

적층복합재료 및 샌드위치 판의 적응해석

박진우* · 김용협*

Adaptive Analysis of Multilayered Composite and Sandwich Plates

Jin Woo Park and Yong Hyup Kim

KEY WORDS : Adaptive analysis, Mesh superposition technique, Composite materials

ABSTRACT

Adaptive analysis of multilayered composite and sandwich plates is carried out. The adaptive analysis is based on a finite element error form, which measures the difference between the through-the-thickness distribution of finite element displacement and the actual displacement. The region where the error-measure exceeds the prescribed admitted error value, the finite element mesh locally refined in the thickness direction using the mesh superposition technique. Several numerical tests are conducted to validate the effectiveness of the current approach for adaptive analysis of laminated plates.

1. 서 론

적층복합재료 및 샌드위치 판의 유한요소해석에 있어서 오차는 크게 두 가지로 분류될 수 있다. 하나는, 면내방향으로의 적당한 격자를 사용하지 않음으로써 나타나는 이산화 오차 (discretization error) 이고, 또 하나는 부적절한 유한요소 모델의 사용에 따른 두께방향의 거동을 적절히 표현하지 못함으로써 나타나는 모델링 오차 (modeling error) 이다 [1]. 이산화 오차의 해석에 관한 연구는 많이 진행되어 있으며, 이러한 오차를 기초로 한 적응해석(adaptive analysis) 기법이 제안되었다 [2]. 본 연구에서는 적층판의 유한요소 해석에 있어서 부적절한 유한요소 모델을 사용함으로써 나타나는 모델링 오차의 해석에 초점을 맞추었다. 모델링 오차를 적절히 표현하기 위하여 오차식을 제안하였고, 이를 계산하기 위한 간단한 방법을 제시하였다. 제시된 오차를 기초로 적층복합재료 및 샌드위치 판의 적응해석을 수행하였다. 적응해석을

위하여 격자중첩법 (mesh superposition technique)을 도입하였고, 오차가 허용치보다 큰 부분에 3 차원 유한요소를 두께방향으로 중첩하여 새로운 격자를 생성하였으며, 새로운 격자를 이용한 재해석을 통한 보다 정밀한 해석을 시도하였다.

2. 오차의 계산

적응해석을 위한 오차는 다음과 같이 정의한다.

$$e_{disp}^2 = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} [(u_1 - u_1^f)^2 + (u_2 - u_2^f)^2] dx_3}{\int_{-h/2}^{h/2} (u_1^2 + u_2^2) dx_3} \quad (1)$$

정의된 오차는 실제변위와 유한요소 해석의 변위의 차이의 두께방향 평균값을 의미하며, 식에서, u_1, u_2 는 실제변위를 의미하며, u_1^f, u_2^f 는 유한요소해석의 변위를 의미한다. 본 연구에서 *a posteriori* 한 방법으로 위에 정의된 오차를 계산하기 위하여 실제변위 대신에 3 차원 응력평형식과 3 차원 탄성학식을 기초로 한 후처리방법을 이용하여 복원된 변위를 이용하여 오차의 근사값을 계산한다.

* 서울대학교 항공우주공학과

변위복원기법

변위의 복원은 유한요소해석의 응력과 변위를 기초로 한 후처리기법을 통해서 이루어진다. 3 차원 응력평형식을 두께방향으로 적분함으로써 횡방향 전단응력을 계산하고[3], 응력-변형도, 변형도- 변위 관계식을 통해 변위의 두께방향분포를 복원한다.

$$\sigma_{3\gamma} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{1\gamma,1} + \sigma_{2\gamma,2}) d\zeta + c_\gamma \quad (\gamma=1, 2) \quad (2)$$

$$\epsilon_{ij}^{total} = S_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T \quad (3)$$

$$u_{3\gamma}^* = \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{33} d\zeta + d_3 \quad (4)$$

$$u_{\gamma}^* = \int_{-h/2}^{h/2} (2\epsilon_{\gamma 3} - u_{3,\gamma}^*) d\zeta + d_\gamma \quad (\gamma=1, 2) \quad (5)$$

계산된 변위는 중심면에 대한 대칭인 성분과 반대칭인 성분으로 나뉜다. 대칭인 성분은 유한요소해석의 변위와 두께방향의 평균값을 일치시키고, 반대칭인 성분은 기울기를 유한요소해석의 변위와 일치시킴으로써 조정된다 [4]. 변위의 계산에서 횡방향 수직응력이 횡방향 수직 변형도에 미치는 영향을 무시하면, 변위는 4 개의 초수렴점 (superconvergent gauss point)와 9 개의 절점의 중심점에서 계산이 가능하다.

3. 유한요소 모델 및 격자중첩법

유한요소 모델

본 연구에서 적층판의 해석을 위하여 Hellinger-Reissner variational principle 을 기초로 한 변형도 가정 degenerated solid 요소를 사용하였다[5]. 사용된 요소는 독립적으로 가정된 변형도 장을 갖고, 이들은 요소의 잠김현상을 감소시키고, spurious mode 를 억제하는 역할을 한다. 두께방향으로 2 개의 절점을 갖고, 윗면과 아래면에 각각 9 개의 절점을 갖는다. 각 절점당 3 개의 자유도 (u_1, u_2, u_3)를 갖고, 회전자유도는 두께방향의 자유도의 차이로 표시된다. (Fig. 1)

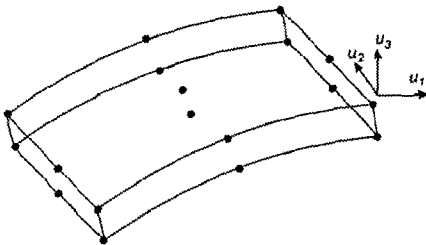


Figure 1 Eighteen-node solid element

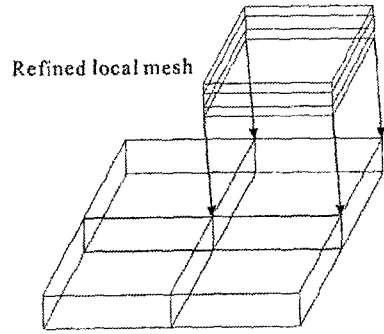


Figure 2 Mesh superposition for local refinement of mesh in the thickness direction

격자중첩법

국부적인 격자세밀화를 위하여 격자중첩법(mesh superposition technique)을 도입하였다 [6]. 오차가 큰 지역에 국부적으로 보다 세밀한 지역격자를 중첩시킴으로써, 격자의 뒤틀림 또는 천이요소를 사용하지 않고, 요소 세밀화를 달성할 수 있다 (Fig. 2). 본 연구에서는 오차가 큰 지역에 두께방향으로 세밀화된 격자를 중첩시켜서 적층판을 효과적으로 모델링함으로써 보다 정확한 유한요소 해석을 시도하였다. 격자 중첩법을 변형도가정 혼합유한요소에 적용하기 위해서 다음과 같은 기본적인 가정을 도입한다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_G + \mathbf{u}_L \quad (6)$$

$$\epsilon = \mathbf{P}_L \alpha_L \quad (7)$$

여기서 아래첨자 G, L 은 각각 전체요소 및 이에 중첩되는 지역요소들에 해당하는 변수를 나타내며, \mathbf{P}_L, α_L 은 각각 가정된 변형도 형상함수 행렬과, 가정된 변형도 계수 벡터이다. Hellinger-Reissner variational principle 을 이용하면 지배방정식은 다음과 같은 형식으로 나타난다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_G & \mathbf{K}_C \\ \mathbf{K}_C^T & \mathbf{K}_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Z}_G \\ \mathbf{Z}_L \end{Bmatrix} - q \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_G \\ \mathbf{Q}_L \end{Bmatrix} = 0 \quad (8)$$

여기서 $\mathbf{K}_G, \mathbf{K}_L, \mathbf{K}_C$ 는 각각 전체격자, 지역 격자에 해당하는 강성행렬과 두 격자사이의 연계 강성행렬을 의미하며, 각각은 요소차원에서 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{K}_G^{(e)} = \mathbf{G}_G^T \mathbf{H}_L^{-1} \mathbf{G}_G \quad (9)$$

$$\mathbf{K}_L^{(e)} = \mathbf{G}_L^T \mathbf{H}_L^{-1} \mathbf{G}_L \quad (10)$$

$$\mathbf{K}_C^{(e)} = \mathbf{G}_G^T \mathbf{H}_L^{-1} \mathbf{G}_L \quad (11)$$

그리고, 위식에서 행렬 \mathbf{G}, \mathbf{H} 는 각각 가정된

변형도 형상함수 행렬, 탄성계수 행렬, 변위 형상함수의 미분계수 행렬의 곱으로 표시되는 형렬, 그리고 변형도 형상함수 행렬, 탄성계수 행렬, 변형도 형상함수 행렬의 곱으로 표시되는 형렬이며, 다음과 같다.

$$\mathbf{G}_G = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{P}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_G d\Omega \quad (12)$$

$$\mathbf{G}_L = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{P}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L d\Omega \quad (13)$$

$$\mathbf{H}_L = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{P}_L^T \mathbf{C} \mathbf{P}_L d\Omega \quad (14)$$

4. 적응해석 기법

본 연구에서 제시된 오차를 기초로 한 적응해석은 다음과 같은 일반적인 적응해석의 절차를 갖는다. (Fig. 3)

1. 초기격자를 이용한 유한요소 해석 - 초기 격자는 면내방향으로 충분히 세밀화가 되어있다고 가정한다.
2. 각각의 요소에 대한 오차의 해석 - 앞에서 제시된 방법을 이용하여 각 요소의 중심점에 대해 오차를 계산한다.
3. 오차가 허용치 이상인 요소의 격자중첩법을 이용한 두께방향 세밀화 - 두께방향으로 중첩되는 지역격자의 배치는 적층판의 각 층 사이의 복원된 변위의 기울기의 불연속 정도의 순서로 결정된다 (Fig. 4). 즉, 그림에서 θ 가 큰 부분부터 요소가 나뉜다.

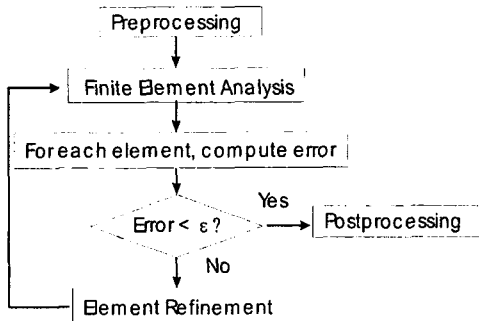


Figure 3 Flowchart of the adaptive refinement procedure

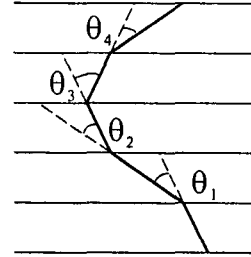


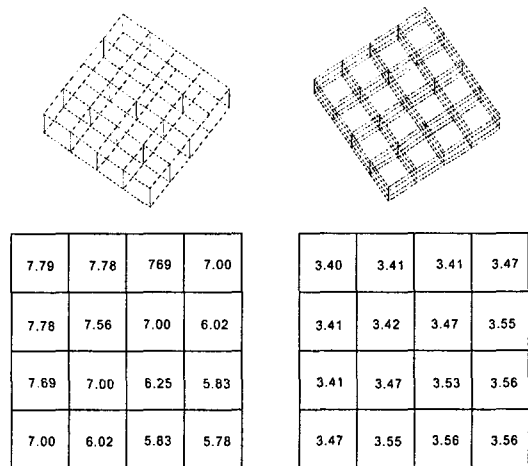
Figure 4 Standard for layout of the local superimposed mesh

5. 수치해석

복합재료 및 샌드위치의 적응해석을 위해 소개된 기법을 사용하여 수치해석을 수행하였다. 복합재료 판은 [0/90/0/90/0]_s 의 10 개의 층을 갖는 cross-ply 이다. 샌드위치판은 [0/90/0/90/0]의 5 개의 층을 갖는 면재와 티타늄 허니콤 심재로 이루어져 있다. 복합재료 및 샌드위치판은 sine 형태의 압력 하중을 받으며, 4 변은 모두 단순지지 되어있다. 모든 예제에서 최종 격자의 최대 오차가 4% 이하가 되도록 해석을 수행하였고, 하중조건, 경계조건의 대칭성을 이용하여 1/4 만을 모델링하였다.

Fig. 5와 Fig. 6은 각각 복합재료 평판과 샌드위치 평판의 초기격자 및 최종격자의 형상과 각 요소의 오차의 값을 보여준다.

Fig. 7은 중앙에 정사각형 구멍이 있는 복합재료 평판 (1/4 모델, $h/L = 0.15$)의 최종 격자의 형상을 보여준다.



Initial Mesh

Refined Mesh

Figure 5 Error distribution in percentage of composite plate

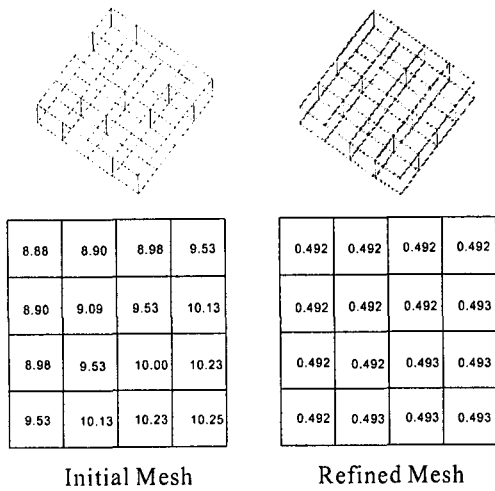


Figure 6 Error distribution in percentage of sandwich plate

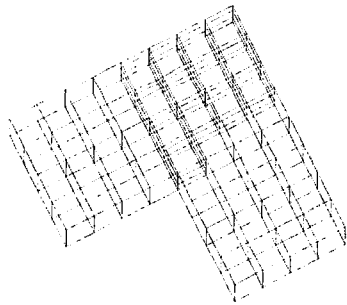


Figure 7 Final mesh of composite plate with square cutout (quarter model)

Fig. 8 은 비균질한 심재를 갖는 샌드위치 (Nonuniform-core sandwich)를 제시된 방법으로 해석했을 때의 최종 격자의 형태를 보여준다. 해석 모델은 중앙 부분의 심재의 강성이 나머지 보다 작은 샌드위치 판이다 ($h/L = 0.05$). 강성이 작은 심재를 갖는 부분에 두께방향으로 세밀한 요소가 사용되는 것을 볼 수 있다.

6. 결론

본 논문에서는 복합재료 및 샌드위치 구조물의 효과적인 유한요소 해석을 위한 적응 해석 기법을 소개하였다. 소개된 적응 해석 방법은 적응판의 해석에 있어서 부적절한 유한요소 모델을 사용함으로써 나타나는 모델링 오차에 기초를 한다. 모델링 오차를 수치적으로 계산하기 위해서 계산식을 제안하였으며, 이를 계산하기 위한 간단한 방

법을 제시하였다. 제시된 오차식은 유한요소 해석의 변위와 실제 변위의 차이의 두께방향 평균을 의미한다. 오차는 각각의 유한요소에 대하여 계산되며, 오차값이 허용치보다 큰 요소는 격자 증첩법을 이용하여 두께방향으로 보다 세밀한 요소를 증첩함으로써 새로운 격자를 생성하였다.

제시된 해석기법을 사용하여 복합재료 및 샌드위치 판을 해석하였다. 수치해석 결과, 본 방법을 이용하여 오차를 효과적으로 줄일 수 있었고, 적응판의 적절한 유한요소 모델링이 가능하였다.

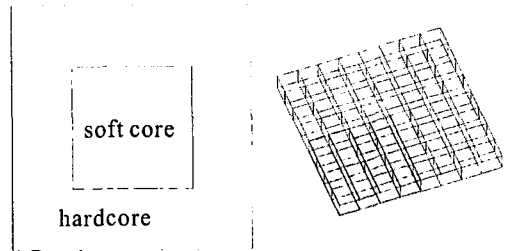


Figure 8 Final mesh of nonuniform core sandwich plate (quarter model)

참고문헌

- (1) Cook, R. D, Markus, D. S and Plesha, M. E. (1989): Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 3rd Edition, John Wiley & Sons, Inc.
- (2) Li, L and Bettess, P. (1997): "Adaptive Finite Element Methods: A Review", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 50, Iss. 10, pp. 581-591
- (3) Noor, A. K., Kim, Y. H. and Peters, J. M. (1994): "Transverse Shear Stresses and Their Sensitivity Coefficients in Multilayered Composite Panels," *AIAA J.*, Vol. 32, pp 1259-1269.
- (4) Park, J. W. and Kim, Y. H. (2000): "Predictor-Corrector Procedures for the Analysis of Sandwich Panels," *AIAA J.*, Vol. 38, No. 8, pp. 1489-1493.
- (5) Kim, Y. H. and Lee, S. W. (1988): "A Solid Element Formulation for Large Deflection Analysis of Composite Shell Structures," *Computer and Structures*, Vol. 30, pp 269-274.
- (6) Kim, Y. H. Levit, I, and Stanly, G. (1991): "A Finite Element Adaptive Mesh Refinement Technique that Avoids Multipoint Constraints and Transition Zones", *Iterative Equation Solvers for Structural Mechanics Problems* (edited by I. D. Parsons and B. nour-Omid), ASME CED-Vol.4