

다양한 경계조건을 갖는 복합적층판의 정확한 고유진동수를 얻기 위한 간편 해석법

김덕현*·원치문**·이정호***

A Simple Method of Obtaining "Exact" Values of the Natural Frequencies of Vibration for Some Composite Laminated Structures with Various Boundary Condition

Kim, Duk-Hyun, Won, Chi-Moon and Lee, Jung-Ho

KEYWORDS : A simple method, Natural Frequencies of Vibration, Various
Boundary Condition, Composite Laminated Structures

ABSTRACT

Composite materials can be used economically and efficiently in broad civil engineering applications when standards and processes for analysis, design, fabrication, construction and quality control are established. Many of the bridge systems, including the girders and cross-beams, and concrete decks behave as the special orthotropic plates. Such systems with boundary conditions other than Navier or Levy solution types, or with irregular cross sections, analytical solution is very difficult to obtain. Numerical method for eigenvalue problems are also very much involved in seeking such a solution. A method of calculating the natural frequency corresponding to the first mode of vibration of beam and tower structures with irregular cross-sections was developed and reported by the author in 1974. Recently, this method was extended to two dimensional problems including composite laminates, and has been applied to composite plates with various boundary conditions with/without shear deformation effects and reported at several international conferences including the Eighth Structures Congress of American Society of Civil Engineers in 1990.

In this paper, the result of application of this method to the special orthotropic plates with various boundary condition is presented.

기호설명

-
- * Korea Composites 대표
 - ** 한라대학교 건축·토목공학부 전임강사
 - *** 영동전문대학교 토목과 전임강사

- W : 최대 진폭, ω : 고유 진동 주파수
- t : 시간 m : 질량
- E₁ : 종탄성계수, E₂ : 횡탄성계수
- ν_{12} : 프아송비, G₁₂ : 전단탄성계수
- h₀ : 라미나의 두께(m)

1. 서론

복합재료는 해석, 설계, 제작 및 시공관리에 대한 규준이 확립될 때 토목공학 분야에 경제적이고 효과적으로 사용될 수 있다. A, B, 그리고 C의 값을 갖고 r이 증가하는 [AB]_r, [ABA]_r, [ABBAAB]_r, [ABBCAAB]_r의 fiber의 방향을 갖는 몇개의 적층판은 B₁₆, B₂₆, D₁₆, 와 D₂₆의 강성값들이 현저하게 감소하게 된다. 이러한 적층복합판은 특별직교 이방성 적층판으로 해석이 가능하다. Navier 또는 Levy solution 형태 이외의 경계조건을 갖거나 변단면인 경우, 그리고 point masses를 포함하는 nonuniform mass를 갖는 적층 복합판의 경우에, 해석적 해답은 얻기가 어렵다. 고유값 문제를 위한 수치해석 방법은 각각의 해답을 찾는데 매우 복잡하다. 보와 타워의 제 1 모드에서의 고유진동수를 구하는 정확한 해는 1974년에 D. H. Kim에 의해 발표되었다. 이 보고서에서 고유진동수에 대한 보의 자중 무시의 효과가 몇개의 보 지지형태에 대해 주어졌다. 최근 이 방법은 composite 복합판을 포함하는 2차원 문제의 제 1모드 진동해석에 확장되었으며, 1989년에 제 1차 일본 첨단재료기술협회 국제회의(JISSE-1)에서 발표되었다. 그러한 2차원 문제의 제 2차 모드 진동에 대한 이 방법의 확장은 1990년 미국 토목학회 제 8차 구조공학 학술발표회에서 발표되었다. 이 방법은 두꺼운 적층판에 적용되어 1991년 제 8차 국제복합재료학회 및 JISSE-2에 발표되었다.

이러한 방법은 다양한 경계조건과 변단면을 갖는 임의의 형태의 판에 대해 쉽게 응용되어질 수 있다. 이 논문에서는 여러 경계조건을 갖는 적층판에 대한 이 방법의 적용 예를 제시한다.

2. 간편한 진동해석법

구조물의 고유진동수는 공명 상태에서 확산하기 시작하는 처짐 모드 형태하에서의 주파수이다. 자유진동으로 인한 처짐으로부터 이러한 처짐을 유발하는데 필요한 힘을 알 수 있

다. 일련의 이러한 과정에 의해 결정된 모드 형태가 충분히 정확하다면, 수렴된 것과 바로 이전 값 사이에서의 상대적 최대 처짐은 이러한 관성력하에서 불변하다. 구조물의 진동은 조화 운동이고 진폭형상은 삼각함수에 의해 표시될 수 있는 부분이 있다. 처음에 제 1모드만 고려하면, 구조부재의 처짐형태는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w = W(x,y)F(t) = W(x,y) \sin \omega t \quad (1)$$

여기서

W : 최대 진폭
 ω : 고유 진동 주파수
 t : 시간이다.

Newton의 법칙에 의해 진동하는 질량 m의 동적힘은

$$F = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2)$$

방정식 (1)를 여기에 대입하면

$$F = -m(\omega)^2 W \sin \omega t \quad (3)$$

여기서 ω 와 W는 미지수이다. 고유진동수 ω 를 구하기 위하여 다음의 과정이 취해진다. 어떤 몇개의 점에서 최대 처짐의 진폭은 임의로 주어진다.

$$w(i,j)(1) = W(i,j)(1) \quad (4)$$

여기서 (i,j)는 고려한 점을 나타낸다. 이것은 절대적으로 임의의 값이지만 경험에 의해 가정하면 수렴을 촉진시키는데 더욱 좋다. 이러한(최대) 진폭에 대응하는 동적힘은

$$F(i,j)(1) = -m(i,j)[\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \quad (5)$$

이다. 이 힘에 의해 일어나는 "새로운" 변위는 F의 함수이고 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$w(i,j)(2) = f \{ m(i,j)[w(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \}$$

$$= \sum \Delta(i,j,k,l) \{ -m(i,j)[w(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \}$$
(6)

여기에서 Δ 는 처짐에 대한 영향계수이다. 공명상태하에서 구조부재의 모든 점에서 고려한 $w(i,j)(1)$ 과 $w(i,j)(2)$ 는 동일해야 하고 다음조건을 만족해야 한다.

$$w(i,j)(1)/w(i,j)(2) = 1 \quad (7)$$

이 방정식으로 부터 (i,j) 의 각 점에서의 $w(i,j)(1)$ 이 얻어질 수 있지만, 대부분의 경우에 일치하지 않는다. 구조부재의 고유진동수가 부재의 모든 점에서 동일해야 하므로 $w(i,j)$ 의 충분한 같은값이 모든 (i,j) 점에서 얻어질 때까지 이 과정이 반복된다. 그러나 대부분의 경우에 첫번째 cycle의 계산에 의해 얻어진 $w(i,j)$ 의 최대와 최소값의 차이는 공학적으로 충분히 무시될 수 있다. 정확도는 최대와 최소치의 평균을 취하거나 또한 처짐이 최대인 곳에서 $w(i,j)$ 의 값을 취함으로써 개선될 수 있다.

2번째 cycle의

$$w(i,j)(3) = f \{ m(i,j)[w(i,j)(2)]^2 w(i,j)(2) \}$$
(8)

에서 $w(i,j)(2)$ 의 절대적 수치가 편리하게 사용될 수 있다. composite 구조물을 포함하여 불규칙한 단면과 이상적이 아닌 지지조건을 가진 판의 경우, 경계조건에 관계없이, 이 판을 몇개의 요소로 나누어 고려하는 것이 편리하다. 결과의 정확성은 처짐계산의 정확도에 비례한다.

3. 수치해석

3.1 재료 물성과 경계조건

$[ABA]_r$ 의 적층형태를 가진 판에 대해 $A=0^0$, $B=90^0$, $r=1$ 인 경우를 계산 예로 하였다.

수치계산에 사용된 재료의 물성은 다음과 같다. 하중은 등분포하중 $q=1 \text{ N/m}^2$ 을 재하였다.

$$E_1 = 38.6 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.2600,$$

$$G_{12} = 4.14 \text{ GPa}, \quad E_2 = 8.27 \text{ GPa},$$

$$\nu_{21} = 0.0557, \quad h_0 = 0.000125 \text{ m},$$

문제에 대해 주어진 방법을 적용하기 위해 취해야할 첫번째 단계는 영향면을 구하는 것이다. 이를 위해 어떠한 방법도 이용될 수 있으나 여기에서는 F.E.M. program ALGOR을 사용하였으며 고유진동수의 정확도는 에너지 방법에 의한 정확도가 존재한다. Fig. 1은 각 경계조건을 그림으로 나타낸 것이다.

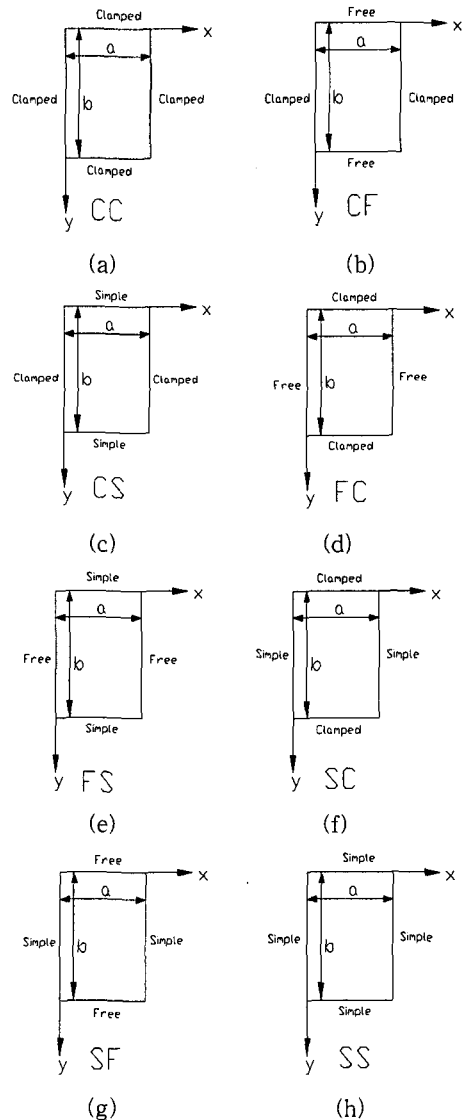


Figure 1. Various boundary conditions

3. 2 재료 물성과 경계조건

참고문헌

상술한 진동해석 방법을 Fig. 1의 경계조건을 고려하여 수치해석을 수행하였다. 형상비 ($c=a/b$)가 3일 때, 각 경계조건에 따른 고유진동수와 F.E.M.에 의한 결과 값을 table 1.에 나타내었다.

Table 1.에서 보는 바와 같이 상술한 방법에 의한 고유진동수값과 F.E.M.에 의한 진동수값이 거의 일치함을 알 수 있다. 이는 주어진 진동해석 방법이 여러 경계조건을 갖는 복합적층판의 진동해석에 유용하게 쓰일 수 있음을 보여준다.

Table 1. Natural Frequency of Plate for Boundary Condition ($\omega = \omega_{real} \cdot \sqrt{\rho h}$)

경계조건	Kim's ①	F.E.M.②	Ratio (①/②)
CC	9.4240	9.4220	1.00
CF	9.3417	9.3387	1.00
CS	9.4036	9.4017	1.00
FC	0.5083	0.5082	1.00
FS	0.3502	0.3502	1.00
SC	4.2181	4.1369	1.02
SF	4.1457	4.1478	1.00
SS	4.1747	4.1747	1.00

4. 결 론

본 논문에서, D. H. Kim에 의해 개발되어진 정밀하고 간단한 진동해석방법이 구체적인 예와함께 제시된다. 수치 설명이 주어졌고 주어진 방법이 대단히 정밀하게 사용할 수 있는 간단한 것임이 증명 되었다. 처짐 영향계수를 구하기 위해 어떤 방법도 사용할 수 있다. 해당의 정밀도는 오직 영향계수에 의존한다.

처짐 영향계수를 구하는 것은 구조해석과 설계에 있어서 첫번째 단계이다. 주어진 방법의 장점은 구조물의 고유진동수를 얻기 위해, 처짐, 경사, 모멘트, 그리고 전단 계산을 위해 이미 사용되어진 값들을 사용하는 것이다. 여러경계조건을 갖는 판의 고유진동수가 정확함을 확인할 수 있었다.

[1] Kim, D. H., Composite Structures for Civil and Architectural Engineering, E & FN SPON, London, 1995.

[2] Kim, D. H., "A Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Structural Elements," *Proc. International Symposium on Engineering Problems in Creating Coastal Industrial Sites*, Seoul, Korea., 1974.

[3] Kim, D. H., Hwang, J. W., Chun, D. S., "A Simple Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Composite Structural Elements," *Proc. 1st Japan Int' SAMPE Symposium*, 1989.

[4] Kim, D. H., Hwang, J. W., Chun, D. S., "Vibration Analysis of Irregularly Shaped Composite Structural Members-For Higher Modes," *Proc. 8th Structural Congress*, American Society of Civil Engineers, Baltimore, MD, U.S.A, 1990.

[5] Kim, D. H., "Vibration Analysis of Irregularly Shaped Laminated Thick Composite Plates," *Proc. ICCB 8*, Honolulu, Hawaii, 1991.

[6] Kim, D. H., "Vibration Analysis of Laminated Thick Composite Plates," *Proc. EASEC-III*, China, 1991.

[7] Kim, D. H., "The Effect of Neglecting Own Weight on the Natural Frequency of Vibration of Laminated Composite Plates with Attached Mass/Masses," *Proc. EASEC-V*, Australia, 1995.

[8] Timoshenko, S. P., History of Strength of Materials, McGraw-Hill Book Company, Inc., N. Y., 1953.