

# 크림프를 가진 섬유 캔틸레버의 대변형의 일래스티카 해

정재호\*, 강태진\*

## Elastica Solution of Large Deformation of Fiber Cantilever with Crimped Shapes.

Jae Ho Jung, Tae Jin Kang

### Abstract

In this paper, the solution of two dimensional deflection of circular wavy elastica beam was obtained for one end clamped boundary and concentrated load condition. The beam was regarded as a linear elastic material. Wavy shape was described as a combination of half-circular arc smoothly connected each other with constant curvature of all the same magnitude and alternative sign. Also load direction was taken into account. As a result, the solution was expressed in terms of a series of integral equations. While we found the exact solutions and expressed them in terms of elliptic integrals, the recursive ignition formulae about the displacement and arc length at each segment of circular section were obtained. Algorithm of determining unknown parameters was established and the profile curve of deflected beam was shown compared with initial shape.

### 1. 서론

선형 탄성체(linear elastic material)의 기하학적 비선형 처짐의 엄밀한 해를 일래스티카(Elastica)[1-4]라고 한다. 본 연구는 기존 일래스티카 이론을 토대로 처짐 문제를 2차원으로 간주하고 크림프가 존재하는 섬유를 초기형상이 직선이 아닌 원주의 일부분을 교대로 접합시킨 보(Beam)로 가정하고 점 하중 하에서의 처짐 곡선을 계산하였다. 경계조건은 한쪽 끝이 클램프(clamp)되어 있는 경우와 양쪽 끝이 클램프 되어 있는 경우에 대하여 해석을 실시하였다. 구하여야 하는 해는 경계(boundary)에서의 반응힘(reaction forces), 굽힘 모우먼트(Bending moment)들이 미정계수로 존재하는 일련의 타원적분(elliptic integral)형태의 점화식으로 얻어진다.

### 2. 이론

본 연구에서는 변형 전후의 섬유의 길이와 단면의 모양은 변화가 없다고 가정하고, 각도  $\alpha$ 의 점 하중  $P$ 를 가해준다고 생각한다. 따라서 초기 곡률과 하중조건을 나타내면 아래와 같다.

$$\text{곡률}(\kappa_0) = \pm \frac{1}{R} \text{ (원호가 위로 볼록할$$

경우 '+', 아래로 볼록할 경우 '-')

점하중 :  $P$ , 경사각  $\alpha$

한쪽 끝과 양쪽 끝이 클램프된 경우의 자유물체도(free body diagram)를 각각 Fig. 1, 2에 나타내었다.

유도된 지배방정식(Governing Equation)은 각각 아래와 같다.

\* 서울대학교 재료공학부

Case 1) One end clamped case

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm \frac{1}{R} + \frac{1}{EI} \{P_y(X-x) + P_x(Y-y)\} \quad (1)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{P}{EI} \cos(\theta - \alpha) \quad (2)$$

Case 2) Two end clamped case

i)  $0 \leq s \leq s_p$

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm \frac{1}{R} + \frac{1}{EI} (M - Vx - Ny) \quad (3)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{1}{EI} (V \cos\theta + N \sin\theta) \quad (4)$$

ii)  $s_p \leq s \leq s_0$

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm \frac{1}{R} + \frac{1}{EI} \{M - Vx - Ny + P_y(X-x) - P_x(Y-y)\} \quad (5)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{1}{EI} \{(V + P_y) \cos\theta + (N - P_x) \sin\theta\} \quad (6)$$

where,  $V + V' - P_y = 0$  ,  $N - N' - P_x = 0$  ,  
 $-M + M' + P_x Y + P_y X - V' L = 0$

### 3. 결과 및 토의

위 지배방정식을 토대로 해석을 수행한 결과 Case 1)의 경우는 segment의 수에 관계없이 일반적인 해답을 얻을 수 있었다, 처짐 곡선결과

의 예를 Fig. 3, 4에 나타내었다.

한편 양쪽 끝이 클램프 되어 있는 Case 2)에서는 적분 결과 식에 미지수 M, V, N이 포함되어 있어 경계조건을 갖고 이 값을 구해야하는 부정적(statically indeterminate)문제를 풀어야 하는데 segment가 4개 있는 경우 풀어야하는 연립적분 방정식의 개수와 미지수의 개수는 16개가 되어 매우 복잡하므로 본 초록에는 제시하지 않았다. 이 방정식들을 직접적으로 Newton-Rapson 방법으로 풀려면 많은 수치적인 문제(numerical problem)를 야기하기 때문에 Case 1)에서 나온 결과를 토대로 초기 M, N, V를 추측하여 계산한 다른 쪽 끝점에서의 값이 경계조건을 만족하도록 M, N, V를 갱신하는 방법으로 해를 구하고자 하였다. 식의 형태가 복잡한 비선형 연립방정식으로 주어지기 때문에 경계조건을 만족하는 해를 구하는데 많은 어려움이 있었다.

### 4. 결론

크림프가 존재하는 섬유를 초기 곡률이 일정한 원주의 일부분들이 연속으로 접합된 선형 탄성체로 간주하고 처짐 방정식을 세워 해를 구하고 처짐 곡선을 얻어내었다. 또한 기존 연구와는 달리 하중이 입력 자료(input data)이고 결과(output)가 처짐 좌표와, 경사각인 문제로서 접근하였다. 한쪽 끝이 클램프된 경우에는 해가 Explicit하게 주어져서 처짐 곡선을 구하고 하중, 물성과 처짐 곡선의 경향을 비교적 쉽게 예측할 수 있었지만, 양쪽 끝이 클램프된 경우에는 먼저, 주어진 경계조건(segment 4개인 경우, 16개의 연립 비선형 적분방정식)을 모두 만족시키는 M, N, V값을 구해야만 전체적인 profile을 얻을 수 있음을 알게 되었다. 또한 segment의 개수에 관계없이 이러한 경계조건들을 만족하는 M, N, V를 일반적으로 구할 수 있는 알고리즘이 필요함을 알게 되었다. 이러한 알고리즘을 만들려면 case 1)의 결과들을 이용하는 것이 매우 효과적이므로 case 1)의 결과를 토대로 하는 해법을 연구 중에 있다.

## 5. 참고 문헌

1. Piero Villaggio, "Mathematical Models for Elastic Structures", *Chap III, A Director Approach*

2. Whitney & Lessia "Nonlinear Deflection Analysis of Fibers Using Displacements" *Textile Res. J.* 36(5), 413-419 (1969)

3. Br H. D. Conway & Ithaca, N. Y. "The Nonlinear Bending of Thin Circular Rods." *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME 78, 7-10 (1956)

4. Nageswara Rao, B. & Venkateswara Rao, G. Z. "On the Large Deflection of Cantilever Beams with End Rotational Load" *angew. Math. Mech.* 66(10), 507-509 (1986)

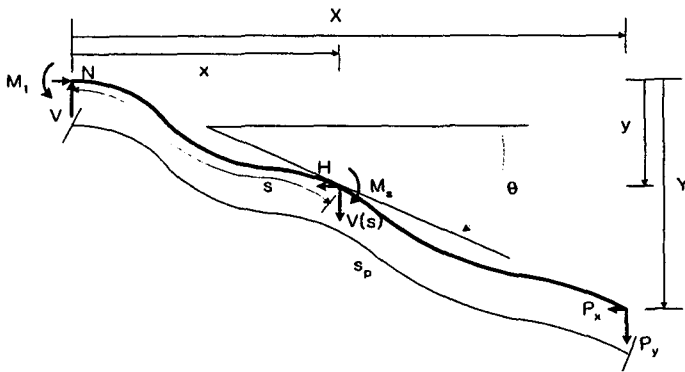


Fig. 1 Free body diagram of one end clamped boundary.

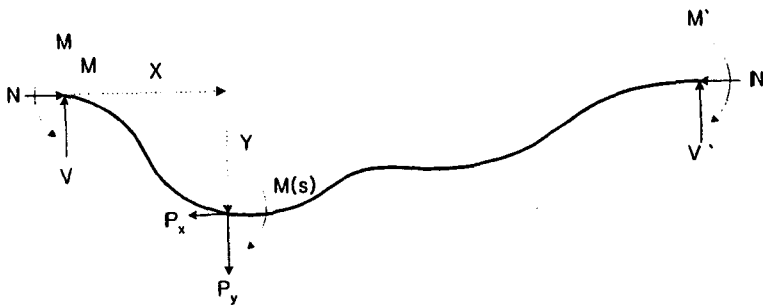


Fig. 2 Free body diagram of two end clamped boundary.

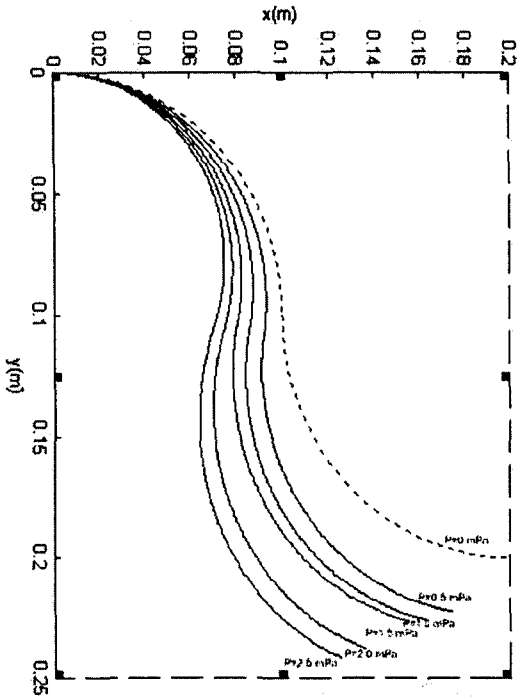


Fig. 3 Profile curve for  
 $E = 40\text{MPa}$ ,  $D = 3\text{mm}$ ,  
 $R = 10\text{cm}$ ,  $\alpha = 30^\circ$

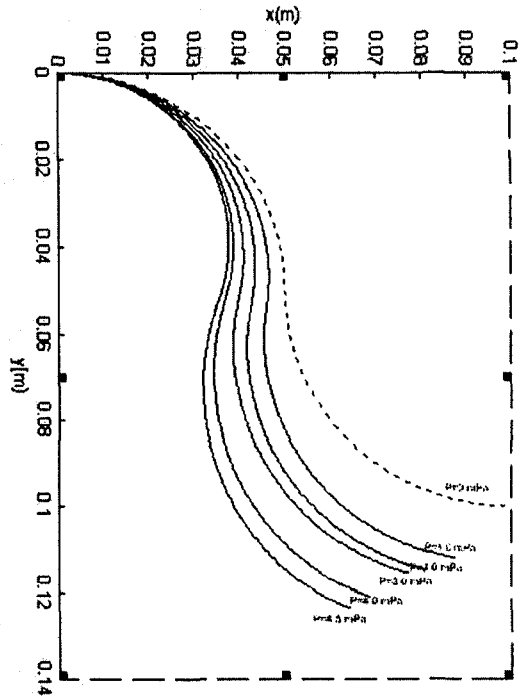


Fig. 4 Profile curve for  
 $E = 100\text{MPa}$ ,  $D = 2\text{mm}$ ,  
 $R = 5\text{cm}$ ,  $\alpha = 45^\circ$