

확장변위함수와 불연속함수를 적용한 Mesh-free 균열해석기법 A Mesh-free Crack Analysis Technique Using Enriched Approximation and Discontinuity Function

이 상 호 윤 영 철
Lee, Sang-Ho* Yoon, Young-Cheol**

ABSTRACT

In this paper, an improved Element-Free Galerkin (EFG) method is proposed by adding enrichment function to the standard EFG approximation and a discontinuity function is implemented in constructing the shape function across the crack surface. In this method, the singularity and the discontinuity of the crack are efficiently modeled by using initial node distribution to evaluate reliable stress intensity factor, though the standard EFG method requires placing additional nodes near the crack tip. The proposed method enables the initial node distribution to be kept without any additional nodal d.o.f. and expresses the asymptotic stress field near the crack tip successfully. Numerical example verifies the improvement and the effectiveness of the method.

1. 서론

요소를 이용하지 않고 절점들간의 상관관계를 이용하여 해를 찾는 Mesh-free기법 중에서 Belytschko 등이 제안한 Element-Free Galerkin(EFG)법은 특히 균열전파문제를 다양하게 다루어왔으며,⁽¹⁾ 파괴역학이론을 접목하여 균열성장문제를 정적으로 해석할 수 있는 기법⁽²⁾과 시간영역에서 동적균열전파문제를 해석할 수 있는 기법도 제안하였다.⁽³⁾

Flemming 등은 균열선단주변에서 EFG 형상함수를 부드럽게 하는 기법과 함께 이미 알려진 균열주변 변위장에 대한 closed form 해로부터 추출한 기저함수를 이용하여 EFG 근사함수와 다항기저함수를 확장할 수 있는 몇 가지 방법들을 제안하였다.⁽⁴⁾ 또한 Belytschko와 Flemming도 유사한 방법으로 EFG 근사함수를 확장하여 기존의 EFG법과 조합하는 기법을 제안하였는데⁽⁵⁾ 이 방법들은 확장된 EFG법이 기존의 확장되지 않은 EFG법에서 정확하게 잡지 못하던 균열선단의 특이성을 성공적으로 잡아낼 수 있다는 장점을 부각시켰지만, 계방정식을 구성하는 과정의 복잡성, 상당한 수준으로 추가된 자유도로 인한 계산시간의 증가, 또 해석영역 전체에 대해 확장함수를 적용해야 하는 불편함과 균열선단의 영향이 미미한 영역까지 확장함수가 적용되는 비합리성 등이 단점으로 지적될 수 있다. 또한, 최근에는 전형적인 유한요소법의 근사변위함수에 균열선단의 특이성을 표현할 수 있는 확장함수를 추가적으로 고려하여 요소망의 재구성을 최소화한 기법이 제안되

* 정회원, 연세대학교 토목공학과 부교수

** 정회원, 연세대학교 토목공학과 박사과정

있으며⁽⁷⁾, 여기에 추가적으로 균열면의 불연속성을 반영시켜 줄 수 있는 불연속함수를 추가하고 요소망의 재구성 없이도 균열전파현상을 해석할 수 있는 기법이 제안되기도 했다.⁽⁸⁾

본 연구는 확장근사함수를 이용하여 해석의 정도향상을 도모하는 동시에 확장근사함수의 적용 범위를 균열선단 주변의 부분적인 영역으로 축소하여 계산의 효율성도 확보할 수 있는 기법을 제안하고자 한다.

2. 확장변위함수와 불연속함수를 이용한 EFG 균열해석기법

2.1. 2차원 선형탄성문제를 위한 약형식

경계 $\Gamma(\Gamma=\Gamma_u \cup \Gamma_f)$ 에 의해 규정되는 2차원 영역 Ω 는 미소변위의 가정 하에서 선형탄성 구성방정식이 적용된다. 영역내의 임의의 점에서 지배방정식은 응력 σ 와 체적력 b 를 갖는 식 (1)과 같은 미분방정식 형태로 나타낼 수 있으며, 이 방정식은 식(2)와 같은 자연경계조건을 만족시켜야 한다.

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_f \quad (2)$$

여기서, 위에 첨가된 ‘·’ 기호는 미리 규정된 경계값을 나타내고, n 은 영역 Ω 에 대한 단위수직벡터이며, \bar{t} 는 경계에 작용하는 표면력이다. 지배방정식에 대한 약형식을 식 (2)와 같이 표현할 수 있다.

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T(u) : D : \varepsilon(u) d\Omega = \int_{\Omega} \delta u^T \cdot b d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta u^T \cdot \bar{t} d\Gamma \quad \forall \delta u \in \delta U \quad (3)$$

여기서, δu 는 H^1 공간의 u 와 같은 공간을 갖는 test함수이다. EFG법의 형상함수가 kronecker delta 조건을 만족시키지 못하기 때문에 필수경계조건을 완벽하게 만족시키지 못하기 때문에 약형식에 적용가능한 여러 가지 해결기법 중에서 본 연구는 penalty기법을 사용하였다.⁽⁶⁾

2.2. 이동최소제곱 근사법

2차원 문제에 대한 EFG법은 이동최소제곱에 의한 근사법, 식 (3)과 같은 지배방정식에 대한 약형식과 해석대상에 규정된 필수경계조건 그리고 재료에 대한 구성방정식을 기반으로 한다. EFG법에서 한 기점을 중심으로 이웃한 절점들을 포함하는 영향영역이라고 부르는 보간을 위한 국부영역 내에서의 근사함수 $u^h(x)$ 는 이동최소제곱법에 의해서 식 (4)와 같이 근사화될 수 있다.⁽¹⁾

$$u^h(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} = p^T(x) \cdot q \quad (4)$$

여기서, $p^T(x)$ 는 임의의 차수를 갖는 다항기저함수이고, q 는 이에 상응하는 미지의 절점변수벡터이다. 각 절점에서의 미지계수 q_i 는 가중함수가 곱해진 잔차를 최소화시키는 stationary조건을 이용해서 구하며, 결과적으로 식 (6a)와 같은 형상함수를 갖는 EFG 근사함수를 식(5)에 나타냈다.

$$u^h(x) = \sum_{l=1}^{n_N} N_l(x) d_l = N d \quad (5)$$

$$N_l(x) = \sum_j^m p_j(x) (A^{-1}(x) C(x))_{jl} \quad (6a)$$

$$A(x) = \sum_{l=1}^{n_N} w(x-x_l) p(x_l) p^T(x_l), \quad C(x) = [w(x-x_1) p(x_1), \dots, w(x-x_{n_N}) p(x_{n_N})] \quad (6b)$$

여기서, n_N 은 이동최소제곱보간에 사용된 절점의 개수이며 m 은 다항기저함수의 개수이다. 가중함수, $w(x-x_l)$ 는 이동최소제곱근사법의 필수적인 요소로써 영향영역에 포함된 절점들의 상대적인 가중치를 결정할 뿐만 아니라 형상함수의 형상을 지배하게 된다. 본 연구에서는 그림 1과 같은 compact support를 갖는 지수함수형태의 가중함수를 사용하였다. 또한, 형상함수의 계산시 $A(x)$ 행렬의 역행렬이 계산되도록 하기 위한 최소개수 이상의 절점들이 포함되어야 하는데, 영향영역의 크기는 이동최소제곱근사법에 의한 형상함수의 구성에 사용될 절점의 개수를 결정하기 때문에, 절점의 밀도에 따라 크기를 변화시킬 수 있는 원의 형태를 갖도록 하였다.

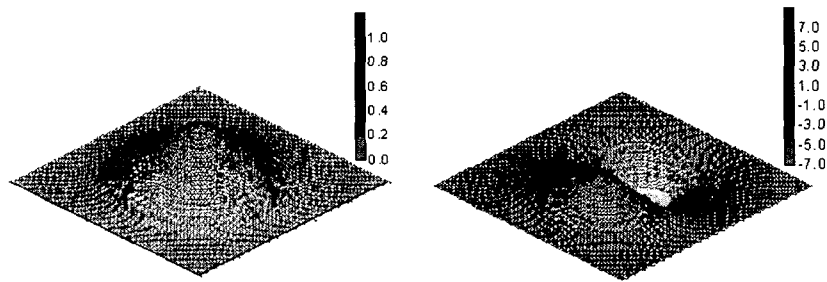


그림 1 지수함수형태의 가중함수(좌)와 미분(우)

2.3. 불연속함수

본 연구에서는 해석대상 내에 존재하는 균열면의 불연속성을 표현하기 위해 불연속함수를 이용하였는데, 균열에 의해 기준점의 영향영역이 완전히 잘리는 경우, 형상함수를 계산할 때 불연속함수를 기준으로 균열반대편의 절점들의 영향을 배제함으로써 균열의 불연속성을 표현하였다. 균열이 꺾이면서 성장할 때, 파괴역학계수를 계산하기 위해 고려하는 지점의 균열선단을 정점으로 하는 국부좌표계에 대한 각을 정의해 주어야 하는데, 본 연구에서는 단계적으로 수행되는 균열성장해석에서 매 단계마다 가장 앞선(균열선단이 포함된) 균열선분을 기준으로 이전 단계의 균열 segment들을 일직선으로 정렬하여 계산하게 된다. 꺾여진 균열과 이루는 각들을 균열 segment들의 정렬하여 일직선화 된 균열과 이루는 각들로 사상(mapping)을 하는데 이때, 그림 2와 같은 각도를 정의할 필요가 있다.

이렇게 정의된 각들을 이용하여 식 (7)과 같이 부호함수(sign function)를 정의하고 이를 이용하여 불연속함수를 정의하는데, 식 (8)과 같이 두 개의 부호함수들의 곱으로 정의하여 형상함수 계산시 영향영역 내에 포함된 절점 중에서 균열반대편에 위치하여 기준점에 영향을 주지않는 절점

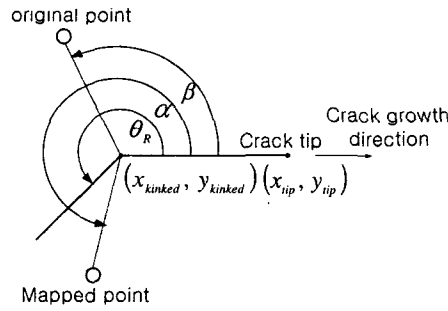


그림 2 Discontinuity function 을 이용한 불연속면 모형화

들을 배제하는 판단기준으로 사용하였다. 즉, $S(\theta)$ 가 1이면 균열면을 중심으로 기준점과 같은 편에 위치하기 때문에 형상함수의 구성에 포함시키고, $S(\theta)$ 가 -1인 경우에는 형상함수의 구성에서 제외시킨다는 의미이다.

$$G(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{for } \theta_R/\alpha \geq 1 \\ -1 & \text{for } \theta_R/\alpha < 1 \end{cases}, \quad H(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{for } \beta/\alpha \geq 1 \\ -1 & \text{for } \beta/\alpha < 1 \end{cases} \quad (7)$$

$$S(\theta) = G(\theta) \cdot H(\theta) \quad (8)$$

2.4. 확장된 근사함수와 계방정식

본 절에서는 EFG 근사함수를 확장하여 균열선단 특이성 모형화하는 한편, 불연속함수를 이용한 형상함수의 수정으로 균열면의 불연속성을 모형화하는 기법을 제안하고자 한다. 확장항을 포함하지 않는 기존의 EFG법으로는 표현할 수 없었던 균열선단의 특이성을 확장항을 식 (9)와 같이 EFG 근사함수에 추가하여 선단 주변의 절점들에 적용함으로써 표현할 수 있게 된다.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{n_N} N_l d_l + \sum_{l=1}^{n_E} \sum_{k=1}^4 N_l g_k(\mathbf{x}) a_{lk} = \mathbf{N} \mathbf{d} + \overline{\mathbf{N}} \mathbf{g} \mathbf{a} \quad (9)$$

여기서, N_l 는 기존의 EFG 형상함수이고, n_N 은 영향영역내에 포함된 이웃한 모든 절점들의 갯수이며, n_E 는 영향영역에 포함된 절점 중에서 확장된 형상함수의 계산에 고려되는 균열선단 주변의 확장이 필요한 절점들의 갯수이다. 따라서 형상함수위에 ‘-’ 기호를 첨가하여 보간에 이용되는 절점의 갯수가 다른 것을 표시하였다.

확장기저함수 $g_k(\mathbf{x})$ 는 식 (10)와 같이 정의하는데, 이 함수는 EFG 근사함수를 전체해석영역에 걸쳐 확장시키기 위해 Flemming 등이 사용하였던 형태와 같다.⁽⁴⁾⁽⁵⁾ 식 (11)에는 근사함수의 미분식의 이산화된 형태를 제시하였다.

$$g_k(\mathbf{x}) = \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad (10)$$

$$\varepsilon^h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{n_N} N_{l,i} u_l + \sum_{l=1}^{n_E} \sum_{k=1}^4 [N_{l,i} g_k(\mathbf{x}) + N_l g_{k,i}(\mathbf{x})] a_{lk} = \mathbf{B} \mathbf{d} + (\overline{\mathbf{B}} \mathbf{g} + \overline{\mathbf{N}} \mathbf{h}) \mathbf{a} \quad (11)$$

식 (10)에서 r 은 균열선단에서의 거리, θ 는 균열면에 대한 각을 나타내며, 식 (11)의 \mathbf{B} 와 \mathbf{h} 는 형상함수 N 과 확장함수 \mathbf{g} 의 미분값에 대한 행렬을 각각 나타낸다. 식 (11)을 식 (3)의 약형식에 대입하여 Galerkin 방법에 따라 이산화하여 얻은 최종적인 계방정식은 식 (12)와 같으며, 계방정식의 각 성분들은 식 (13a)~식 (13e)에 나타냈다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{III} \\ \mathbf{K}_{III}^T & \mathbf{K}_{IIkI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_I \\ \mathbf{f}_{Ik} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{K}_{II} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_I d\Omega \quad (13a)$$

$$\mathbf{K}_{III} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} (\bar{\mathbf{B}}_J \mathbf{g}_I + \bar{\mathbf{N}}_J \mathbf{h}_I) d\Omega, \quad l=1, \dots, 4 \quad (13b)$$

$$\mathbf{K}_{IIkI} = \int_{\Omega} (\mathbf{g}_k^T \bar{\mathbf{B}}_I^T + \mathbf{h}_k^T \bar{\mathbf{N}}_I^T) \mathbf{D} (\bar{\mathbf{B}}_J \mathbf{g}_I + \bar{\mathbf{N}}_J \mathbf{h}_I) d\Omega, \quad k, l=1, \dots, 4 \quad (13c)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_I} \mathbf{N}_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}_I^T \mathbf{b} d\Omega \quad (13d)$$

$$\mathbf{f}_{Ik} = \int_{\Gamma_I} \mathbf{g}_k^T \bar{\mathbf{N}}_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{g}_k^T \bar{\mathbf{N}}_I^T \mathbf{b} d\Omega, \quad k=1, \dots, 4 \quad (13e)$$

이산화과정에서 test함수와 trial함수를 같은 공간에서 같은 형태를 사용하였기 때문에 유한요소법과 마찬가지로 계방정식은 대칭조건을 유지하며, 또한 positive definite한 특성을 갖는다.

본 연구에서 확장된 EFG 근사함수와 불연속함수를 이용하지만, 해석은 기존의 EFG법과 마찬가지로 역시 절점들만을 이용한다. 그러나 기존의 방법과 달리, 균열이 자라는 동안에도 절점의 재배치나 추가-삭제의 과정을 거치지 않고 정확도 높은 해석을 수행할 수 있다는 장점이 있다. 기존의 EFG법의 균열성장 모형화 기법은 이상호와 윤영철⁽⁹⁾을 참조할 수 있다. 한편, 균열선단이 영향영역내에 포함되는 경우에는 부드러운 해를 얻기 위해 형상함수를 smoothing해주는 기법을 적용하였으며,⁽⁵⁾ 응력확대계수의 산정은 선형탄성과파를 가정하므로 J-적분을 영역적분의 형태로 변환한 M-적분기법을 이용하였다.⁽¹⁰⁾

3. 수치해석예제 (균열을 갖는 문제에 대한 patch시험)

균열문제와 같이 특이성을 갖는 문제의 검증은 일반적인 유한요소법에서 사용하는 patch시험 방법을 그대로 적용할 수 없다. 따라서 본 절에서는 이론해로 알려져 있는 모드 I에 대한 변위식⁽¹²⁾ 식 (14a)와 식(14b)를 이용하여 해석모형의 경계에 정해의 변위값을 미리 규정하고 해석을 수행하여 결과값으로 얻어지는 해석모형 내부의 응력값을 이론 응역해와 역으로 비교하는 방법을 사용하였다.

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (14a)$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (14b)$$

본 연구의 균열모형화 방법이 정확하다면 이론해로 미리 규정한 변위에 의한 해석모형 내부의 응력값은 이론 응력해와 일치할 것이다. 본 수치예제에서 균열길이는 a 이고, 균열선단은 좌표 $(1.0a, 1.0a)$ 에 위치하며, 해석모형의 가로, 세로의 길이가 각각 $2a$ 이다. 응력확대계수는 1로 미리 규정하였고 필수경계조건은 Penalty기법⁶⁾을 이용하여 만족시켜 주었다. 그림 3은 확장된 EFG법으로 계산된 균열선단 앞쪽에서의 응력 profile을 나타내는데, 이론 응력해와 거의 정확하게 일치하는 것을 알 수 있다. 그림 4에는 수치예제의 해석에 사용한 절점의 배치와 수직방향응력에 대한 contour를 도시하였는데, 기존의 standard한 EFG법과 비교하여 볼 때, 균열선단의 특이성을 훨씬 더 효과적으로 묘사해 사해 줄 뿐만 아니라 좀더 부드러운 형상의 응력분포도가 얻어 지는 것을 확인할 수 있다.

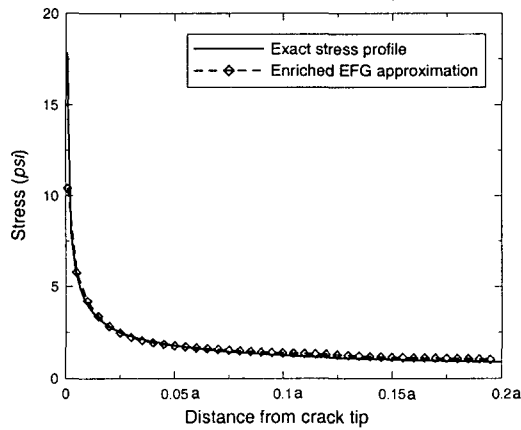


그림 3 균열선단 앞쪽의 응력분포도($\theta=0, r>0$)

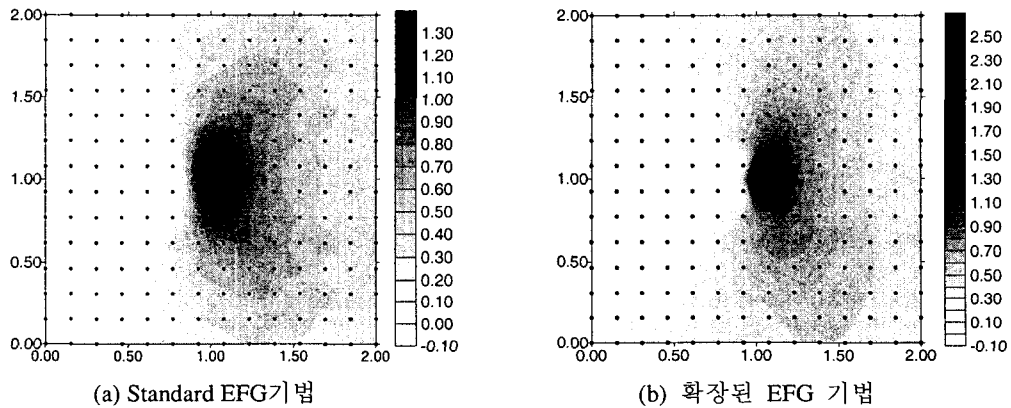


그림 4 균열선단 주변의 응력장 contour

4. 토의 및 결론

본 연구는 기존의 EFG법의 근사함수에 확장기저함수를 추가하여 균열선단의 특이성을 모형화

하고 형상함수를 구성할 때 불연속함수를 정의하여 균열면의 불연속성이 반영되도록 하는 해석기법을 제안하였다. Flemming 등⁽⁴⁾의 연구나 Belytschko와 Flemming⁽⁹⁾이 수행한 연구는 확장기저함수를 포함하지 않는 standard한 EFG법에서 균열선단 주변에 절점을 추가함으로써 균열선단의 특이성을 좀더 잘 포착할 수 있다는 것과, EFG 근사함수를 확장하거나 기저함수를 확장하는 방법에서는 균열선단 주변에서 이론해와 거의 일치하는 정도 높은 해를 얻을 수 있다는 것을 보여 주었다. 그러나 서론에서 언급하였듯이 근사함수를 확장하는 계방정식을 유도하는 과정이 복잡하여 프로그램을 개발하는 과정이 어려울 뿐만 아니라 확장함수를 해석영역 전체에 적용해야 하기 때문에 계산시간도 기존의 방법에 비해 많이 소요될 수 밖에 없는 단점을 안고 있다. 물론, 계산의 효율성을 높이기 위해 standard한 EFG법과 조합하는 방법이 제안되기도 했지만 이 과정 또한 복잡하며 조합되는 접합경계에서의 일관성을 확보해 주어야 하는 추가적인 문제가 발생한다.

그러나 본 연구에서 제안하는 방법은 우선, 계방정식을 유도하는 과정이 기존의 확장방법보다 간편하며, 또 균열선단 주변의 한정된 영역내의 절점들만을 확장된 근사함수에 적용하기 때문에 풀어야 할 계방정식의 크기가 많이 커지지 않아 기존의 확장방법에 비해 해석시 요구되는 계산시간을 줄일 수 있으며 standard한 EFG법과 비교해도 크게 늘어나지 않는다.

본 연구에서 제안한 방법에서 결론적으로 주목할 만한 사항들은 다음과 같다. 우선, 확장함수를 적용하는 절점의 갯수를 적게 하여도 상당히 정확한 해를 얻을 수 있다는 점인데, 이것은 곧 풀어야 할 계방정식의 크기를 많이 늘리지 않아도 되는 것을 의미한다. 또한, 확장된 근사함수를 이용할 때에는 가중함수의 선택이 매우 중요한데, 특히 가중함수가 얼마나 compact한 형상을 갖고 있느냐 하는 것이 관건이다. 기존의 standard한 EFG법에서는 주로 부드러운 형상의 가중함수를 사용해 왔는데, 확장된 EFG법에서는 너무 부드러운 형상의 가중함수를 사용하면 오히려 해의 정도를 떨어뜨리며 상당히 compact한 형태의 가중함수를 사용하는 것이 해석의 정도를 높여 준다. 이것은 근사함수에 추가된 확장기저함수가 균열선단의 특이성을 묘사해 줄 수 있는 고차의 함수이기 때문에 부드러운 가중함수로는 이러한 특성을 정확히 표현해주지 못하기 때문이다. 즉, 형상함수를 미분한 값들이 계산되는 응력값들의 크기를 지배하게 되는데 가중함수의 미분한 형상이 응력의 특이성을 표현할 수 있는 형상을 갖고 있어야 한다는 의미이다. 따라서 compact하지 않은 형상의 가중함수는 확장항으로 표현하는 특이성 값들을 제대로 반영시켜주지 못하게 만든다.

감사의 글

본 연구는 한국과학기술평가원(KISTEP)의 원자력기초 연구사업 연구비 지원으로 이루어졌으며 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

1. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., "Element-free Galerkin methods," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol.37, 1994, pp.229-256.

2. Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L. and Tabbara, M., "Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture," *International Journal of Solids and Structures*, vol.32, 1995, pp.2547-2570.
3. Belytschko, T. and Tabbara, M., "Dynamic fracture using element-free Galerkin Methods," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol.39, 1996, pp.923-938.
4. Flemming, M., Chu, Y. A., Moran, B. and Belytschko, T., "Enrichment Element-Free Galerkin methods for crack tip fields," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.40, 1997, pp.1483-1504.
5. Belytschko, t. and Fleming, M., "Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method," *Computer and Structures*, vol.71, 1999, pp.173-195.
6. Belytschko, t., Krongauz, D., Organ, M., Fleming, M. and Krysl, P., "An overview and recent developments," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.139, 1996, pp.3-47.
7. Belytschko, T. and Black, T., "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.45, 1999, pp.601-620.
8. Moës, N., Dolbow, J. and Belytschko, T., "A finite element method for crack growth without remeshing," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.46, 1999, pp.131-150.
9. 이상호, 윤영철, "Element-Free Galerkin 법을 이용한 혼합모드상태 균열의 균열진전해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제 12 권 제 3 호, 1999, pp.485-494.
10. Moran, B. and Shih C. F., "Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance" *Engineering Fracture Mechanics*, vol.27, 1987, pp.615-641.
11. Anderson, T. L., *Fracture Mechanics: Fundamentals and applications*, 2nd ed. CRC Press, 1995.