

# 지그재그 삼각형 유한요소를 이용한 복합재료판의 Damping 해석

이 덕규\*

## Damping Analysis of Composite Plates with Zig-Zag Triangular Element

Deogyu Lee

KEY WORDS : Damping, Zig-Zag theory, Interdependent Kinematics, Triangular Element

### ABSTRACT

A three node flat triangular element incorporating Layerwise Zig-Zag Theory(HZZT) is developed suitable for analyzing damped laminated composite structures. Using an interdependent kinematic relation, the higher order shear rotations are replaced by in-plane displacements, a transverse displacement and section rotations, which result in three translations and two rotations. Natural frequencies and modal loss factors of cantilevered laminated plates with embedded damping layers are calculated with the zig-zag triangular element and compared to the experimental results and MSC/NASTRAN results using a layered combination of plate and solid elements.

#### 기호설명

$[\bar{C}]$ : 탄성계수

$[\bar{\eta}]$ : 감쇠계수

$\chi$ : 고유모드

$[M]$ : 질량행렬

$[K]$ : 강성행렬

$[K_d]$ : Damped 강성행렬

#### 1. 서론

점탄성물질을 복합재료 구조물에 접합하여 심는 방법은 피로에 민감한 진동을 감소시키는데 효과적이다. 접합된 점탄성물질은 진동중 전단변형을 통하여 에너지를 발산하므로 두께방향으로 각 층의 기계적특성, 층의 두께, 감쇠계수가 급격히 변하는 적층 복합재료 구조물의 거동을 정확히 예

측할수 있는 층이론의 개발이 필요하다.

Saravanos[1]는 불연속 층이론을 이용하여 점탄성층을 갖는 복합재료판을 해석하였는데 불연속 층이론은 복합재료를 구성하는 각층이 독립된 변형장을 갖으나 두께방향으로 연속이며 도함수는 불연속이다. 불연속 층이론의 자유도 갯수는 두께방향으로의 소분의 갯수에 따라 늘어남으로 점탄성물질이 접합된 적층구조물의 응력분포를 정확히 계산하는데는 많은 계산량을 필요로 한다.

Di Sciuva[2]는 고차원 지그재그 이론을 유도하고 3 절점 적합(Conforming)삼각형 요소를 개발하였는데 자유도의 갯수는 10 개로 이는 2 개의 평면변위, 2 개의 전단변위, 횡변위 그리고 단면회전과 곡률변위이다. 이요소를 이용하여 복합재료판의 굽힘과 자유진동을 해석하였다. Cho 와 Parmeter[3]는 고차원 지그재그이론과 Specht[4]가 제안한 보간법을 이용하여 패치테스트를 통과하는 비적합(Nonconforming) 삼각형 요소를 개발하였는데 자유도의 갯수는 5 개로 이는 2 개의 전단변위, 횡변위 그리고 2 개의 단면회전이다.

본연구에서는 지그재그 이론과 기하학적상관식

\* BK 21 박사후 연구원 기계항공공학과 서울대학교

그리고 Specht[4]가 제안한 보간법을 이용하여 패치테스트를 통과하는 비적합 3 절점 삼각형 요소를 개발하였다. 전단변위는 기하학적상관식을 이용 소거되어 자유도의 갯수는 5 개로 이는 2 개의 평면변위, 횡변위 그리고 2 개의 단면회전변위이다. 이 삼각형요소를 이용하여 점탄성물질이 심어진 복합재료판의 자유진동을 해석하여 고유진동수와 감쇠계수를 계산하였고 실험치 및 MSC/NASTRAN 모델과 비교하였다.

## 2. 이론전개

### 2.1 Zig-Zag 변형장

다층으로 구성된 판의  $k$  층의 지그재그 변위는 다음과 같이 정의된다([5] 참조),

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + h_{11}^{(k)} \phi_x + h_{12}^{(k)} \phi_y, \\ v^{(k)} &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + h_{21}^{(k)} \phi_x + h_{22}^{(k)} \phi_y, \\ w^{(k)} &= w_0 \end{aligned} \quad (1)$$

위식에서  $u_0, v_0$  는 평면변위이고,  $w_0$  는 횡변위이며  $\phi_x, \phi_y$  는 전단변위이다.  $h_{11}^{(k)}, h_{12}^{(k)}, h_{21}^{(k)}, h_{22}^{(k)}$  는  $k$  층의 물질의 특성을 나타내는 함수로 참고문헌 [5] 에 자세히 정리되어 있다.

### 2.2 기하학적상관식

복합재료 적층구조물이 중심면에 대하여 상하 대칭으로 구성되었다면 평면변위에 탄성계수를 곱하여 두께방향으로 적분한 값을 0 으로 놓아 전단변위를 평면변위, 횡변위 그리고 단면회전변위로 다음과 같이 치환하였다,

$$\begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_x^1 & c_x^3 & c_x^2 & -c_x^4 \\ c_y^1 & -c_y^3 & -c_y^2 & c_y^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

위식에서  $c_x^1, c_x^2, c_x^3, c_x^4, c_y^1, c_y^2, c_y^3, c_y^4$  는 다음과 같이 정의된다,

$$\begin{aligned} c_x^1 &= \frac{A_{11}Q_{24}}{D_e}, & c_x^2 &= \frac{B_{11}Q_{24}}{D_e}, & c_x^3 &= \frac{A_{22}Q_{24}}{D_e}, & c_x^4 &= \frac{B_{22}Q_{24}}{D_e}, \\ c_y^1 &= \frac{A_{11}Q_{23}}{D_e}, & c_y^2 &= \frac{B_{11}Q_{23}}{D_e}, & c_y^3 &= \frac{A_{22}Q_{23}}{D_e}, & c_y^4 &= \frac{B_{22}Q_{23}}{D_e}, \\ D_e &= Q_{11}Q_{24} - Q_{12}Q_{23} \end{aligned} \quad (3)$$

위식에서  $(A, B, Q)$  는 참고문헌 [5]에 자세히 정리되어 있다.

### 2.3 구성방정식

평면응력상태를 가정한 점탄성물질의 복소수 형태의 이방성 구성방정식은 다음과 같이 정의된다,

$$\{\sigma\}^{(i)} = \left( [\bar{C}]^{(i)} + i[\bar{C}]^{(i)}[\bar{\eta}]^{(i)} \right) \{e\}^{(i)} \quad (4)$$

### 2.4.3 절점 삼각형 유한요소

3 절점 삼각형 요소를 지그재그 이론 및 기하학적상관식을 이용하여 개발하였는데 평면변위  $(u_0, v_0)$  는 선형으로 보간되며 횡변위  $(w_0)$  는 Specht[4]의 방법에 의하여 보간된다. 개발된 삼각형 요소는 비적합 이지만 패치테스트를 통과하며 각절점당 자유도의 갯수는 5 개이며 이는  $(u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y)$  인데 여기서  $\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y}, \theta_y = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$  로 정의된다.

### 2.5 지배방정식 및 Damping 해석

Hamilton 의 원리를 이용하여 지배방정식을 다음과 같이 유도하였다,

$$[M]\{\ddot{d}\} + ([K] + i[K_c])\{d\} = \{0\} \quad (5)$$

부공간반복법을 이용하여 식(5)의 자유진동을 해석하여 모달변형에너지법으로 모드의 감쇠계수  $(\eta_n)$  를 다음과 같이 구하였다,

$$\eta_n = \frac{\{x_n\}^T [K_p] \{x_n\}}{\{x_n\}^T [K] \{x_n\}} \quad (6)$$

## 3. 수치해석

### 3.1 점탄성물질이 심어진 복합재료 적층판의 자유진동

3 절점 지그재그 삼각형요소를 이용하여 점탄성 물질이 코어에 심어진 적층판의 고유진동수와 감쇠계수를 계산하고 실험치 및 MSC/NASTRAN 모델과 비교하였다. NASTRAN 모델에서 복합재료 판은 삼각형요소(CTRIA)로 모델되고 점탄성 코어는 고체요소(CPENTA)로 모델되었다. 복합재료판은 Graphite/Epoxy 로 구성되었고 탄성계수는 다음과 같다,

$$E_t = 2 \times 10^7 \text{ psi}, E_r = 1.4 \times 10^6 \text{ psi}, G_{tr} = 8 \times 10^4 \text{ psi}$$

$$G_{rr} = 5 \times 10^5 \text{ psi}, \nu_{tr} = 0.3, \rho = 0.0567 \text{ lb/in}^3$$

$$h_{ps} = 0.0025 \text{ inch}$$

코어의 점탄성물질로 3M ISD113 가 사용되었는데 전단계수와 감쇠계수는 68°F 에서 계산도표를 읽어 구하고 밀도는  $\rho_{ISD113} = 0.035 \text{ lb/in}^3$  이다. 그림 1 과 2 는 Damped 복합재료판의 구성과 치수를 보여준다. 표 1 은 지그재그 삼각형요소와 NASTRAN 의 유한요소 모델링을 보여주는데 지그재그 요소가 NASTRAN 에비하여 3 배나 적은 요소를 2 배나 적은 절점과 자유도를 사용한다. 판의 가장자리에서 엽렬현상을 방지하기 위하여 경계요소를 점탄성물질의 가장자리에 사용하였다.

표 2 에서 5 의 결과로부터 지그재그 요소와 NASTRAN 은 복합재료판의 고유진동수를 실험치에 비해 정확히 예측하나 지그재그 요소가 감쇠계수를 NASTRAN 에 비해 더정확히 예측하는데 이는 지그재그 요소가 점탄성물질 코어의 층방향 전단변위를 정확히 예측하기 때문이다. 섬유배열각도가 15° 일때의 굽힘진동수와 감쇠계수가 섬유배열각도 45° 일때보다 크지만 섬유배열각도 45° 의 비틀림진동수와 감쇠계수는 섬유배열각도 15° 일때보다 큰데 이유는 섬유배열각도 45° 일때 비틀림 탄성계수가 최대치 이기 때문이다.

#### 4. 결론

지그재그 이론과 기하학적상관식을 이용하여 3 절점 삼각형요소를 개발하여 점탄성물질이 섞어진 복합재료판의 고유진동수와 감쇠계수를 계산하고 실험치및 MSC/NASTRAN 모델과 비교한 결과 3 배나 적은요소와 2 배나 적은 절점과 자유도로 감쇠계수를 NASTRAN 보다 정확히 예측하였다.

#### 후 기

이 논문은 2001 년도 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었음.

#### 참고문헌

[1] D. A. Saravanos and J. M. Pereira, Effects of Interply Damping Layers on the Dynamic Characteristics of Composite Plates, *AIAA journal*, 30, 2906-2913(1992).

[2] M. Di Sciuva, A Third-Order Triangular Multilayered Plate Finite Element with Continuous Interlaminar Stresses, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, 1-26 (1995).

[3] M. Cho and R. R. Parmerter, Finite Element for Composite Plate Bending Based on Efficient Higher Order Theory, *AIAA Journal*, 32, 2241-2248 (1994).

[4] B. Specht, Modified Shape Functions for the Three-Node Plate Bending Element Passing the Patch Test, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, 705-715 (1988).

[5] D. G. Lee and J. B. Kosmatka, Passively Damped Vibration of Composite Plates with Zig-Zag Elements, The 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, April 3-6, 2000. Paper No. AIAA-2000-1473.

	Present (THZ3R)	NASTRAN (CTRIA/CPENTA)
Elements	156	468
Nodes	98	196
D.O.F	588	1176

표 1. 유한요소 모델링.

	$\omega(\text{Hz})$			$\eta$		
	Exp	Pre	NAS	Exp	Pre	NAS
1B	28.4	30.4 (1.1)	30.4 (1.1)	0.014	0.022 (1.6)	0.041 (2.9)
1T	92.5	95.9 (1.0)	92.2 (1.0)	0.017	0.023 (1.4)	0.035 (2.1)
2B	163.5	166.9 (1.0)	167.6 (1.0)	0.059	0.088 (1.5)	0.099 (1.7)

표 2. 외팔보 지지 Damped 판의 고유진동수및 감쇠계수  $[0^\circ, \pm 15^\circ, 0^\circ]$  [[ISD113 - 0° GE]]  $[0^\circ, \pm 15^\circ, 0^\circ]$ .

	$\omega(\text{Hz})$			$\eta$		
	Exp	Pre	NAS	Exp	Pre	NAS
1B	28.0	30.4 (1.1)	30.4 (1.1)	0.018	0.022 (1.2)	0.041 (2.3)
1T	83.2	95.9 (1.2)	92.2 (1.1)	0.022	0.022 (1.0)	0.034 (1.6)
2B	163.7	166.8 (1.0)	167.5 (1.0)	0.063	0.088 (1.4)	0.099 (1.6)

표 3. 외팔보 지지 Damped 판의 고유진동수및 감쇠계수  $[0^\circ, \pm 15^\circ, 0^\circ]$  [[ISD113 - 90° GE]]  $[0^\circ, \pm 15^\circ, 0^\circ]$ .

	$\omega$ (Hz)			$\eta$		
	Exp	Pre	NAS	Exp	Pre	NAS
1B	24.8	26.6 (1.1)	26.5 (1.1)	0.008	0.01 (1.3)	0.029 (3.6)
1T	124.6	125.2 (1.0)	118.8 (1.0)	0.015	0.026 (1.7)	0.041 (2.7)
2B	147.9	154.3 (1.0)	153.1 (1.0)	0.037	0.049 (1.3)	0.063 (1.7)

표 4. 외팔보 지지 Damped 판의 고유진동수 및 감쇠계수  $[0^\circ / \pm 45^\circ / 0^\circ]$  [ISD113 -  $0^\circ$  GE]  $[0^\circ / \pm 45^\circ / 0^\circ]$ .

	$\omega$ (Hz)			$\eta$		
	Exp	Pre	NAS	Exp	Pre	NAS
1B	24.4	26.6 (1.1)	26.5 (1.1)	0.007	0.01 (1.4)	0.029 (4.1)
1T	128.2	125.2 (1.0)	118.8 (0.9)	0.012	0.026 (2.2)	0.044 (3.7)
2B	145.3	154.2 (1.1)	153.0 (1.1)	0.05	0.049 (1.0)	0.063 (1.3)

표 5. 외팔보 지지 Damped 판의 고유진동수 및 감쇠계수  $[0^\circ / \pm 45^\circ / 0^\circ]$  [ISD113 -  $90^\circ$  GE]  $[0^\circ / \pm 45^\circ / 0^\circ]$ .

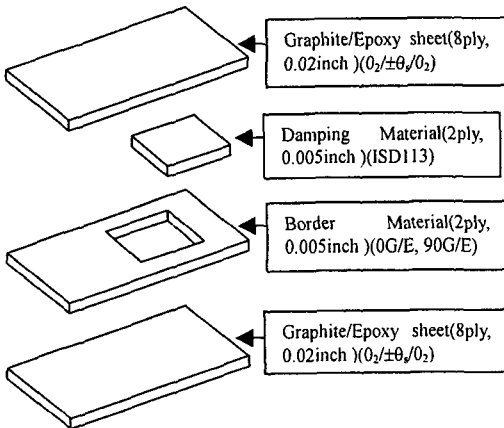


그림 1. Damped 복합재료 판의 구성.

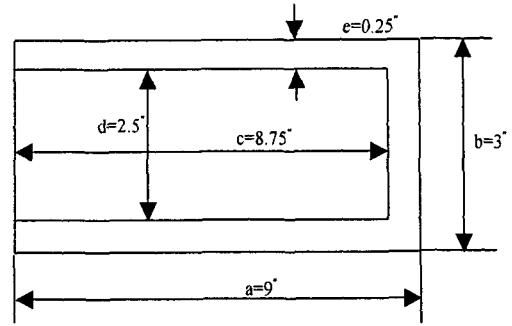


그림 2. 점탄성 코어층의 치수.

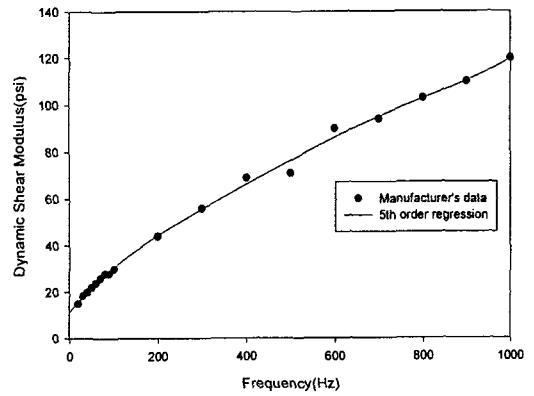


그림 3. 3M ISD113 점탄성물질의 전단계수.

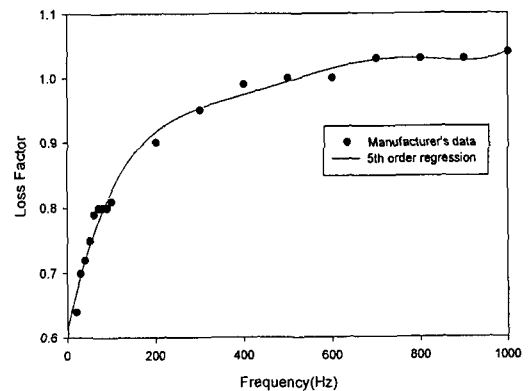


그림 4. 3M ISD113 점탄성물질의 감쇠계수.