# 직교이방성 등변앵글부재의 탄성좌굴

김정곤* · 윤순종**

# Elastic Buckling Behavior of Orthotropic Equal-leg Angle Members

Kim, J. G. · Yoon, S. J.

Key Words: pultrusion, equal-leg angle, local buckling, flexural-torsional buckling

**Abstract**

This paper presents an analytical investigation pertaining to the elastic buckling behavior of pultruded fiber reinforced plastic equal-leg angle members under concentric axial compression. The elastic local and global buckling (flexural, torsional, and flexural-torsional) analyses are conducted, respectively, and the analytical results are compared with the existing experimental results. The differences were more than 10%, and the experimental results were higher than the analytical results.

## 1. 서 론

복합재료는 그동안 산업전반에서 다양하게 사용되어져 왔으며 최근에는 건설분야에서도 점차 사용이 증가되고 있는 추세이다. 특히 복합재료가 갖는 다양한 장점들, 즉, 기존의 건설재료(강재, 콘크리트 등)에 비하여 단위중량당 강도 및 강성이 크고, 비자성, 내화학성 등의 성질 때문에 복합재료는 특수한 기능이 요구되는 구조물의 건설 등에 유리하게 사용될 수 있다. 또한, 최근 건설구조용 복합재는 Pultrusion 공정 등을 통해 대량생산이 가능하기 때문에 경제성도 우수하다고 할 수 있다.

일반적으로 구조용 박판부재가 압축력을 받을 경우 단면의 형태 및 부재의 치수에 따라 좌굴이 발생한다. 압축부재의 좌굴은 크게 국부좌굴과 전체좌굴로 구분되는데 부재의 세장비가 작은 경우 국부좌굴이 발생하며, 이는 부재를 구성하는 판요소의 폭과 두께의 비에 영향을 받는다. 또한 부재의 세장비가 큰 경우

* 홍익대학교 대학원 석사과정
** 홍익대학교 토목공학과 교수

발생하는 전체좌굴은 단변형태(개방단면, 폐단면) 및 도심(C.G.)과 전단중심(S.C.)의 일치여부에 따라 영향을 받는다. 단면이 개방단면인 경우 폐단면인 경우보다 비틀림강성이 작으므로 비틀림이 발생하기 쉽기 때문에 등변앵글과 같이 도심과 전단중심이 일치하지 않는 부재의 좌굴강도는 비틀림으로 인한 영향도 검토해야 한다(Timoshenko, 1961).

본 논문은 Pultrusion공정을 통해 생산된 등변앵글단면 부재의 탄성좌굴거동에 대한 것이며, 직교이방성 등변앵글부재의 좌굴해석을 크게 국부좌굴 및 전체좌굴로 구분하여 수행하였다. 국부좌굴해석은 에너지법을 사용하였고, 전체좌굴은 휨좌굴과 휨과 비틀림의 상호영향을 고려한 휨-비틀림좌굴 이론을 사용하였다. 또한, 국부좌굴 및 전체좌굴 해석결과를 기존의 실험결과(Derain, 1992)와 비교분석하였다. 실험에 사용된 시편은 25개였고, Polyester와 Vinylester를 매트릭스로 사용한 경우가 각각 7개와 18개였다.

## 2. 직교이방성 등변앵글부재의 탄성좌굴 해석

앵글부재는 송전탑과 같은 트러스 구조물의 브레이싱 등으로 많이 사용되는 부재이며, 인장 또는 압축력을 주로 받는다.

그림 1과 같은 직교이방성 앵글부재가 중심축 압축력을 받을 경우 발생할 수 있는 좌굴의 형태는 단변의 치수 및 부재의 길이에 따라 국부좌굴과 전체좌굴로 구분할 수 있다. 부재의 길이가 짧은 경우 국부좌굴이 먼저 발생하며 부재의 길이가 긴 경우 휨 또는 휨-비틀림좌굴이 발생하게 된다.

### 2.1 국부좌굴

판의 폭에 비하여 두께가 얇은 박판부재로 이루어진 구조부재가 압축력을 받는 경우 부재의 길이에 따라 전체좌굴이 발생하기 전에 국부좌굴이 먼저 발생한다.

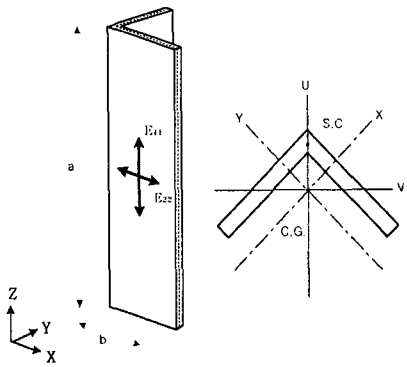


그림 1. 직교이방성 앵글부재

등변앵글부재의 국부좌굴해석은 부재를 이루는 두 판요소의 크기가 같으므로 판요소 중 하나만을 고려하여 해석할 수 있으며, 하중이 재하되는 변은 단순지지되어 있는 것으로 보고, 앵글부재를 구성하는 두 판이 만나는 접합부는 단순지지된 것으로 가정할 수 있다(Timoshenko, 1961). 그러므로 앵글부재의 국부좌굴해석은 그림 2와 같은 세변이 단순지지되어 있고 나머지 한 변이 자유인 판의 좌굴거동을 해석하는 것과 같다.

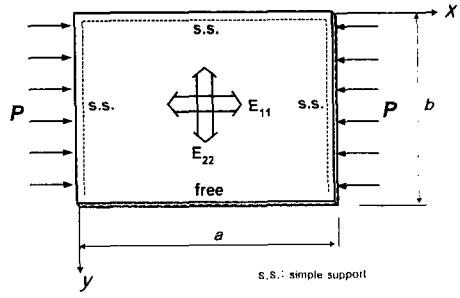


그림 2. 등분포 일축압축력을 받는 직교이방성판 및 좌표

위와 같은 판의 좌굴해석은 정밀해법 또는 에너지법을 사용할 수 있으나, 두 방법을 각각 사용한 결과의 차이는 거의 없다고 보고되었다(Holston 1969, Vakiner 1990, 채 1994, 윤 1995). 그러므로, 여기서는 간편한 에너지법을 사용하였으며, 변형에너지 U와 외력이

판에 대하여 한 일 T는 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\left\{D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + D_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right\}dxdy \quad (1)$$

$$T = \frac{P}{2}\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dxdy \quad (2)$$

위 식에서 $D_{11}$, $D_{22}$, $D_{12}$, $D_{66}$는 휨 및 비틀림 강성이고 다음과 같이 정의된다.

$$D_{11} = \frac{E_{11}t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})},\ D_{22} = \frac{E_{22}t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad (3a, b)$$

$$D_{12} = \nu_{12} \cdot D_{22} = \nu_{21} \cdot D_{11},\ D_{66} = \frac{G_{12} \cdot t^3}{12} \quad (3c, d)$$

그림 2와 같은 판의 경계조건을 만족하는 처짐함수(w)를 식 (4)와 같이 가정하고, 이 식을 식 (1)과 식 (2)에 대입하고 에너지보존법칙을 적용하면, 식 (5)와 같은 판의 좌굴계수(k)를 구할 수 있다(윤, 1995).

$$w = \frac{x}{b}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (4)$$

$$k = \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2\sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} + \frac{12(1-\nu_{12}\nu_{21}) \cdot G_{12}}{\pi^2\sqrt{E_{11}E_{22}}}\right] \quad (5)$$

여기서, $E_{11}$, $E_{22}$, $G_{12}$는 각각 보강섬유의 보강방향에 따른 탄성계수 및 전단탄성계수이고 $\nu_{12}$, $\nu_{21}$은 각각 보강섬유방향과 보강섬유의 직각방향에 대한 포아슨비이다.

그림 3과 4는 식 (5)를 사용하여 메트릭스의 종류에 따른 판의 좌굴계수를 구해 그래프로 나타낸 것이다. 계산된 좌굴계수를 식 (6)에 대입하면 좌굴응력을 구할 수 있으며, 좌굴응력에 단면적을 곱해주면 좌굴하중을 구할 수 있다(Bulson, 1969).

$$\sigma_{cr} = k\frac{\pi^2\sqrt{E_{11}E_{22}}}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})\left(\frac{b}{t}\right)^2} \quad (6)$$

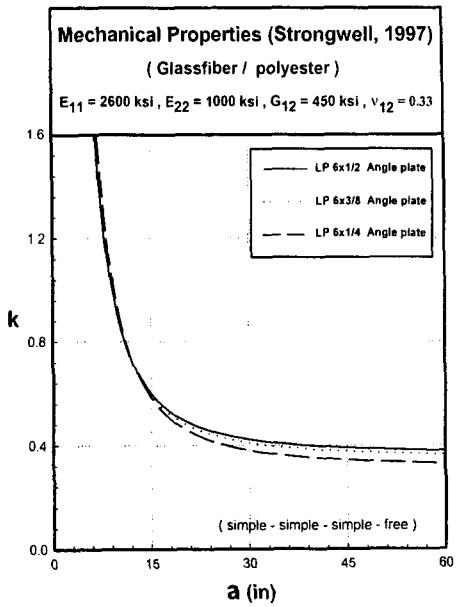


그림 3. Polyester판의 좌굴계수

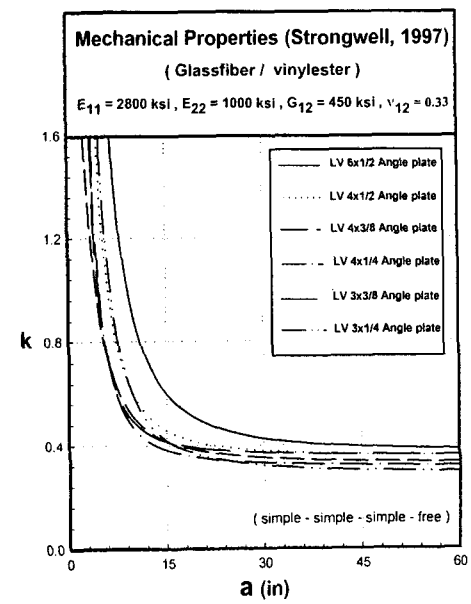


그림 4. Vinylester판의 좌굴계수

## 2.2 전체좌굴

직교이방성 등변앵글부재의 전체좌굴해석은 휨좌굴, 비틀림좌굴, 그리고 휨-비틀림좌굴거동에 대한 해석이다. 그림 5는 휨좌굴과 비틀림좌굴 그리고 휨-비틀림좌굴이 발생한 경우의 단면을 나타낸 것이다.

휨좌굴은 Euler의 좌굴이론을 적용할 수 있으며, 비틀림좌굴은 앵글이 비대칭단면(또는 점대칭단면)이므로 순수비틀림(St. Venant torsion)과 워핑비틀림(Warping torsion)을 고려하여 비틀림좌굴해석을 해야한다.

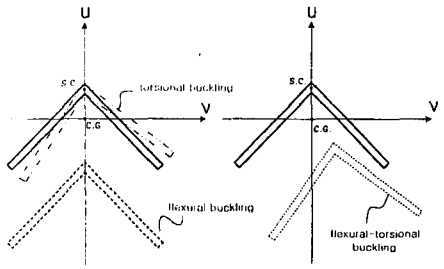


그림 5. 좌굴이 발생한 등변앵글부재의 단면

일반적인 앵글단면부재는 도심과 전단중심이 일치하지 않으므로, 식 (7)~(10)과 같이 각 축방향의 휨과 비틀림을 고려한 식을 사용할 수 있다(Timoshenko, 1961).

$$P_u = \frac{\pi^2 E_{11} I_v}{(1-\nu_{12}\nu_{21})(KL)^2} \tag{7}$$

$$P_v = \frac{\pi^2 E_{11} I_u}{(1-\nu_{12}\nu_{21})(KL)^2} \tag{8}$$

$$P_w = \frac{1}{r_0^2}\left[G_{12}J + \frac{\pi^2 E_{11} C_w}{(1-\nu_{12}\nu_{21})(KL)^2}\right] \tag{9}$$

$$P_n = \frac{(P_u+P_v) - \sqrt{(P_u+P_v)^2 - 4\left(1-\frac{e_o^2}{r_o^2}\right)(P_u P_v + P_w)}}{2\left(1-\frac{e_o^2}{r_o^2}\right)} \tag{10}$$

여기서, J는 비틀림상수(torsion constant), $C_w$는 워핑상수(warping constant), $r_o$는 극회전반경(polar radius of gyration) 그리고, $e_o$는 전단중심과 도심의 거리이다.

좌굴하중은 식 (7)과 (10)의 결과 중 작은 값이다. 그림 6과 7은 부재치수별 전체좌굴 및 국부좌굴에 대한 해석결과를 나타낸 것이다.

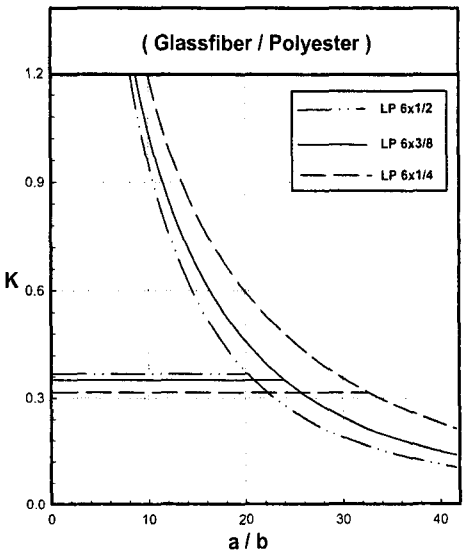


그림 6. Polyester 앵글부재 좌굴계수

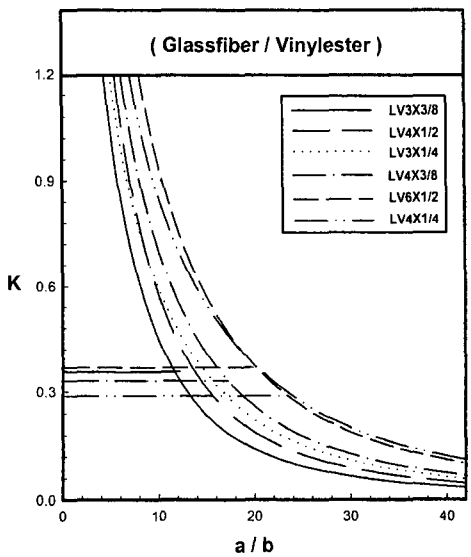


그림 7. Vinylester 앵글부재 좌굴계수

## 3. 직교이방성 앵글부재의 좌굴실험

직교이방성 앵글부재의 국부좌굴 및 전체좌굴 실험은 Derain(1992)이 실시하여 보고한 바 있다. 국부좌굴 및 전체좌굴을 실험한 결과로부터 Hoff(1948)의 방법을 사용하여 좌굴하중을 구했으며, 그 결과는 표 1과 같다.

표 1. 좌굴실험결과(Derain, 1992)

| 부재 | 길이(a) (in) | 폭(b) (in) | 두께(t) (in) | $E_{11}$ (ksi) | $\nu_{12}$ | P (kips) | 파괴형태 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L6X 1/2 | 70.9 | 6 | 1/2 | 2160 | 0.21 | 26.3 | combination |
| L6X 3/8 | 60.0 | 6 | 3/8 | 2250 | 0.3 | 8.2 | local |
| L6X 3/8 | 48.0 | 6 | 3/8 | 2250 | 0.3 | 9.0 | local |
| L6X 3/8 | 35.9 | 6 | 3/8 | 2363 | 0.3 | 9.4 | local |
| L6X 1/4 | 60.1 | 6 | 1/4 | 2847 | 0.3 | 2.7 | failure |
| L6X 1/4 | 48.0 | 6 | 1/4 | 2847 | 0.3 | 2.6 | local |
| L6X 1/4 | 35.9 | 6 | 1/4 | 2810 | 0.31 | 2.8 | local |
| L6X 1/2 | 70.9 | 6 | 1/2 | 2110 | 0.23 | 26.1 | local |
| L6X 1/2 | 17.9 | 6 | 1/2 | 2410 | 0.27 | 30.1 | local |
| L6X 1/2 | 36.0 | 6 | 1/2 | 2110 | 0.23 | 32.1 | local |
| L4X 1/2 | 70.9 | 4 | 1/2 | 2270 | 0.28 | 12.3 | global |
| L4X 1/2 | 17.7 | 4 | 1/2 | 2270 | 0.28 | 18.0 | combination |
| L4X 1/2 | 36.0 | 4 | 1/2 | 1900 | 0.21 | 25.5 | combination |
| L4X 3/8 | 60.1 | 4 | 3/8 | 2713 | 0.26 | 10.2 | combination |
| L4X 3/8 | 48.0 | 4 | 3/8 | 2713 | 0.26 | 12.5 | combination |
| L4X 3/8 | 36.2 | 4 | 3/8 | 2623 | 0.27 | 16.4 | local |
| L4X 1/4 | 70.9 | 4 | 1/4 | 3457 | 0.29 | 3.3 | local |
| L4X 1/4 | 48.0 | 4 | 1/4 | 3457 | 0.29 | 4.1 | local |
| L4X 1/4 | 36.0 | 4 | 1/4 | 2530 | 0.30 | 4.5 | local |
| L3X 3/8 | 60.0 | 3 | 3/8 | 2230 | 0.265 | 4.0 | global |
| L3X 3/8 | 47.8 | 3 | 3/8 | 2230 | 0.265 | 6.2 | global |
| L3X 3/8 | 35.8 | 3 | 3/8 | 2710 | 0.28 | 11.5 | combination |
| L3X 1/4 | 70.9 | 3 | 1/4 | 2867 | 0.3 | 3.6 | combination |
| L3X 1/4 | 48.0 | 3 | 1/4 | 2867 | 0.3 | 4.5 | local |
| L3X 1/4 | 36.0 | 3 | 1/4 | 2765 | 0.3 | 4.6 | local |

combination : 국부좌굴과 전체좌굴이 같이 발생한 경우

## 4. 결과의 비교분석

대표적인 부재의 이론적 해석결과와 실험결과를 그래프로 나타내면 그림 8 및 9와 같다. 그림 8은 국부좌굴이 발생한 경우이며, 그림 9는 전체좌굴이 발생한 경우이다. 국부좌굴 해석결과는 실험결과와 약 10%내외의 차를 보였다. 실험에 사용한 앵글의 폭-두께비(b/t)는 8 ~ 24이었으며, b/t값이 클수록 실험결과와 이론결과가 잘 일치함을 알 수 있었다. 전체좌굴 해석결과는 실험값이 이론값보다 작았으며, 전체좌굴은 약축에 대한 휨좌굴이 지배적이었다. 실험에 사용된 앵글의 길이는 36~71in. 이었으며, 전체좌굴이 발생한 부재중 중간정도의 길이를 갖는 경우의 차는 10%내외였다.

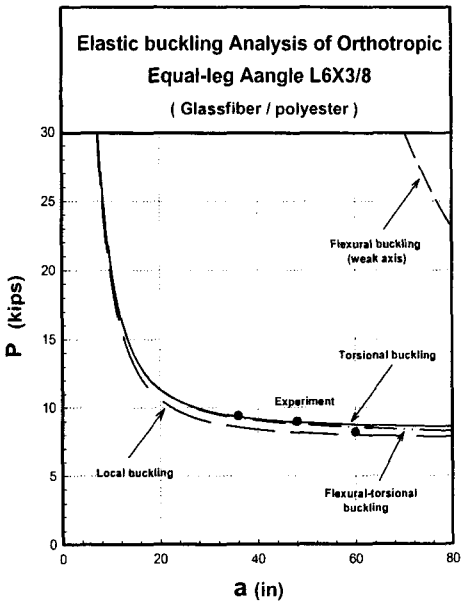


그림 8. 국부좌굴하중의 비교

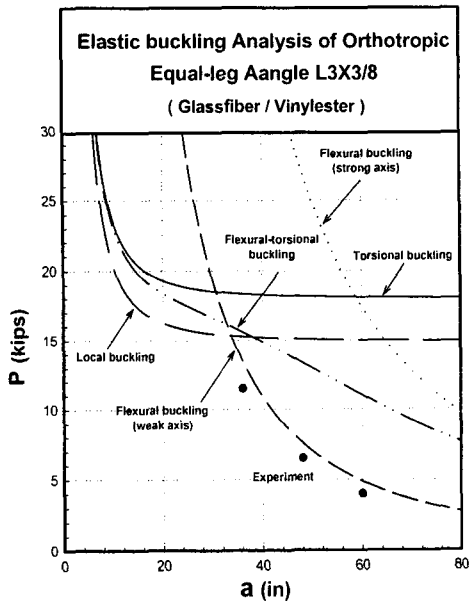


그림 9. 전체좌굴하중의 비교

## 5. 결 론

Pultrusion공정으로 생산된 직교이방성 등변앵글부재가 중심축압축력을 받아 좌굴이 발생한 경우에 대한 연구결과로서, 국부좌굴과 전체좌굴을 각각 해석하였으며, 그 결과를 기존의 실험결과와 비교하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 국부좌굴해석 결과는 실험결과와 10%내외의 차를 보였다.
2. 판의 폭-두께비(b/t)가 큰 경우에 해석과 실험결과의 차이가 작았다.
3. 등변앵글부재의 전체좌굴거동은 약축에 대한 휨좌굴이 지배적이었다.
4. 전체좌굴의 해석결과가 국부좌굴해석 결과보다 실험치와 더 큰 차를 보였다.
5. 국부좌굴 해석결과는 실험결과보다 더 작았으며 전체좌굴 해석결과는 실험결과보다 컸다.

## 참 고 문 헌


(1) Bulson, P. S., The Stability of Flat Plates, Elsevier Publishing Company Inc., New York, 1969.

(2) Derain F., "Tests on Pultruded Composite Single Angle Compression Struts," Master Thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, 1992.

(3) Hoff, N. J., Boley, B. A., and Coan J. M., "The Development of a Technique for Testing Stiff Panels in Edgewise Compression," Experimental Stress Analysis, 5(2), 1948, pp. 11-21.

(4) Holston, A. Jr., "Buckling of Orthotropic Plate with One Edge Free," AIAA Journal, Vol. 8, No. 7, 1970, pp. 1352-1354.

(5) Strongwell, Extren Design Manual, Strongwell, Bristol, Virginia, 1997.

(6) Timoshenko, S. P., and Gere, J. M., Theory of Elastic Stability, 2nd., ed., McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1961.

(7) Vakiener, A. R., "Preliminary Investigation of Flange Local Buckling in Pultruded Wide Flange Structural Shape," Master Thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia, 1990.

(8) 윤순종, 문환두, 이원복, "직교이방성 박판부재의 국부좌굴 관련 설계규준에 관한 연구," 대한토목학회 논문집, 제15권, 제3호, 1995, pp. 533-544

(9) 채수하, "직교이방성 단주의 해석에 관한 연구," 홍익대학교 대학원 석사학위논문, 1994.