

열-기계-전기 하중이 완전 연계된 지능 복합재 평판의 지그재그 고차이론

오 진 호* · 조 맹 효**

HIGHER ORDER ZIG-ZAG PLATE THEORY FOR COUPLED THERMO-ELECTRIC-MECHANICAL SMART STRUCTURES

Jinho Oh, Maenghyo Cho

KEY WORDS : Coupled theory, Uncoupled theory, Zig-Zag theory, Piezoelectric(압전 하중)

ABSTRACT

A higher order zig-zag plate theory is developed to refine accurately predict fully coupled of the mechanical, thermal, and electric behaviors. Both the displacement and temperature fields through the thickness are constructed by superimposing linear zig-zag field to the smooth globally cubic varying field. Smooth parabolic distribution through the thickness is assumed in the transverse deflection in order to consider transverse normal deformation. Linear zig-zag form is adopted in the electric field. The layer-dependent degrees of freedom of displacement and temperature fields are expressed in terms of reference primary degrees of freedom by applying interface continuity conditions as well as bounding surface conditions of transverse shear stresses and transverse heat flux. The numerical examples of coupled and uncoupled analysis are demonstrated the accuracy and efficiency of the present theory. The present theory is suitable for the predictions of fully coupled behaviors of thick smart composite plate under mechanical, thermal, and electric loadings.

1. 서 론

복합재료와 스마트구조 재료의 발전으로 인해 진동억제, 소음감소, 형상제어 등의 잠재적인 응용 분야에 관심이 더 집중되고 있다. 특히, 주위의 환경이 열적인 하중 상태에 있을 때, 복합재료 지능 구조물을 해석할 때는 열-전기-기계 하중이 완전 연계된 이론을 가지고 해석을 해야만, 정확한 결과를 얻을 수 있다. 초기에는, 압전소자가 붙어있는 복합재료의 해석을 일차 전단변형을 가지고, 해석을 했다.[1-2] 그러나, 이 이론은 복합재료 지능구조물의 일반적인 형상을 정확히 해석하기에는 어려움이 있었다. 그 결과, 고차이론이 개발 되고 있다. 지금까지 적용되었던, 복합재료 지능구조물의 고차 이론에는 근사단층 변위장을 가정하고,

압전소자층에는 층방향 이론을 적용[3] 하는 모델들이 개발 되었다. 그러나, 근사단층 이론은 층 사이의 횡전단변형의 연속조건을 만족하기 어렵다는 단점이 있다. 또, 층방향 이론[4]은 자유도가 층의 수에 의존 되기 때문에, 계산량이 너무 많아진다. 그래서, 효율적인 고차 지그재그이론[5]이 개발 되었다. 지금까지의 대부분의 판이론은 평면응력가정에 기초를 두고 있다. 그러나, 판이 두꺼워졌을 때는, 판의 두께효과를 적절히 고려할 수 없었다.[6] 또, 열하중이 작용 할때에는, 횡수직 변형이 면내 열변형[7]과, 비교하여 무시할 수 없을 만큼 중요하기 때문에, 고려를 해야 한다. 그 결과, 본 논문은 복합재료 지능구조물을 해석할 때, 변형은 횡전단 변형을 고려하였고, 여러하중이 작용할때에도 정확한 해를 구하기 위해, 완전연계 이론을 사용하였다. 온도장은, 3 차로된 지그재그 이론을 사용하였다. 전기장은 압전소자가 있는층에서만, 선형으로 가정한다.

* 서울대학교 기계공학부

** 서울대학교 기계항공공학부 교수

2. 정식화

2.1 전체 자유 에너지 와 구성방정식

자유에너지는 다음과 같다.

$$F(\varepsilon_{ij}, E_i, \theta) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_i E_j \varepsilon_{kl} - \frac{1}{2} b_{ij} E_i E_j - k_{ij} \theta \varepsilon_{ij} - d_i E_i \theta - \frac{1}{2} a_T \theta^2 \quad (1)$$

여기서, C_{ijkl} 와 e_{ijk} 는 탄성계수와 압전소자상수이다. a_T 는 C_E/T_0 로 정의 된다.

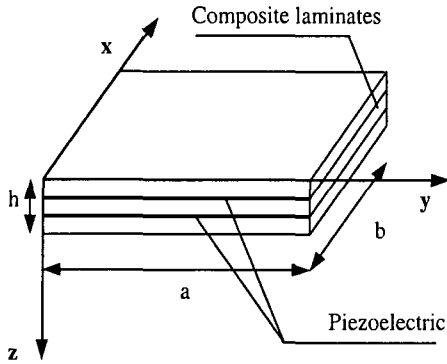


그림 1. 복합 지능 구조물의 형상 위의 (1)식으로부터, 다음과 같은 구성 방정식들이 유도 될 수 있다.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k - k_{ij} \theta$$

$$D_i = -\frac{\partial F}{\partial E_i} = e_{ijk} \varepsilon_{jk} + b_{ij} E_j + d_i \theta \quad (2)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial \theta} = k_{ij} \varepsilon_{ij} + d_i E_i + a_T \theta$$

D_i 와 σ_{ij} 는 응력텐서 구성성분이다.

S 는 엔트로피이고, $\theta = T - T_0$ 는 초기온도 T_0 로부터 의 온도변화이다. E_i 는 전기장 벡터의 구성성분이다. b_{ij} 는 유전율이고, k_{ij} 와 d_i 는 열-기계 와 열-전기장의 연계 상수이다.

선형에 기초를 둔 전기장 E_i 는 스칼라포텐셜 함수 ϕ 로서 표현된다.

$$E_i = -\phi_{,i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3)$$

미소 변위와 변형을 관계식은 다음과 같이 주어진다.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

압전소자 층이 있는 복합재료 적층구조물의 형상은 그림 1에 도시되어 있다.

2.2 변위장

변위장은 고차지그재그이론을 사용하여 모델링하였다. 면내 변위장은 두께방향으로 매끈하게 변하는 3 차 변위장에 1 차 지그재그 변위장을 중첩하여 얻는다. 열-기계하중하에서 중요한 횡 수직 변형 효과를 포함하기위해, 면내수직 변위를 두께를 통하여 포물선으로 가정하였다.

이를 수식으로 표현하면, 아래와 같다.

$$u_\alpha(x_\beta, z) = u_\alpha^0(x_\beta) + \psi_\alpha(x_\beta)z + \xi_\alpha(x_\beta)z^2 + \varphi_\alpha(x_\beta)z^3 + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k(x_\beta)(z - z_k)H(z - z_k) \quad (5)$$

$$u_3(x_\alpha, z) = w(x_\alpha) + r_1(x_\alpha)z + r_2(x_\alpha)z^2 \quad (6)$$

여기서, $H(z - z_k)$ 은 단위 계단함수 이다.

면내 변위장의 개형은 그림 2에 도시되어 있다

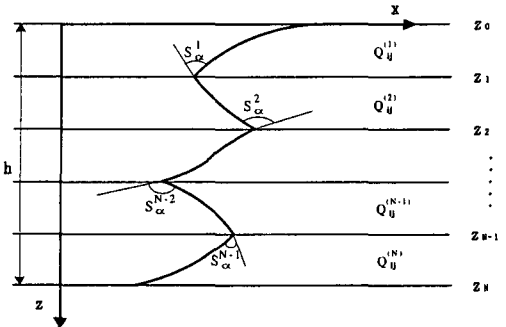


그림 2. 면내 변위장의 일반적인 형상

위의 변위장에 상, 하면에서의 횡 전단 구속 조건을 대입한다. 즉,

$$\gamma_{\alpha 3}|_{z=0} = \psi_\alpha + w_{,\alpha} = 0$$

$$\gamma_{\alpha 3}|_{z=h} = \psi_\alpha + w_{,\alpha} + 2\xi_{\alpha} h + 3\varphi_{\alpha} h^2 + \sum_{k=1}^{N-1} S_{\alpha}^k + w_{,\alpha} + r_{1,\alpha} h + r_{2,\alpha} h^2 = 0 \quad (7)$$

횡 전단 응력 연속조건을 복합재 층의 경계마다 고려하면, 층 사이의 기울기변화 S_{α}^k 는

$$S_{\alpha}^k = a_{\alpha\gamma}^k \varphi_{\gamma} + b_{\alpha\gamma}^k r_{2,\gamma} \quad (8)$$

여기서 $a_{\alpha\gamma}^k, b_{\alpha\gamma}^k$ 의 자세한 표현식은 생략한다.

결국, 식(7), (8)을 식(5), (6)에 대입하여, 다음과 같은 변위장을 유도할 수 있다.

$$u_\alpha(x_\beta, z, t) = u_\alpha^0(x_\beta, t) - w_{,\alpha}(x_\beta, t)z - \frac{1}{2h} \left\{ 3\varphi_\alpha h^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (a_{\alpha\gamma}^k \varphi_\gamma + b_{\alpha\gamma}^k r_{2,\gamma}) + r_{1,\alpha}(x_\beta, t)h + r_{2,\alpha}(x_\beta, t)h^2 \right\} z^2 + \varphi_\alpha(x_\beta, t)z^3 + \sum_{k=1}^{N-1} (a_{\alpha\gamma}^k \varphi_\gamma + b_{\alpha\gamma}^k r_{2,\gamma})(z - z_k)H(z - z_k)$$

$$u_3(x_\alpha, z, t) = w(x_\alpha, t) + r_1(x_\alpha, t)z + r_2(x_\alpha, t)z^2 \quad (9)$$

변위장에서의 변수는 기준면의 변수만으로 정의된다. 주요 변수는 $u_\alpha^0, w, \varphi_\alpha, r_1, r_2$ 이다. 그 결과, 주요변수의 수는 층의 수에 관계없이 7 개로 일정하다.

2.3 온도장

온도장은 변위장과 유사하게 모델링 할 수 있다. 즉, 두께방향으로, 매끈하게 변하는 3 차 온도장에 선형 지그재그로 변하는 온도장을 중첩하여, 전체모델의 온도장을 얻는다.

가정된 온도장은 다음과 같다.

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \theta_3 z^3 + \sum_{k=1}^{N-1} \theta^{*k} (z - z_k) H(z - z_k) \quad (10)$$

온도개형은 그림 3 에 도시되어 있다. 일반적으로, 윗면과 아랫면의 열하중에 의한 경계조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} -\kappa_{33}^i \theta_{,z} &= q_i & z &= 0 \\ -\kappa_{33}^N \theta_{,z} &= q_b & z &= h \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, q_i 와 q_b 는 윗면과 아랫면의 열유동을 나타낸다. κ_{33}^i 는 i 번째층에서 두께방향으로의 열전도계수이다. θ^{*k} 는 각각의 층사이에서 열유동이 연속적으로 변한다는 조건을 이용하여, 결정된다.

$$\theta^{*k} = C^k \theta_3 + d^k \quad (12)$$

여기서, C^k 와 d^k 는 열유동의 함수로 구성된 열전도 상수이다. 결국 최종적인 온도장은 기준면에서, θ_0 와 θ_3 의 함수로 표현된다.

온도장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \theta = \theta_0 - \frac{q_i}{\kappa_{33}^i} z - \frac{1}{2h} \left[\frac{q_b}{\kappa_{33}^N} - \frac{q_i}{\kappa_{33}^i} + 3\theta_3 h^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (C^k \theta_3 + d^k) \right] z^2 \\ + \theta_3 z^3 + \sum_{k=1}^{N-1} (C^k \theta_3 + d^k) (z - z_k) H(z - z_k) \end{aligned} \quad (13)$$

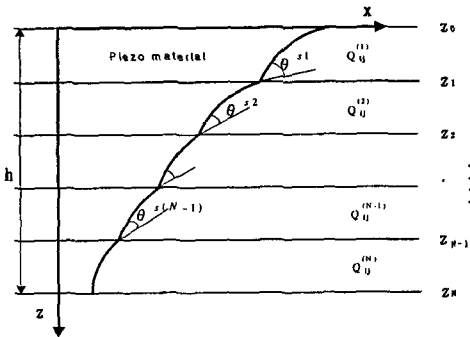


그림 3. 두께 방향으로 온도장 개형

여기서, 온도장에서 고차부분은 두께방향으로 균일하지 않는 지그재그 온도분포를 정의한다.

2.4 전기장

전기장에서의 포텐셜함수의 표현은 다음과 같이 쓰여진다.

$$\phi = \phi^0 + \sum_{k=1}^N \phi^{*k} (z - z_{k-1}) \{H(z - z_{k-1}) - H(z - z_k)\} \quad (14)$$

전기장은 두께 방향으로 선형 지그재그이론을 사용하여, 각각의 층에 의존하는 형태로 표현된다. 그러나, 압전소자의 수가 작기 때문에, 전체 자유도의 수가 증가하지 않는다.

3. 수치해와 결과

위의 세가지 변위장, 온도장, 전기장을 사용하면, 모든 장이 각각의 기준면의 변수로만 표현된다. 그러므로 가상일의 원리를 적용하여, 변분을 하면, 평형방정식과, 경계조건을 유도할 수 있다. 지면관계상 이 결과는 생략한다. 수치해는 기계-전기 연성과, 기계-열-전기 연성의 결과를 살펴보았다.

기계-전기하중 연성

기계하중과 전기하중이 연성이 되었을 때, 변형과 응력을 알아 보았다. 그림 4 에서 첫번째 층의 압전소자는 센서로서 작동하고, 마지막 층의 압전소자는 작동기 역할을 한다. 그 결과를 3 차원 탄성해[8]와 비교해서, 매우 정확히 얻어지는 것을 볼 수 있다. 물성치는 [8]에 나타나 있다.

기계-열-전기 연성

열, 기계, 전기 세가지 하중이 연성되어있을 때, 변형과 응력을 살펴보았다. 하중조건은, 첫번째 층에, 열 유동 $1000W/m^2$ 를 가하였고, 복합체의 가로, 세로 길이 $a=b=1$ 로 하였다. 그 결과는 그림 5 와 같다. 결국, 비연성된 이론을 사용한 처짐이 연성된 이론을 사용한 처짐보다 크다는 것을 알 수 있다. 이는, 처짐을 일으키는 기계적인 에너지가, 연성이 될 경우, 열과 전기에너지로 소산 되기 때문에, 연성된 이론을 사용한 처짐이 더 적게 나타난다. 물성치는 표 1 에 주어져 있다.

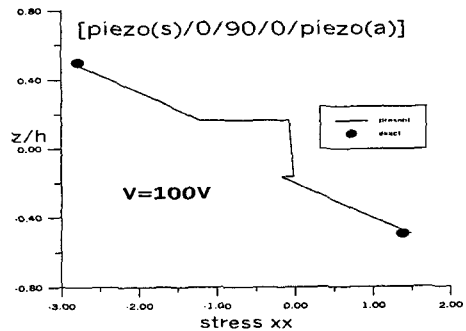


그림 4(a) 면내 응력 σ_{xx} $a/h=10$

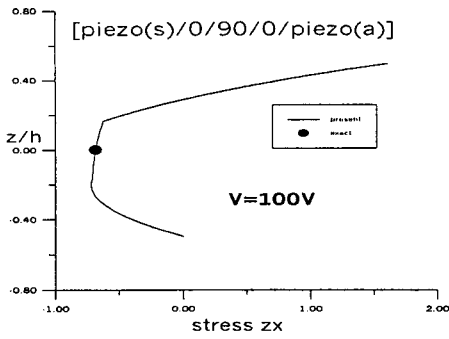


그림 4(b) 횡방향 전단 응력 σ_{zx} , $a/h=10$

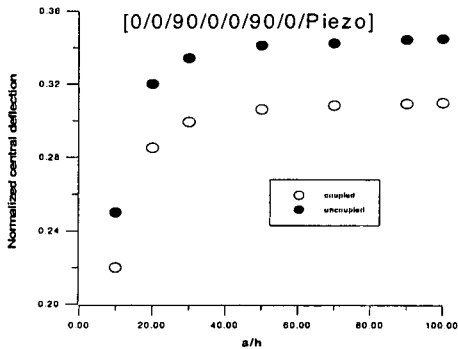


그림 5. 기준면에서의 연성과 비연성이론의 처짐

4. 결론

본 연구는, 고차 지그재그 이론을 사용하여, 세가지 하중이 가해 질 때, 복합재료의 변형과 응력에 대해 해석하였다. 그 결과, 세가지 하중이 완전 연성된 경우와, 비연성된 경우에 전체 변형 거동에서 차이가 발생한다는 것을 알 수 있었다. 그것은, 연성에 의해서 에너지가 소산되기 때문이었다. 그리고, 기계-전기의 연성이, 기계-열 연성보다 더 중요한 역할을 한다는 것을 알 수 있었다. 결국, 세가지 하중이 동시에 가해지는 복합 적층 구조물의 해석은 완전 연성된 이론을 사용해야만, 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 있다.

후 기

이 논문은 2000년도 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

(1) Crawley, E. F. "Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures," *AIAA J*, Vol. 25, No. 10, 1987, pp.1373-1385.

(2) Ha, S.K. and Keilers, C. and Chang, F. "Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoceramic sensors and actuators, *AIAA J*, Vol 30, No 3, 1992, pp772-780.

(3) Mitchell, J. A. and Reddy, J. N., "A Refined Hybrid Plate Theory for Composite Laminates with Piezoelectric Laminate." *Int. J Solids Struct*, Vol.32, No.16, 1995, pp. 2345-2367.

(4) Saravanos, D.A. and Heyliger, P.R. and Hopkins, D.A. "Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates." *Int. J Solids Struct*, Vol 34, No 3, 1997, pp 359-378.

(5) Cho, M., and Parmerter, R.R., "Efficient higher-order composite plate theory for general lamination configurations," *AIAA J*, Vol. 31, 1993, pp.1299-1306.

(6) Toledano, A. and Murakami, H. "A Composite Plate Theory for Arbitrary Laminate Configurations.", *ASME J. of Appl. Mech.*, Vol 54, 1987, pp181-189.

(7) Ali, J.S.M. and Bhaskar, K. and Varadan, T.K. "A new theory for accurate thermal/mechanical flexural analysis of symmetric laminated plates." *Composite Structures*, Vol 45, 1999, pp 227-232

(8) Ray, M.C and Bhattacharya, R and Samanta, B "Exact Solutions for Static Analysis of Intelligent Structures", *AIAA J*, Vol 31, No 9, 1993, pp 1684-1691.

표 1. 연성된 이론에 사용된 물성치

Material property PZT-5A layer	Material property Graphite-epoxy layer
$E_1=63 \times 10^9$	$E_L=144.23 \times 10^9$
$E_3=E_2=63 \times 10^9$	$E_T=9.65 \times 10^9$
$G_{12}=24.6 \times 10^9$	$G_{LT}=3.45 \times 10^9$
$G_{13}=G_{23}=24.6 \times 10^9$	$G_{TT}=4.14 \times 10^9$
$\nu_{12}=0.28$	$\nu_{LT}=0.3$
$\nu_{13}=\nu_{23}=0.28$	$\nu_{TT}=0.$
$\alpha_{11}=\alpha_{22}=0.9 \times 10^{-6}$	$\alpha_{TT}=1.1 \times 10^{-6}$
$\alpha_{33}=0.9 \times 10^{-6}$	$\alpha_{LL}=25.2 \times 10^{-6}$
$d_{31}=150 \times 10^{-12}$	
$d_{32}=150 \times 10^{-12}$	
$d_{33}=-336.8 \times 10^{-12}$	
$d_{24}=-513 \times 10^{-12}$	
$d_{15}=-513 \times 10^{-12}$	
$K_{11}=2.1$	$K_{11}=4.48$
$K_{22}=2.1$	$K_{22}=3.21$
$K_{33}=2.1$	$K_{33}=3.21$