연속/이산 특이치 시스템의 H_2 제어

°이 종 하*, 김 종 해**, 박 홍 배*
*경북대학교 전자전기공학부, **경북대학교 센서기술연구소
전화: 053-940-8648 / 핸드폰: 016-810-3951

H_2 Control of Continuous and Discrete Time Descriptor Systems

°Jong Ha Lee*, Jong Hae Kim**, and Hong Bae Park*
*School of Electronic and Electrical Engineering, Kyungpook National University
**Sensor Technology Research Center, Kyungpook National University
E-mail: yhaha@palgong.knu.ac.kr

Abstract

This paper presents matrix inequality conditions for H_2 optimal control of linear time-invariant descriptor systems in continuous and discrete time cases, respectively. First, the necessary and sufficient condition for H_2 control and H_2 controller design method are expressed in terms of LMIs(linear matrix inequalities) with no equality constraints in continuous time case. Next, the sufficient condition for H_2 control and H_2 controller design method are proposed by matrix inequality approach in discrete time case. A numerical example is given in each case.

I. 서론

기존의 상태공간 시스템에 대한 제어 문제에서는 특이치(singular 혹은 descriptor) 시스템에서 고려하는 동특성(dynamics)을 무시하므로, 불확실성이나 모델링 오차 등이 증가하면 임펄스(impulse)나 히스테리시스(hysterisys) 등의 물리적 현상이 발생한다. 따라서, 특이치 시스템을 다룰 경우 기존의 상태공간 시스템으로는 고려할 수 없는 물리적 현상들을 효과적으로 제어할 수 있다.

연속시간 특이치 시스템의 H_2 제어에 대해서는 활발히 연구되었다. Takaba 등[3]은 연속시간에서 H_2 상태궤환 제어기 존재조건을 제시하였으나 선형행렬부등식(linear matrix inequality)으로 해를 구하기 어려운 등식(equality)을 포함하고 있었다. Ikeda 등[1]은 등식을 포함하지 않는 선형행렬부등식으로 H_2 제어기를 설계하였으나 변수치환 과정에서 문제가 있었다. 따라서, 본 논문에서는 Ikeda 등[1]과는 다른 변수치환 방법을 이용하여 연속시간 특이치 시스템에 대한 H_2 제어기 존재조건을 선형행렬부등식으로 제시한다.

연속시간에서와는 달리 이산시간 특이치 시스템의 H_2 제어에 대한 연구는 미비하다. 따라서, 본 논문에서는 Xu 등[2]이 연구한 이산시간 특이치 시스템을 안정화시키기 위한 행렬부등식 조건을 변형하고, 이산시간 제어에 사용되는 H_2 노옴의 정의를 도입하여 이산시간 특이치 시스템의 H_2 상태궤환 제어기 존재조건을 행렬부등식으로 제시한다.

그리고 연속시간과 이산시간 특이치 시스템에 대해서 본 논문에서 제시한 H_2 상태궤환 제어기 존재조건의 타당성을 예제를 통하여 각각 확인해 본다.

"이 논문은 2000년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음"(KRF-2000-041-E00308)

II. 연속시간에서의 H_2 제어

2.1 연속시간에서의 H_2 노옴(norm) 조건

연속시간 특이치 시스템

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) \end{aligned} \tag{1}$$

을 고려한다. 여기서 $x(t)\in \mathbf{R}^n$는 상태, $w(t)\in \mathbf{R}^q$는 외부외란, $z(t)\in \mathbf{R}^p$는 제어될 출력이다. 계수행렬은 $E, A\in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B_1\in \mathbf{R}^{n\times q}$, $C_1\in \mathbf{R}^{p\times n}$이고, $rank(E)=r\le n$이다.

정의 1에서는 연속시간 특이치 시스템 (1)의 기본적인 성질들을 설명한다.

정의 1[1]: 시스템 (1)에 대해서

(i) $det(sE-A)\neq 0$ 일 때, 시스템 (1)은 레귤러(regular)하다.

(ii) $rank(E) = \deg[det(sE-A)]$를 만족하면, 시스템 (1)은 임펄스프리(impulse-free)하다. ■

시스템 (1)을 안정화시키기 위한 선형행렬부등식 조건은 보조정리 1과 같다.

보조정리 1[1]: 행렬부등식

$$A(PE^T+VSU^T)+(PE^T+VSU^T)^TA^T<0 \tag{2}$$

를 만족하는 행렬 $S\in\mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$와 양한정행렬 $P\in\mathbf{R}^{n\times n}$가 존재하면, 시스템 (1)은 안정하다. 여기서 $V, U\in\mathbf{R}^{n\times(n-r)}$은 각각 $\ker E$, $\ker E^T$의 완전열계수(full column rank)를 가지는 기저(basis) 행렬이다. ■

보조정리 2에서는 시스템 (1)에 대한 H_2 노옴 조건을 선형행렬부등식으로 제시한다.

보조정리 2[1]: 시스템 (1)에 대해서 $\ker E\subseteq\ker C_1$ 라고 가정할 때, 행렬부등식

$$A(PE^T+VSU^T)+(PE^T+VSU^T)^TA^T+B_1B_1^T<0 \tag{3}$$

$$trace(C_1PC_1^T)<\gamma^2 \tag{4}$$

를 만족하는 행렬 $S\in\mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$와 양한정행렬 $P\in\mathbf{R}^{n\times n}$가 존재하면, 시스템 (1)은 안정하고, $\| C_1(sE-A)^{-1}B_1\|_2<\gamma$를 만족한다. ■

2.2 H_2 상태궤환 제어

연속시간 특이치 시스템

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t)+B_1w(t)+B_2u(t) \\ z(t) &= C_1x(t) \end{aligned} \tag{5}$$

를 고려한다. 여기서 $x(t)\in\mathbf{R}^n$는 상태, $w(t)\in\mathbf{R}^q$는 외부외란, $u(t)\in\mathbf{R}^m$는 제어입력, $z(t)\in\mathbf{R}^p$는 제어될 출력이다. 계수행렬은 $E, A\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $B_1\in\mathbf{R}^{n\times q}$, $B_2\in\mathbf{R}^{n\times m}$, $C_1\in\mathbf{R}^{p\times n}$이고, $rank(E)=r\le n$이다.

시스템 (5)에 대해 제어입력 $u(t)=Kx(t)$ $(K\in\mathbf{R}^{m\times n})$를 고려하여 폐루프 시스템을 구성하면

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A+B_2K)x(t)+B_1w(t) \\ z(t) &= C_1x(t) \end{aligned} \tag{6}$$

과 같다.

Ikeda 등[1]은 보조정리 1, 2를 이용하여 H_2 제어기 존재조건을 제시하였으나, 변수치환 과정에서의 문제로 인하여 해를 구하기 어려웠다. 정리 1에서는 Ikeda 등[1]과는 다른 변수치환 방법을 이용하여 H_2 제어기가 존재하기 위한 필요충분조건을 선형행렬부등식으로 제시한다.

정리 1: 시스템 (6)에 대해서 $\ker E\subseteq\ker C_1$ 라고 가정할 때, 행렬부등식

$$\begin{aligned} A(PE^T+VSU^T) &+ (PE^T+VSU^T)^TA^T \\ &+ B_2F+F^TB_2^T+B_1B_1^T<0 \end{aligned} \tag{7}$$

$$trace(C_1PC_1^T)<\gamma^2 \tag{8}$$

을 만족하는 행렬 $S\in\mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$, $F\in\mathbf{R}^{m\times n}$와 양한정행렬 $P\in\mathbf{R}^{n\times n}$가 존재하면, 시스템 (6)은 안정하고, $\| C_1(sE-A)^{-1}B_1\|_2<\gamma$를 만족한다. 이 때, 제어이득은

$$K=F(PE^T+VSU^T)^{-1} \tag{9}$$

와 같다.

증명: (필요조건) 폐루프 시스템 (6)이 안정하고, $\| C_1(sE-A)^{-1}B_1\|_2<\gamma$를 만족하면, 보조정리 2로부터 행렬부등식

$$\begin{aligned} &(A+B_2K)(PE^T+VSU^T) \\ &\quad +(PE^T+VSU^T)^T(A+B_2K)^T+B_1B_1^T<0 \end{aligned} \tag{10}$$

$$trace(C_1PC_1^T)<\gamma^2 \tag{11}$$

을 만족하는 행렬 $S\in\mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$와 양한정행렬 $P\in\mathbf{R}^{n\times n}$가 존재한다. 식 (10)에서 $K(PE^T+VSU^T)$를 F로 치환함으로써 식 (7)을 얻을 수 있다.

(충분조건) 식 (7)이 만족되면, PE^T+VSU^T는 가역행렬이므로 $K\in\mathbf{R}^{m\times n}$를 구할 수 있고, 식 (7)에 $F=K(PE^T+VSU^T)$를 대입하면 식 (10)을 얻을 수 있다. 식 (10)과 (11)이 만족되면 보조정리 2로부터 폐루프 시스템 (6)은 안정하고, $\| C_1(sE-A)^{-1}B_1\|_2<\gamma$를 만족한다. ■

2.3 예제

연속시간 특이치 시스템

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}w(t)+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}u(t) \\ z(t) &= [1\ \ 0]x(t) \end{aligned} \tag{12}$$

에서 정리 1의 조건 (7)과 (8)을 만족하는 해는

$$P=\begin{bmatrix}4.4939\times10^{-12} & -2.3725\times10^{-16}\\ -2.3725\times10^{-16} & 3.4656\times10^{3}\end{bmatrix} \tag{13}$$

$$S=8.6641\times10^{3} \tag{14}$$

$$F=[\,-1.7333\times10^{3}\ \ 3.4646\times10^{3}\,] \tag{15}$$

와 같다. (13)~(15)의 해를 이용하여 제어이득을 구하면

$$K = [\ -3.8570\times 10^{14}\quad 0.3999\ ] \tag{16}$$

이고, H_2 노음의 최소값은 $\gamma = 2.9979\times 10^{-6}$ 이다.

Ⅲ. 이산시간에서의 H_2 제어

3.1 이산시간에서의 H_2 노음 조건

이산시간 특이치 시스템

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + B_1 w(k) \\ z(k) &= C_1 x(k) \end{aligned} \tag{17}$$

을 고려한다. 여기서 $x(k)\in \mathbb{R}^n$ 는 상태, $w(k)\in \mathbb{R}^q$ 는 외부외란, $z(k)\in \mathbb{R}^p$ 는 제어될 출력이다. 계수행렬은 $E, A\in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1\in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C_1\in \mathbb{R}^{p\times n}$이고, $rank(E) = r\le n$ 이다.

이산시간 특이치 시스템 (17)을 안정화시키기 위한 행렬부등식 조건은 보조정리 3과 같다.

보조정리 3[2]: 행렬부등식

$$E^T PE \ge 0 \tag{18}$$
$$A^T PA - E^T PE < 0 \tag{19}$$

를 만족하는 가역대칭행렬 $P\in \mathbb{R}^{n\times n}$ 가 존재하면, 시스템 (17)은 안정하다. ■

보조정리 4에서는 시스템 (17)에 대한 H_2 노음 조건을 행렬부등식으로 제시한다.

보조정리 4[4]: 시스템 (17)에 대해서 $range B_1 \subseteq range E$ 라고 가정할 때, 행렬부등식

$$E^T PE \ge 0 \tag{20}$$
$$A^T PA - E^T PE + E^T C_1^T C_1 E < 0 \tag{21}$$
$$trace(B_1^T P B_1) < \gamma^2 \tag{22}$$

를 만족하는 가역대칭행렬 $P\in \mathbb{R}^{n\times n}$ 가 존재하면, 시스템 (17)은 안정하고, $\| C_1(zE-A)^{-1}B_1 \|_2 < \gamma$ 를 만족한다. ■

3.2 H_2 상태궤환 제어

이산시간 특이치 시스템

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + B_1 w(k) + B_2 u(k) \\ z(k) &= C_1 x(k) \end{aligned} \tag{23}$$

을 고려한다. 여기서 $x(k)\in \mathbb{R}^n$ 는 상태, $w(k)\in \mathbb{R}^q$ 는 외부외란, $u(k)\in \mathbb{R}^m$ 는 제어입력, $z(k)\in \mathbb{R}^p$ 는 제어될 출력이다. 계수행렬은 $E, A\in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1\in \mathbb{R}^{n\times q}$, $B_2\in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C_1\in \mathbb{R}^{p\times n}$ 이고, $rank(E) = r\le n$ 이다.

시스템 (23)에서 제어입력 $u(k) = Kx(k)$ ($K\in \mathbb{R}^{m\times n}$)를 고려하여 폐루프 시스템을 구성하면

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= (A + B_2 K)x(k) + B_1 w(k) \\ z(k) &= C_1 x(k) \end{aligned} \tag{24}$$

와 같다.

보조정리 5에서는 기존에 Xu 등[2]이 제안했던 이산시간 특이치 시스템을 안정화시키기 위한 조건을 변형하여 행렬부등식으로 제시한다.

보조정리 5[2]: 시스템 (23)이 레귤러하다고 가정할 때, 행렬부등식

$$B_2^T P B_2 + X = \rho \Phi > 0 \tag{25}$$
$$E^T PE \ge 0 \tag{26}$$
$$A^T PA + (\rho - 2)A^T PB_2 \Phi^{-1} B_2^T PA - E^T PE < 0 \tag{27}$$

을 만족하는 가역대칭행렬 $P\in \mathbb{R}^{n\times n}$, 양한정행렬 $X\in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\Phi\in \mathbb{R}^{m\times m}$ 와 양수 ρ 가 존재하면, 시스템 (23)은 안정하다. 이 때, 제어이득은

$$K = -\Phi^{-1} B_2^T PA \tag{28}$$

과 같다. ■

보조정리 5의 이산시간 특이치 시스템을 안정화시키기 위한 조건에 보조정리 4의 H_2 노음 조건을 도입하여 정리 2를 제안한다.

정리 2: 시스템 (23)이 레귤러하고 $range B_1 \subseteq range E$ 를 만족한다고 가정할 때, 행렬부등식

$$B_2^T P B_2 + X = \rho \Phi > 0 \tag{29}$$
$$E^T PE \ge 0 \tag{30}$$
$$\begin{aligned} A^T PA + (\rho - 2)\ & A^T PB_2 \Phi^{-1} B_2^T PA \\ & - E^T PE + E^T C_1^T C_1 E < 0 \end{aligned} \tag{31}$$
$$trace(B_1^T P B_1) < \gamma^2 \tag{32}$$

를 만족하는 가역대칭행렬 $P\in \mathbb{R}^{n\times n}$, 양한정행렬 $X\in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\Phi\in \mathbb{R}^{m\times m}$ 와 양수 ρ 가 존재하면, 시스템 (23)은 안정하고, $\| C_1(zE-A)^{-1}B_1 \|_2 < \gamma$ 를 만족한다. 이 때, 제어이득은

$$K = -\Phi^{-1}B_2^T PA \tag{33}$$

과 같다.

증명: 식 (29)~(32)를 만족하는 가역대칭행렬 $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 양한정행렬 $X \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $\Phi \in \mathbf{R}^{m \times m}$와 양수 ρ가 존재하면, 제어이득은 식 (33)와 같고, 식 (31)은

$$\begin{aligned}&(A + B_2K)^T P(A + B_2K)\\ &= A^T[P + (\rho-2)PB_2\Phi^{-1}B_2^T P\\ &\qquad - PB_2^T\Phi^{-1}X\Phi^{-1}B_2^T P]A\\ &< A^T[P + (\rho-2)PB_2\Phi^{-1}B_2^T P]A\end{aligned} \tag{34}$$

와 같이 유도할 수 있다. 그러므로, 식 (29)~(32)를 만족하는 가역대칭행렬 $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 양한정행렬 $X \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $\Phi \in \mathbf{R}^{m \times m}$와 양수 ρ는 행렬부등식

$$(A + B_2K)^T P(A + B_2K) - E^T PE + E^T C_1^T C_1 E < 0 \tag{35}$$

를 만족한다. 식 (29), (30), (32), (35)를 만족하는 해가 존재하면 보조정리 4로부터 폐루프시스템 (24)는 안정하고, $\| C_1(zE - A)^{-1}B_1 \|_2 < \gamma$를 만족한다. ■

식 (29)~(32)를 만족하는 P, X, Φ, ρ, γ를 동시에 구하기 위해서는 새로운 알고리듬을 이용하여야 한다. 즉, 식 (29)~(32)는 볼록 최적화(convex optimization) 문제가 되지 않으므로, 최소의 해를 찾을 수 있는 최적화 알고리듬에 대한 연구가 요구된다. 그리고, $\rho > 2$ 인 경우에 식 (31)은 선형행렬부등식 형태로 바꿀 수 있다.

3.3 예제

이산시간 특이치 시스템

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(k+1) &= \begin{bmatrix}-0.1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}x(k)\\ &\quad + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}w(k) + \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u(k)\\ z(k) &= [1\ \ 2]\,x(k)\end{aligned} \tag{36}$$

에서 $\rho = 3$ 일 때, 식 (29)로부터 Φ는

$$\Phi = \frac{1}{3}(B_2^T PB_2 + X) \tag{37}$$

이 되고, 식 (31)은 슈어의 여수정리[5]를 이용하면

$$\begin{bmatrix} A^T PA - E^T PE + E^T C_1^T C_1 E & A^T PB_2\\ B_2^T PA & -\Phi\end{bmatrix} < 0 \tag{38}$$

로 표현가능하다. 따라서, 정리 2의 조건 (29), (30), (32)와 식 (38)을 만족하는 해는

$$P = \begin{bmatrix} 1.0101 & -0.0467\\ -0.0467 & -2.4675 \times 10^6\end{bmatrix} \tag{39}$$

$$\Phi = 2.6968 \times 10^7 \tag{40}$$

과 같다. (39), (40)의 해를 이용하여 제어이득을 구하면

$$K = [\,0.05 \quad -2\,] \tag{41}$$

이고, H_2 노옴의 최소값은 $\gamma = 1.0050$ 이다.

Ⅳ. 결론

본 논문에서는 연속시간과 이산시간에서의 특이치 시스템을 안정화시키고, H_2 노옴을 최소화시키는 H_2 제어기 설계 방법을 제안하였다. 연속시간에서는 기존의 등식 없는 제어기 존재조건과는 다른 변수치환 방법을 이용하여 새로운 필요충분조건을 제시하였다. 이산시간에서는 기존의 이산시간 특이치 시스템을 안정화시키기 위한 조건에 H_2 노옴 조건을 도입하여 이산시간 특이치 시스템의 H_2 제어기가 존재하기 위한 충분조건을 구하였다. 그리고 연속시간과 이산시간 각각의 경우에 대한 예제를 통해 본 논문에서 제안한 H_2 제어기 설계 방법의 타당성을 확인해 보았다.

향후 연구 과제로는 이산시간 특이치 시스템에 대하여 본 논문에서 제시한 행렬부등식 조건들을 만족하는 해를 동시에 구할 수 있는 최적화 알고리듬에 관한 연구이다.

참고문헌

[1] M. Ikeda, T. Lee, and E. Uezato, "A strict LMI condition for H_2 control of descriptor systems," *Proc. IEEE Conference Decision and Control*, vol. 1, pp. 601-604, 2000.

[2] S. Xu and C. Yang, "Stabilization of discrete-time singular systems: a matrix inequalities approach," *Automatica*, vol. 35, pp. 1613-1617, 1999.

[3] K. Takaba and T. Katayama, "Robust H_2 control of descriptor system with time-varing uncertainty," *Proc. American Control Conference*, pp. 2421-2426, 1998.

[4] V. L. Syrmos, P. Misra, and R. Aripirala, "On the discrete generalized Lyapunov equation," *Automatica*, vol. 31, pp. 297-301, 1995.

[5] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM, 1994.