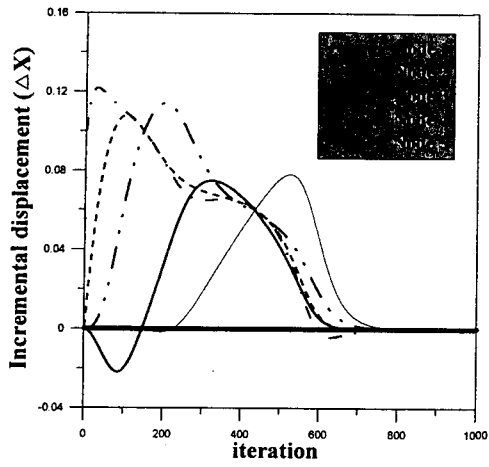


그림 5. 증분 변위(ΔX)의 수렴과정

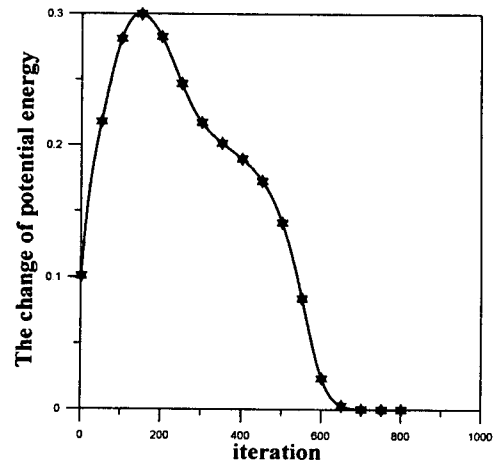


그림 6. 포텐셜 에너지의 변화율

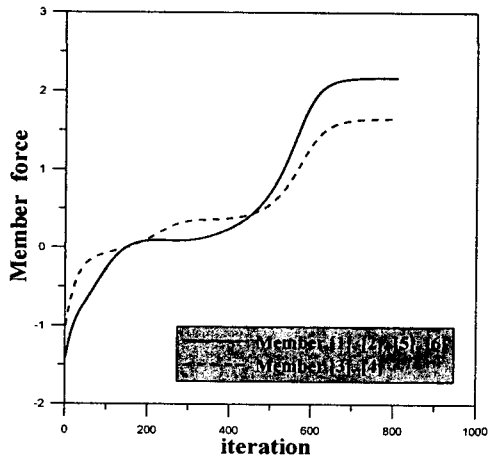


그림 7. 부재력

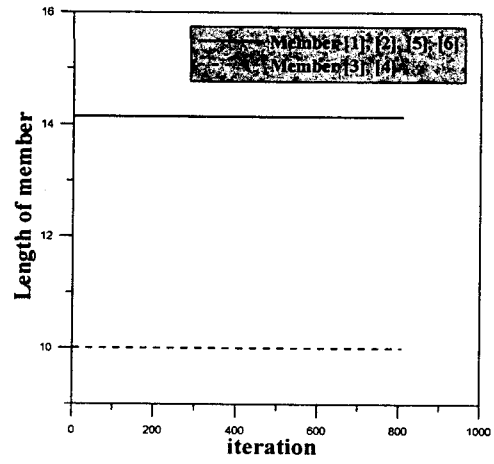


그림 8. 부재의 길이변화

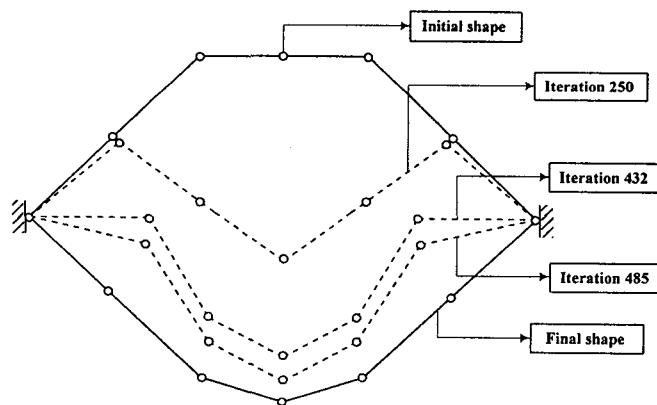


그림 9. 안정화 이행과정

4.2. 예제구조물 II

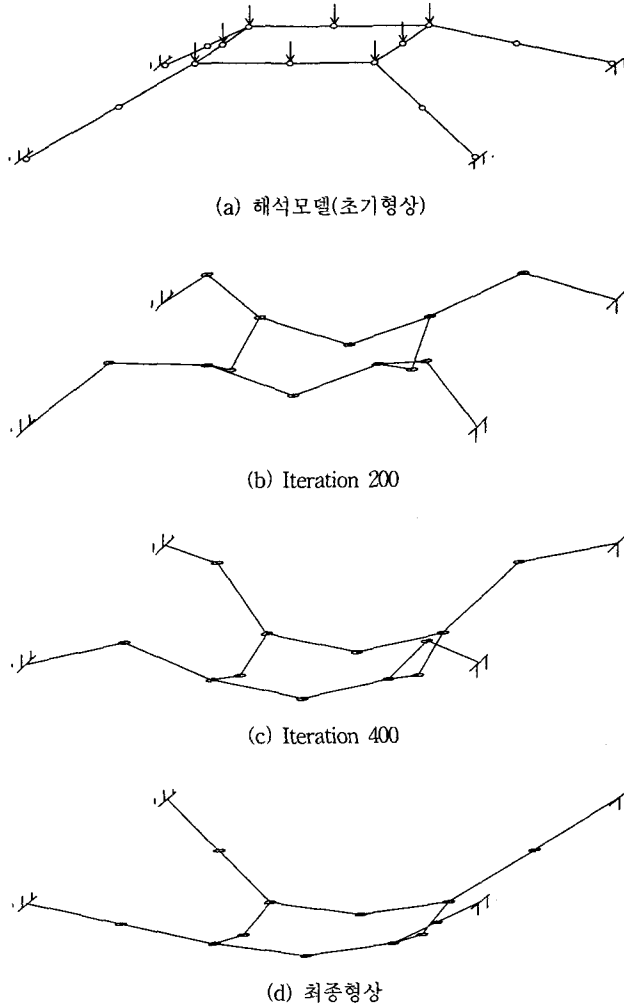


그림 10. 초기상태에서 최종상태까지의 형상변화

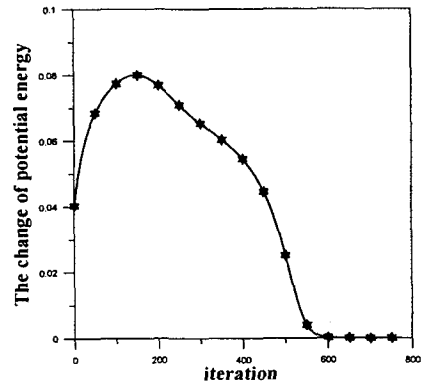


그림 11. 포텐셜 에너지의 변화율

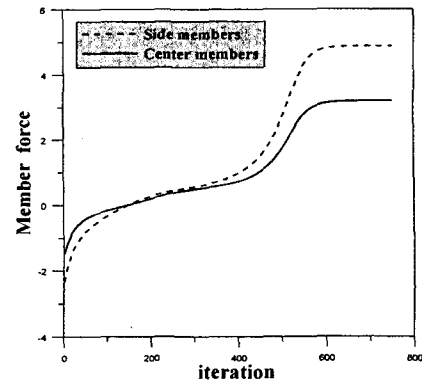


그림 12. 부재력

그림 10은 구조물이 초기 불안정 상태에서 해석 후 최종 안정된 상태까지의 형상변화과정을 나타낸 것이다. 그림 11은 포텐셜 에너지의 변화율을 나타내고 있으며, 에너지가 초기에 커지다가 점차 수렴하고 있음을 알 수 있다. 그림 12는 부재력을 나타낸 것이며, 최종적으로 모두 인장력을 받고 있다.

5. 결론

본 논문은 구성부재의 위상만을 고려한 불안정 트러스 구조물의 안정화 이행과정에 관한 형태해석법을 제시하였다. 정식화 과정에서 나타나게 되는 매트릭스의 장방형 문제를 풀 수 있는 기법으로는 일반역행렬 (Generalized Inverse)을 사용하였다. 본 논문에서 제시된 방법에 의해 형태해석을 수행한 결과는 다음과 같다.

첫째, 본 논문에 사용된 최소포텐셜 에너지 법은 불안정 구조물의 메카니즘을 에너지로 표현함으로써 최종적인 평형형상을 찾아가는데 유용하다.

둘째, 매트릭스의 수치해석 기법으로 일반역행렬을 사용함으로써 불안정 구조물의 안정화에 대한 해의 존재성을 미리 체크할 수 있으며, 다양한 경로를 통한 안정화 이행과정을 알아낼 수 있다.

셋째, 구조물을 구성하는 부재의 축력은 초기에는 인장과 압축이 공존하다가 안정화 이행해석에 의해 최종상태에서는 모두 인장만을 받는 목적 형상을 구할 수 있었다.

결론적으로, 본 논문에서 제시한 형태해석법은 불안정 구조물의 안정화 경로를 찾는 데에 매우 유용하게 쓰일 수 있으며, 더 나아가서는 신장변형을 고려한 케이블이나 막과 같은 연성구조물의 안정화 해석에도 이용이 가능하리라고 사료된다.

감사의 글

본 연구는 BK21 사업에 의하여 수행된 연구로서 본 연구를 지원해 준 교육부에 깊은 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. Maxwell, J. C., *On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames*, Philosophical Magazine, 1985, Vol. 27
2. 半谷裕彦, 川口建一, *形態解析*, 1991, pp. 21-42, 67-93
3. Tauchert, Theodore R., *Energy Principles in Structural Mechanics*, McGRAW-HILL, 1974, pp. 72-77
4. Kawaguchi, Kenichi and Hangai, Yasuhiko, "Analysis of Stabilizing Paths and Stability of Kinematically Indeterminate Frameworks," Proceedings of the Third Summer Colloquium on Shell and Spatial Structures, August 7-10, 1990
5. Tanaka, H. and Hangai, Y., "Rigid Body Displacement and Stabilization Condition of Unstable Structures," Proceedings IASS Symposium, Osaka, Vol. 2, pp. 55-62, 1986
6. 신항균, 이광연, 이상구, 천기선, *선형대수학과 응용*, 경문사, pp. 188-196, 1998
7. 한 상을, 이 경수, 이 상진, "동적이완법에 의한 불안정 구조물의 안정화 이행과정 해석에 관한 연구," 한국강구조학회 논문집, 1999, 11권 6호, pp. 591-602
8. 김 재열, 이 장복, 권 택진, "一般逆行列을 이용한 케이블네트 構造物の 形狀決定에 관한 연구," 대한건축학회 논문집, 2000.6, 16권 6호, pp. 3-12
9. Hangai, Y. and Kawaguchi, K., "Analysis for Shape-Finding of Unstable Link Structures in the Unstable State," Proceedings of the International Colloquium on Space Structures for Sports Buildings, 1987, pp. 104-111
10. Hangai, Y. and Kawaguchi, K., "Introduction of Higher Order Terms into the Analysis for Shape-Finding of Unstable Link Structures," Proceedings of IASS-MSU Symposium, Istanbul, 1988, pp. 471-478