

컴퓨터 연산을 통한 언어형 퍼지 제어 시스템의 새로운 안정도 해석: 1부 - 퍼지 시스템의 어핀 모델링

김은태, 박순형*, 박민용*
 국립한경대학교 제어계측공학과
 연세대학교 전기전자공학과*

A new computational approach to stability analysis of linguistic fuzzy control systems - Part 1: Affine modeling of fuzzy system

Abstract

In recent years, many studies regarding the modeling of fuzzy system have been conducted. In this paper, a new computational approach to modeling of linguistic fuzzy system is proposed. The fuzzy system is modeled as a combination of affine systems. The proposed method can be used in a rigorous stability analysis of fuzzy system including the linguistic fuzzy controller.

그러나 아직 Mamdani가 처음 사용했던 형태의 언어형 퍼지 시스템이나 그 변형인 싱글톤 퍼지 시스템의 안정도에 대한 연구는 거의 진행되고 있지 않은 것이 사실이다. 이는 언어형 퍼지 제어기가 설계는 용이하지만 인간의 언어로 표현되어 있기 때문에 수식적 표현이 어렵기 때문이다.

이러한 언어형 퍼지 제어시스템의 엄정한 안정도 해석을 위해서는 우선 퍼지 제어기의 수식적 모델링이 필요하다. 본 논문에서는 컴퓨터 연산을 통한 새로운 방식의 퍼지 제어기의 모델링 방법을 제안한다. 본 퍼지 제어기의 모델링은 이차 계획법 (Quadratic Programming, QP)을 이용하여 수치적으로 이루어지며 언어형 퍼지 제어 시스템의 안정도 해석의 준비 단계로 볼 수 있다.

I. 서론

지난 10년간 퍼지 논리는 공학 및 자연과학 분야에 있어 중요한 연구 분야로 대두되었고 특히 제어 분야에서는 모델이 불확실한 경우나 언어적 제어가 가능한 분야를 중심으로 기존의 제어를 대체하는 방식으로 각광을 받고 있다.

그러나 실제적 응용의 예와 달리 이론 분야에서는 아직도 많은 문제가 남아있다. 퍼지 제어기의 안정도에 대한 해석은 이 같은 문제 중 가장 대표적이고 중요한 문제로 퍼지 제어기의 안정도에 대하여 지금까지 보고된 결과는 크게 다음의 두 종류로 나눌 수 있다.

(i) TS (Takagi and Sugeno-type) 퍼지 제어기의 안정도 해석

(ii) 적응 퍼지 제어기

전자의 경우, Tanaka [1, 2]등은 TS 퍼지 제어기의 안정도에 대하여 많은 연구 결과를 보고하였고, 최근에는 여러 다른 제어 학자들이 비슷한 문제를 다루게 되었다. 후자의 경우, Wang이 적응 퍼지 제어기의 안정도를 해석[3]하였고 이의 응용 가능성을 제시하였다.

II. 언어형 퍼지 시스템

본 장에서는 편의상 2-입력 1-출력의 퍼지 제어기를 생각한다.

$$R^{nm} : \text{If } x_1 \text{ is } A_1^n \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^m \text{ then } u \text{ is } u^{nm} \quad (1)$$

($n=1, \dots, p$ 이고 $m=1, \dots, q$).

이때 싱글톤 퍼지화기와 추론의 T논을 이용하면 퍼지 추론의 결과는 다음의 식 (2)으로 주어진다.

$$u = Fuz(x) = Fuz(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left\{ \frac{A_1^i(x_1)A_2^j(x_2)}{\sum_r \sum_s A_1^r(x_1)A_2^s(x_2)} \right\} u^{ij} \quad (2)$$

$$= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \Pi^{ij}(x_1, x_2) u^{ij}$$

여기서 $\Pi^{ij}(x_1, x_2) = \frac{A_1^i(x_1)A_2^j(x_2)}{\sum_r \sum_s A_1^r(x_1)A_2^s(x_2)}$ 는 퍼지 기

저함수이다. 안정도 해석을 용이하게 하기 위하여 전건부 소속함수는 그림 1과 같은 비모순적 삼각형 함수를 이용하도록 한다.

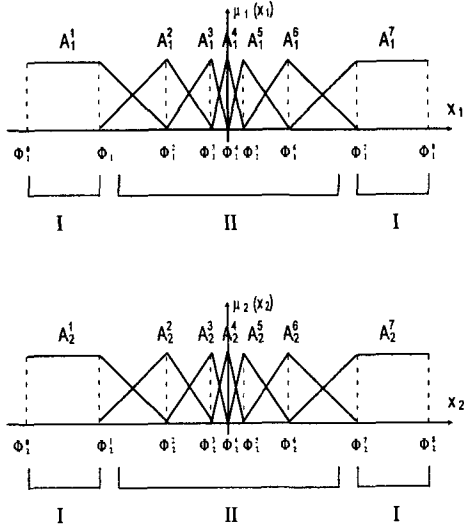


그림 1. 비모순적 삼각형 함수

그림 1의 전건부 함수는 입력 영역을 여러 개의 작은 영역으로 분할하며, 이 때 각 영역은 다음의 식으로 표시된다.

$$\Omega^{nm} \equiv \{x = (x_1, x_2) | \phi_1^n \leq x_1 \leq \phi_1^{n+1}, \phi_2^m \leq x_2 \leq \phi_2^{m+1}\} \quad (3)$$

($n=0, \dots, p, m=0, \dots, q$)

이제 내부 영역 Ω^{nm} 에서는 4개의 규칙만이 활성화 되며 기저함수의 분모는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^4 \sum_{s=1}^4 A_1^r(x_1) A_2^s(x_2) \\ &= A_1^n(x_1) A_2^m(x_2) + A_1^n(x_1) A_2^{m+1}(x_2) \\ &+ A_1^{n+1}(x_1) A_2^m(x_2) + A_1^{n+1}(x_1) A_2^{m+1}(x_2) = 1. \end{aligned}$$

이때 퍼지 기저함수는 $\Pi^j(x_1, x_2) = A_1^i(x_1) A_2^j(x_2)$ 이고 그 출력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u = Fuz(x_1, x_2) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \Pi^i(x_1, x_2) u^i = \\ & A_1^n(x_1) A_2^m(x_2) u^{nm} + A_1^n(x_1) A_2^{m+1}(x_2) u^{n(m+1)} \\ &+ A_1^{n+1}(x_1) A_2^m(x_2) u^{(n+1)m} \\ &+ A_1^{n+1}(x_1) A_2^{m+1}(x_2) u^{(n+1)(m+1)} \end{aligned}$$

편의상 원점을 제어 시스템의 평형점으로 가정한다.

III. 언어형 퍼지시스템의 어핀 모델링

본 논문에서는 식 (1)로 표현되는 언어형 퍼지 시스템을 다음의 어핀 시스템의 결합으로 모델링한다. 이는 언어형 퍼지 시스템을 TS 퍼지 시스템으로 변환하는 것으로 생각할 수도 있다. 임의의 영역 Ω^{nm} ($n=0, \dots, p, m=0, \dots, q$)에 대하여 퍼지 제어기는 다음의 식으로 표현된다:

$$Fuz(x_1, x_2) = C_{12}^{nm} x_1 x_2 + C_1^{nm} x_1 + C_2^{nm} x_2 + C_0^{nm} \quad (4)$$

여기서 $C_{12}^{nm}, C_1^{nm}, C_2^{nm}, C_0^{nm}$ 의 자세한 값은 지면관계 상 생략한다. 식(4)의 식을 다음과 같이 어핀 시스템으로 유계 (bound)한다.

$$\begin{aligned} & \underline{k}_1^{nm} x_1 + \underline{k}_2^{nm} x_2 + \underline{k}_0^{nm} \leq \\ & Fuz(x_1, x_2) = C_{12}^{nm} x_1 x_2 + C_1^{nm} x_1 + C_2^{nm} x_2 + C_0^{nm} \\ & \leq \overline{k}_1^{nm} x_1 + \overline{k}_2^{nm} x_2 + \overline{k}_0^{nm} \end{aligned} \quad (5)$$

위의 $\underline{k}_1^{nm}, \underline{k}_2^{nm}, \underline{k}_0^{nm}, \overline{k}_1^{nm}, \overline{k}_2^{nm}, \overline{k}_0^{nm}$ 을 구하는 문제는 다음의 $\overline{\Gamma}^{nm}, \underline{\Gamma}^{nm}$ 을 구하는 문제와 같다.

$$\begin{aligned} & \overline{\Gamma}^{nm} = (\overline{\gamma}_1^{nm} \overline{\gamma}_2^{nm} \overline{\gamma}_\mu^{nm})^T \\ & \underline{\Gamma}^{nm} = (\underline{\gamma}_1^{nm} \underline{\gamma}_2^{nm} \underline{\gamma}_\mu^{nm})^T \\ & \underline{\gamma}_1^{nm} x_1 + \underline{\gamma}_2^{nm} x_2 + \underline{\gamma}_\mu^{nm} \leq \\ & C_{12}^{nm} x_1 x_2 \\ & \leq \overline{\gamma}_1^{nm} x_1 + \overline{\gamma}_2^{nm} x_2 + \overline{\gamma}_\mu^{nm} \end{aligned} \quad (6)$$

for $\forall (x_1, x_2) \in \Omega^{nm}$.

퍼지 시스템의 어핀 상한 유계를 위하여 다음의 만족하는 최적의 $\overline{\Gamma}^{nm}$ 를 검색한다.

(i) $\phi_1^n \leq \forall x_1 \leq \phi_1^{n+1}, \phi_2^m \leq \forall x_2 \leq \phi_2^{m+1}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} & \overline{f}^{nm}(x_1, x_2) \equiv \\ & (\overline{\gamma}_1^{nm} x_1 + \overline{\gamma}_2^{nm} x_2 + \overline{\gamma}_\mu^{nm}) - C_{12}^{nm} x_1 x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

(ii) 다음의 오차를 최소화한다.

$$\begin{aligned} & \overline{\Gamma}_{opt}^{nm} = \arg \min \overline{F}^{nm}(\overline{\Gamma}^{nm}) \\ & = \arg \min \frac{1}{2} \int_{x_2=\phi_2^m}^{\phi_2^{m+1}} \int_{x_1=\phi_1^n}^{\phi_1^{n+1}} \{ \overline{f}^{nm}(x_1, x_2) \}^2 dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\overline{F}^{nm}(\overline{\Gamma}^{nm})$

$$= \frac{1}{2} \int_{x_2=\phi_2^{n+1}}^{\phi_2^n} \int_{x_1=\phi_1^n}^{\phi_1^{n+1}} \{ \bar{F}^{nm}(x_1, x_2) \}^2 dx_1 dx_2$$

위의 최적화 문제는 다음의 2차 계획법의 문제로 바꿀 수 있다.

$$\bar{\Gamma}_{opt}^{nm} = \arg \min \frac{1}{2} (\bar{\Gamma}^{nm})^T \bar{H}^{nm} \bar{\Gamma}^{nm} + (\bar{C}^{nm})^T \bar{\Gamma}^{nm}$$

subject to $\bar{A}^{nm} \bar{\Gamma}^{nm} \leq \bar{b}^{nm}$.

여기서

$$\bar{A}^{nm} = \begin{pmatrix} -\phi_1^n & -\phi_2^m & -1 \\ -\phi_1^n & -\phi_2^{m+1} & -1 \\ -\phi_1^{n+1} & -\phi_2^m & -1 \\ -\phi_1^{n+1} & -\phi_2^{m+1} & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Gamma}^{nm} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_\mu \end{pmatrix}$$

$$\bar{b}^{nm} = \begin{pmatrix} -C_{12}^{nm} \phi_1^n \phi_2^m \\ -C_{12}^{nm} \phi_1^n \phi_2^{m+1} \\ -C_{12}^{nm} \phi_1^{n+1} \phi_2^m \\ -C_{12}^{nm} \phi_1^{n+1} \phi_2^{m+1} \end{pmatrix}$$

같은 방법으로 하한 유계는 다음의 최적화 문제로 해결할 수 있다.

$$\underline{\Gamma}_{opt}^{nm} = \arg \min \frac{1}{2} (\underline{\Gamma}^{nm})^T \underline{H}^{nm} \underline{\Gamma}^{nm} + (\underline{C}^{nm})^T \underline{\Gamma}^{nm}$$

subject to $\underline{A}^{nm} \underline{\Gamma}^{nm} \leq \underline{b}^{nm}$.

여기서 $\bar{F}^{nm}(\cdot, \cdot) = E^{nm}(\cdot, \cdot)$.

IV. 모의실험

본 장에서는 다음의 퍼지 시스템에 대한 컴퓨터 연산을 통한 어핀 모델링을 수행한다. 퍼지 시스템은 표 1과 같고 전건부, 후건부 파라미터는 표 2, 3과 같다.

표 1. 퍼지 제어기의 규칙

	x_1	NB1	NS1	ZR1	PS1	PB1
x_2						
PB2		U_{ZR}				
PS2		U_{NS}	U_{ZR}			
ZR2		U_{NB}	U_{NS}	U_{ZR}		
NS2		U_{NS}	U_{NB}	U_{NS}	U_{ZR}	
NB2		U_{NB}	U_{NS}	U_{NB}	U_{NS}	U_{ZR}

표 2. 퍼지 제어기의 전건부

x_1	C_{NB1}	C_{NS1}	C_{ZR1}	C_{PS1}	C_{PB1}
	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
x_2	C_{NB2}	C_{NS2}	C_{ZR2}	C_{PS2}	C_{PB2}
	10	5	0	5	10

표 3. 퍼지 제어기의 후건부

u	U_{NB}	U_{NS}	U_{ZR}	U_{PS}	U_{PB}
	-3000	-2500	-1000	-300	0
				300	1000
					2500
					3000

다음은 위의 퍼지 시스템에 대한 모델링 결과를 그래프로 표시한 것이다. 그림 2는 퍼지 시스템을 나타내며 그림 3은 상한 어핀 시스템을, 그림 4는 하한 어핀 시스템을 나타낸다. 표 4는 어핀 시스템 파라미터의 실제 값이다.

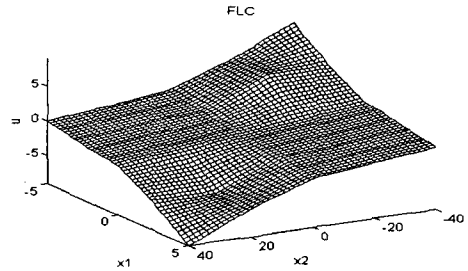


그림 2. 퍼지제어기

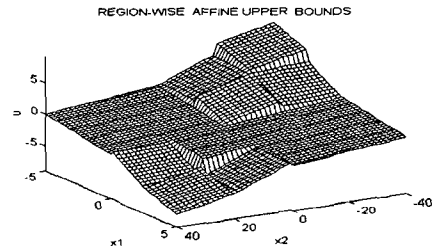


그림 3. 어핀시스템에 의한 상한유계

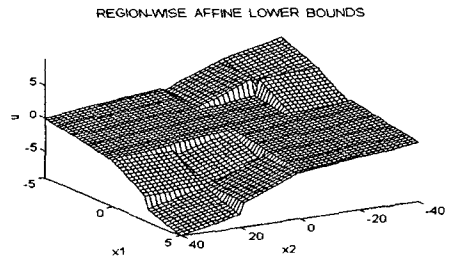


그림 3. 어핀시스템에 의한 하한유계

V. 결론

본 논문에서는 언어형 퍼지 시스템을 어핀시스템의 결합으로 모델링하는 수치적인 알고리즘을 제안하였다. 본 논문에서 제안한 방법은 퍼지 시스템을 수식으로 표현하는 것을 가능하게 하는 방식으로 퍼지 안정도 해석 등에 쓰일 수 있다.

이 논문은 2000년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음. (KRF-2000-2000-003-E00359)

참고문헌

[1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*, vol. 15, No. 1, pp116-132, 1985.
 [2] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, 136-156, 1992
 [3] L. -X. Wang, *A Course in Fuzzy Systems and Control*, NJ: Prentice-Hall, 1997.

표 4. 어핀 시스템의 파라미터

Region	Upper bound			lower bound			Region	Upper bound			lower bound		
	\bar{k}_1	\bar{k}_2	$\bar{\mu}$	\underline{k}_1	\underline{k}_2	$\underline{\mu}$		\bar{k}_1	\bar{k}_2	$\bar{\mu}$	\underline{k}_1	\underline{k}_2	$\underline{\mu}$
(1,1)	-0.800	-0.100	1.000	-0.800	-0.100	-1.000	(3,1)	-0.400	-0.050	0	-0.400	-0.050	0
(1,2)	-0.200	-0.175	1.000	-0.200	-0.175	0.500	(3,2)	-0.400	-0.050	0	-0.400	-0.050	0
(1,3)	-0.400	-0.050	0.000	-0.400	-0.050	0	(3,3)	-0.400	-0.050	0	-1.000	-0.125	0
(1,4)	-0.400	-0.050	0	-0.400	-0.050	0	(3,4)	-1.400	-0.025	-0.500	-1.400	-0.025	-1.000
(2,1)	-1.400	-0.025	1.000	-1.400	-0.025	0.500	(4,1)	-0.400	-0.050	0	-0.400	-0.050	0
(2,2)	-1.000	-0.125	0	-0.400	-0.050	0	(4,2)	-0.400	-0.050	0	-0.400	-0.050	0
(2,3)	-0.400	-0.050	0	-0.400	-0.050	0	(4,3)	-0.200	-0.175	-0.500	-0.200	-0.175	-1.000
(2,4)	-0.400	-0.050	0	-0.400	-0.050	0	(4,4)	-0.800	-0.100	1.000	-0.800	-0.100	-1.000