

Clothoid 완화곡선을 갖는 양단회전 곡선보의 자유진동

Free Vibrations of Double Hinged Curved Beams with Clothoid Transition Segment

이 병 구* · 진 태 기** · 최 규 문** · 김 선 기***

Byoung Koo Lee · Tae Ki Jin · Kou Moon Choi · Sun Gi Kim

ABSTRACT

This paper explores the free vibrations of double hinged curved beams with transition segment. In this study, the clothoid curve is chosen as the transition segment of beams. The differential equations governing free vibration of such beams are derived in which the effects of rotatory inertia and shear deformation are included. The Runge-Kutta method and Determinant Search method are used to perform the integration of differential equations and to compute natural frequencies, respectively. In numerical examples, the double hinged end constraint is considered. The lowest four natural frequencies are presented as functions of three non-dimensional system parameters: the slenderness ratio, shear parameter and stiffness parameter.

1. 서 론

현대도시는 급증하는 교통량의 원활한 흐름을 위하여 유기적인 도로망 체계를 필요로 한다. 도시지역 내에서 대용량의 도로를 건설하기 위해서는 고가도로의 건설이 필수적이다. 이러한 고가도로의 건설에서 수평 곡선의 선형을 피할 수 없다. 고가도로 건설에서 곡선구간을 직선부재를 이용하여 시공할 수도 있으나 많은 수의 하부구조를 필요로 한다. 도시지역 내에서 많은 수의 하부구조는 토지이용의 막대한 지장을 초래하며 특히 지상교통의 원활한 소통에 큰 영향을 끼친다. 따라서 도심의 고가도로 건설에는 수평 곡선보의 사용을 필요로 한다.

수평 곡선보에 차량이 통과할 때에 원활한 승차감을 유지하기 위하여 완화곡선을 삽입하여야 한다. 이제까지의 수평 곡선보에 대한 문헌^(1,2,3)을 고찰한 결과, 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구는 찾을 수 없었다. 이러한 관점에서 이 연구는 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 자유진동 특성을 규명하는데 연구목적이 있다. 이 연구에서는 완화곡선으로 크로소이드 곡선(clothoid segment)을 채택하였다.

* 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수

** 원광대학교 대학원 박사과정

*** 원광대학교 대학원 석사과정

2. 지배미분방정식

그림 1은 $x-y$ 평면 위에 놓인 곡률반경이 r 인 자유진동하는 곡선부재의 미소 요소에 작용하는 합응력을 나타내고 있다. 여기서 M , T , Q 는 부재축에 발생하는 휨 모멘트, 비틀림 모멘트, 전단력을 나타내고, F_y 는 z 방향의 연직변위 v 에 의한 관성력, C_φ 는 휨에 의한 단면회전각 Ψ 때문에 발생하는 회전 관성우력이다.

따라서 곡선부재 임의축에서 발생하는 변위는 연직변위 v , 비틀림각 ϕ , 휨에 의한 단면회전각 Ψ , 전단에 의한 단면회전각 β 이다.

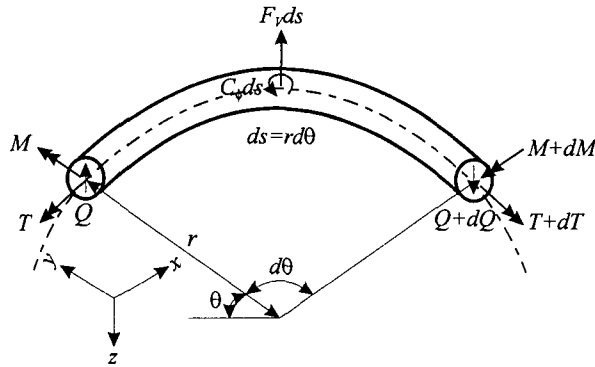


그림 1. 미소요소에 작용하는 합응력

그림 1에서 얻어지는 동적 평형방정식⁽³⁾을 이용하고 자유진동을 조화진동으로 가정하면 다음과 같이 변화곡률, 곡선부재의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식이 유도된다.

$$\eta'' = \rho^{-1} \rho' \eta' - p_i^2 \gamma^{-1} \lambda^{-2} \rho^2 \eta + \rho \Psi \quad (1)$$

$$\Psi'' = -\gamma \lambda^2 \rho \eta' + \rho^{-1} \rho' \Psi + (\gamma \lambda^2 \rho^2 + \varepsilon - p_i^2 \rho^2 \lambda^{-2}) \Psi + (1 + \varepsilon) \phi' - \rho^{-1} \rho' \phi \quad (2)$$

$$\phi'' = -(1 + \varepsilon^{-1}) \Psi + \rho^{-1} \rho' \Psi + \rho^{-1} \rho' \phi' + \varepsilon^{-1} \phi \quad (3)$$

여기서,

$$\eta = \frac{v}{l}, \quad \rho = \frac{r}{l}, \quad \lambda = \frac{l}{\sqrt{I/A}}, \quad \gamma = \frac{kG}{E} \quad (4,5,6,7)$$

$$\varepsilon = \frac{GI}{EI}, \quad p_i = \omega_i l^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}, \quad i=1, 2, 3, 4 \dots \quad (8,9)$$

위의 식들에서 l 은 지간길이, A , I , J 는 각각 단면적, 단면이차모멘트, 극관성모멘트이고 E 와 G 는 탄성계수와 전단탄성계수이다. 또한 ω 는 고유각진동수이고, m 은 부재의 단위길이당 질량이다.

회전단에서 경계조건은 다음과 같다.

$$\eta = 0, \quad \Psi = 0, \quad \phi = 0 \quad (10,11,12)$$

3. 곡선부재의 선형산정

그림 2는 완화곡선을 갖는 곡선부재의 선형을 나타낸다. 점선으로 표시된 2개의 직선구간을 연결하기 위하여 ABDE구간의 수평 곡선보를 필요로한다. 이 수평 곡선보의 구간에서 AB 및 DE 구간이 완화곡선 구간이고 DE구간이 원호구간이다. 이 그림에서 l , h 는 각각 수평 곡선보의 지간길이, 수평높이이다. Φ 는 직선부재의 경사각도 즉 완화곡선의 시점 A에서 접선각도이다. 따라서 수평 곡선보의 중심각은 이 그림에 표시된 바와 같이 $\alpha=2\Phi$ 가된다. l_c 는 A로부터 측정한 완화곡선상의 임의점까지의 곡선길이이며 l_t 는 완화곡선 구간 AB의 총 곡선길이이다. 직선부와 곡선부가 연결되는 완화곡선의 시점 A에서 곡률반경 $r=\infty$ 이며, 완화곡선의 중점 B에서 곡률반경 $r=c$ 이다. 따라서 원호곡선 DE구간에서 $r=c$ 로 일정하다. 이상의 변수들 중에서 l , h , Φ , l_t , c 는 곡선보의 조건으로부터 주어지는 값이다. l_t , c 값이 주어지면 완화곡선을 정의할 수 있으며 l , h , Φ 는 l_t , c 값에 종속되는 변수들이다. 완화곡선에는 여러 가지 선형이 있으나 본 연구에서는 크로소이드 곡선(clothoid curve)을 사용하였다. 완화곡선을 정의하기 위하여 완화곡선의 시점 A를 원점으로 하는 직교좌표계 (X, Y)를 도입하면 크로소이드 완화곡선은 다음 식과 같이 표시된다⁽⁴⁾.

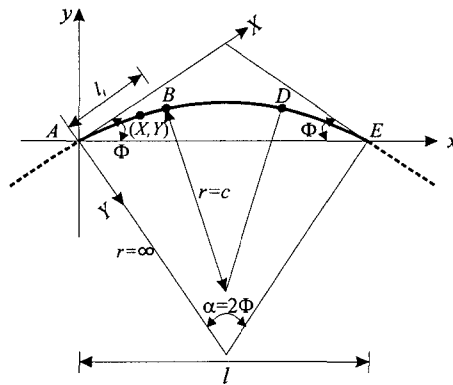


그림 2. Clothoid 완화곡선을 갖는 곡선부재의 선형

$$X = l_c \sum_{i=1}^{\infty} \left[(-1)^{i+1} \left(\frac{l_c^2}{2rl_t} \right)^{2i-1} / (2i-1)! \right], \quad 0 \leq l_c \leq l_t \quad (13)$$

$$Y = l_c + l_c \sum_{i=1}^{\infty} \left[(-1)^i \left(\frac{l_c^2}{2rl_t} \right)^{2i} / (2i-1)! \right], \quad 0 \leq l_c \leq l_t \quad (14)$$

이상에서 완화곡선이 (X, Y) 좌표계에서 정의되었으므로 이를 수평 곡선보를 정의하는 A를 원점으로 하는 직교좌표계 (x, y)에서 정의하기 위하여 다음의 좌표변환식을 이용하였다.

$$x = \cos \Phi X + \sin \Phi Y \quad (15)$$

$$y = \sin \Phi X - \cos \Phi Y \quad (16)$$

이제 완화곡선 AB 구간이 (x, y) 직교좌표계에서 정의되었으므로 원호구간 BD 구간의 선형식은 곡률반경이 r 인 원의 방정식으로 다음 식과 같이 표시된다.

$$y = \sqrt{r^2 - (x - a)^2} + b \quad (17)$$

위의 식에서 a, b 는 직교좌표계 (x, y) 에서 원의 중심의 좌표이며 (a, b) 의 좌표는 완화곡선의 종점 B 에서의 곡률중심과 일치하므로 식 (13), (14)를 이용하면 구할 수 있다. 나머지 완화곡선구간 DE 는 곡선부재의 정점에 대하여 AB 구간과 대칭이므로 정의할 수 있다.

이상에서 완화곡선을 갖는 수평 곡선보의 선형을 정의하였다. 이러한 선형으로부터 완화곡선상의 임의점 (x, y) 에서 곡률반경 r 은 다음 식으로부터 구할 수 있다⁽⁴⁾.

$$r = \frac{cl_i}{l_c} \quad (18)$$

유도된 완화곡선을 포함하는 수평 곡선보의 선형 (x, y) 및 곡률반경 r 은 모두 수평 곡선보의 지간길이 l 로 무차원화하여 무차원 직교좌표계 (ξ, δ) 및 무차원 곡률반경 ρ 를 지배미분방정식 (1), (2), (3)에 적용하였다.

지배미분방정식인 (1), (2), (3)식은 수평축과 곡률반경이 이루는 각도인 θ 에 관한 미분방정식이므로 수평 곡선보의 임의위치 (ξ, δ) 에서 θ 를 다음 식과 같이 구하여 지배미분방정식에 적용시킨다.

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{d\delta}{d\xi} \right) \quad (19)$$

식 (19)에서 θ 가 구해지면 $d\rho/d\theta$ 의 값은 식 (18), (19)를 이용하여 대수적으로 표시할 수 있으나 식이 매우 복잡하기 때문에 본 연구에서는 수치미분을 이용하였다.

4. 수치해석 결과

이상에서 유도한 지배미분방정식에 경계조건 (10)~(12)식 및 (18), (19)식을 적용시키면 완화구간을 갖는 곡선부재의 무차원 자유진동수 p_i 를 산출할 수 있다. 미분방정식의 수치적분은 곡선보의 자유진동해석에서 그 유용성이 입증된 Runge-Kutta method를 이용하였고 p_i 는 행렬값 탐사법을 이용하였다.

표 1은 본 연구의 수치해석 결과를 검증하기 위하여 본 연구와 유한요소해인 SAP 90의 p_i 값을 비교한 표이다. 이 표에서 알 수 있듯이 본 연구와 SAP 90의 무차원 고유진동수는 서로 우수하게 근접하여 본 연구 결과의 타당성을 입증할 수 있다.

표 1. 본 연구결과와 SAP 90의 p_i 값* 비교

α	자 료	무차원 고유진동수, p_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
50°	본 연구	7.76	34.45	76.61	131.3
	SAP90	8.16	35.36	76.94	131.8
100°	본 연구	3.67	24.34	58.43	103.4
	SAP90	3.72	24.38	58.39	103.5

* $\lambda=50, \gamma=0.3, \epsilon=0.4$

표 2는 완화구간을 갖는 곡선부재와 원호형 곡선만으로 되어있는 곡선부재의 p_i 값을 비교한 표이며 이 표에서 볼 수 있듯이 완화구간을 갖는 곡선부재의 p_i 값이 원호형 곡선만으로 되어있는 곡선부재의 p_i 값보다 다소 작음을 알 수 있다.

표 2. 본 연구와 원호형 부재의 p_i 값* 비교

α	자 료	무차원 고유진동수, p_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
50°	완화곡선	7.76	34.45	76.61	131.3
	원 호	7.77	34.46	76.64	131.4
100°	완화곡선	3.67	24.34	58.43	103.4
	원 호	3.94	25.21	60.40	106.8

* $\lambda=50, \gamma=0.3, \epsilon=0.4$

그림 3, 4, 5는 각각 $\lambda, \gamma, \epsilon$ 이 p_i 값에 미치는 영향을 그림에 나타낸 것이다. 이 그림들에서 $\lambda, \gamma, \epsilon$ 의 값이 커짐에 따라 무차원 고유진동수 p_i 는 수평선에 수렴함을 알 수 있다. 특히 제 1 모드의 경우에는 $\lambda, \gamma, \epsilon$ 의 변화가 p_i 값에 거의 영향을 미치지 못하고 있다.

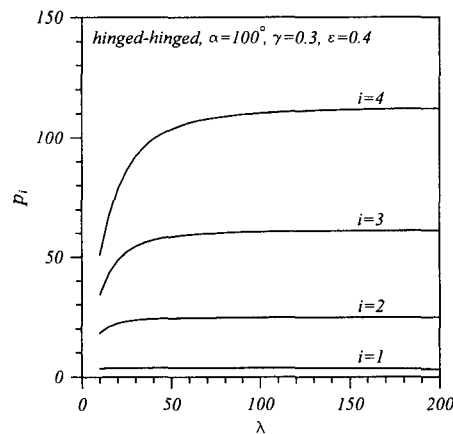


그림 3. p_i 와 λ 의 관계곡선

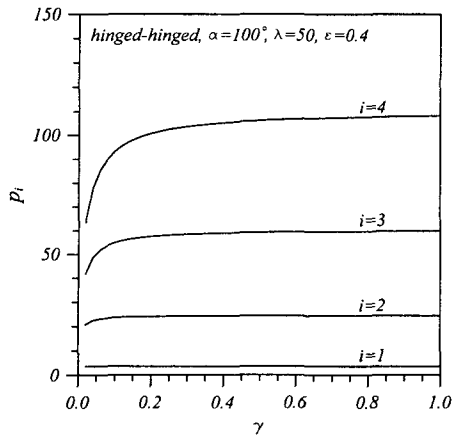


그림 4. p_i 와 γ 의 관계곡선

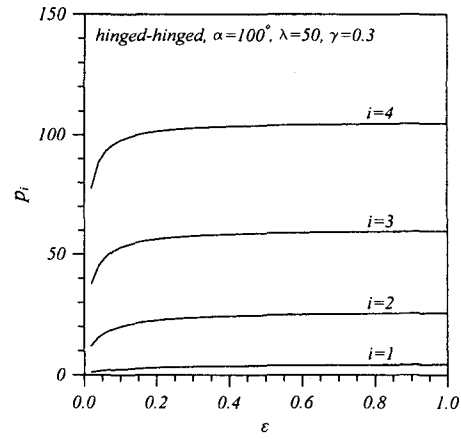
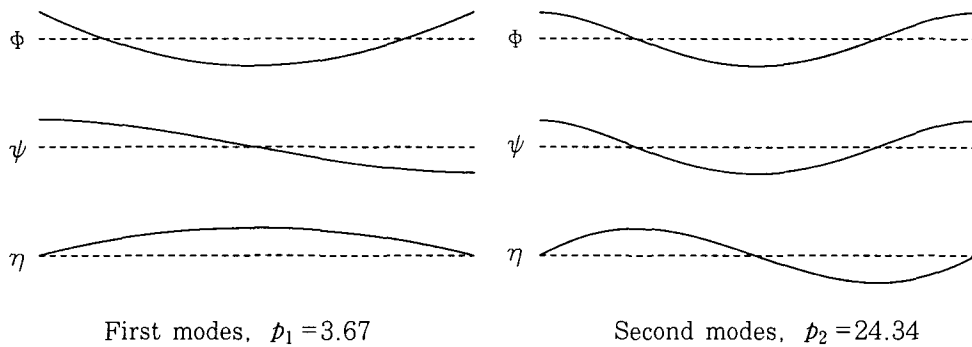


그림 5. p_i 와 ϵ 의 관계곡선

그림 6은 $\lambda=50$, $\gamma=0.3$, $\epsilon=0.4$, $\alpha=100^\circ$ 인 경우에 제1, 제2모드의 진동형을 나타낸 그림이다. 이 그림에서 보는 바와 같이 회전-회전의 단부조건인 경우에 진동형은 대칭 또는 역대칭의 형상을 나타내고 있는 것을 알 수 있다.



First modes, $p_1 = 3.67$

Second modes, $p_2 = 24.34$

그림 6. 진동형의 예 ($\alpha=100^\circ$, $\lambda=50$, $\gamma=0.3$, $\epsilon=0.4$)

5. 결론

이 논문은 완화구간을 갖는 양단회전 곡선 보의 자유진동에 관한 연구이다. 곡선보의 완화구간을 크로소이드 곡선(clothoid curve)으로 택하여 곡선보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 이 미분방정식을 Runge-Kutta method와 행렬값 탐사법으로 수치해석하여 고유진동수를 산출하였다. 실제 수치해석 예에서는 회전-회전의 단부조건에 대하여 제4 고유진동수까지 계산하였다. 본 연구 결과와 SAP 90의 결과가 잘 일치하여 본 연구결과의 타당성을 보였다. 수치해석의 결과로 무차원 고유진동수와 세장비, 전단변수 및 강성변수 사이의 관계를 고찰하였다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(과제번호:2000-1-31100-006-1)지원으로 수행된 연구결과의 일부로서, 재단당국의 연구비 지원에 감사드립니다.

참고문헌

1. Issa, M.S., "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.127, No.2, 1988, pp.291-301.
2. Lee, B.K. Mo, J.M and Lee, J.M., "Free Vibrations of Horizontally Curved Beams Resting on Winkler Type Foundation," *Proceeding of 8th International Conference on Computing in Civil and Building Engineering*, ASCE, Vol.1, 2000, pp.74-81.
3. 모정만, 변화곡률을 갖는 수평곡선보의 자유진동에 관한 연구, 원광대학교 대학원, 박사학위논문, 1998.
4. Uren, J. and Price, W.F., *Surveying for Engineers*, Macmillan Press Ltd., 1994.
5. Oh, S.J., Lee, B.K. and Lee, I.W., "Free Vibrations of Non-circular Arches with Non-uniform Cross-Section," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.37, No.36, 2000, pp.4871-4891.