

선점법과 유한요소법을 사용한 단순지지된 등변사다리꼴 직교이방성판의 좌굴해석

이병권*·채수하**·윤순중***

Buckling Analysis of Simply Supported Isosceles Trapezoidal Orthotropic Plate Using Collocation and Finite Element Method

Lee, B. K. · Chae, S. H. · Yoon, S. J.

Key Words : elastic buckling, isosceles trapezoidal, orthotropic plate, collocation method, F.E.M.

Abstract

This paper presents the results of an elastic buckling analysis of isosceles trapezoidal orthotropic plate. In this study, all edges of plate are assumed to be simply supported and the difference of the applied loads are assumed to be taken out by shear of constant intensity along the sloping sides. For the buckling analysis, collocation method is employed. Finite element analysis is also conducted and the results are compared with theoretical ones.

기호설명

w : 판의 처짐식
n : y 방향의 반사인곡선의 수
 θ : 판의 경사각
m : 상수
 λ : 선점의 위치를 나타내는 계수
(= $(x - a_1) / a$)
 D_{11}, D_{22} : 재료의 성질방향 1, 2에 대한 판의
휨강성
 D_{66} : 직교이방성판의 비틀림강성
 D_{12} : = $\nu_{12} \times D_{22}$
 E_{11}, E_{22} : 재료의 성질방향 1, 2에 대한 탄성계수
 G_{12} : 직교이방성판의 전단탄성계수
 ν_{12}, ν_{21} : 재료의 성질방향 1, 2에 대한 포아슨 비

a_1 : 원점에서 판까지의 길이
a : 판의 길이
 b_1, b_2, b_0 : 판의 폭
 r_1, r_2 : = $(b_1 / a), (b_2 / a)$
k : 직교이방성판의 좌굴계수
A, B : 행렬

1. 서 론

펠트루전공정(pultrusion process)에 의해 생산된 섬유보강플라스틱 구조재는 생산공정의 특성상 직교이방성으로 간주되어지며 재료 자체의 여러 가지 장점(비강도 및 비강성이 크고, 비전도성, 비자성 등)으로 인해 최근 건설분야에서 그 사용성이 증가되고 있다. 그러나, 보편화된 설계 기술이 확립되지 않은 것이 이 재료의 문제점으로 지적되고 있다⁽¹⁾. 또한 효율적인 설계를 위해서는 단면의 폭이 변하는 등변사다리꼴 판에 대한 연구가 필요하다.

* 홍익대학교 대학원 토목공학과 석사과정
** 홍익대학교 대학원 토목공학과 박사과정
*** 홍익대학교 건설도시공학부 토목공학과 부교수

구조용 부재는 대부분 여러 개의 판요소들로 구성되어지며, 직교이방성 판요소들로 구성된 압축재의 설계규준을 마련하는데 있어서 판의 좌굴에 대한 연구는 필수적이다.

본 연구에서는 네 변이 단순지지된 등변사다리꼴 직교이방성판의 좌굴해석식을 선점법(collocation method)⁽²⁾을 사용하여 유도하고, 유도된 좌굴해석식을 사용하여 판의 평행한 변에 작용하는 축방향 압축력의 비(N_1/N_2)와 판의 경사각(θ), 그리고 판의 길이에 대한 최소폭의 비(r_1)에 따른 좌굴계수(k)를 그래프로 제시하였다. 또한 그 결과를 유한요소법에 의한 결과와 비교하였다.

2. 등변사다리꼴 직교이방성판의 좌굴해석

2.1 기본가정사항

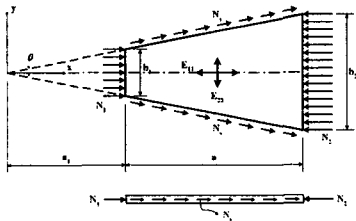


그림 1. 단순지지된 등변사다리꼴 직교이방성판

그림 1은 네 변이 단순지지된 등변사다리꼴 직교이방성판을 나타낸 것으로서, 고전적인 직교이방성판의 좌굴에 대한 기본가정사항 이외에, 판에 작용하는 힘은 경사면에서 일정한 크기의 전단력(N_s)으로 평형을 유지한다는 가정사항을 추가적으로 도입하였다⁽³⁾.

2.2 처짐식의 가정

선점법을 사용하여 등변사다리꼴 직교이방성판의 좌굴해석식을 유도하기 위해서는 먼저 판의 경계조건을 만족하는 처짐식을 가정하여야 한다. 판의 처짐모양은 재료의 성질과 무관하므로, 본 연구에서는 Klein(1956)이 등방성 판의 경우에 제시한 처짐식을 사용하였으며 그 식은 다음과 같다.

$$w = F(x) \cos\left(\frac{n\pi y}{2x} \cot \theta\right) \quad (1)$$

식 (1)에서 $n (= 1, 3, 5, \dots)$ 은 y 축 방향으로의 반사인곡선(half-sine wave)의 수를 나타내며, $F(x)$ 는 $y=0$ 인 곳에서 x 축 방향의 처짐모양을

나타내는 식으로서 다음과 같다⁽³⁾.

$$F(x) = c_1 \sin(m-2)\pi\lambda + c_2 \sin(m-1)\pi\lambda + c_3 \sin m\pi\lambda + c_4 \sin(m+1)\pi\lambda + c_5 \sin(m+2)\pi\lambda \quad (2)$$

식 (2)에서, $c_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 는 처짐량을 나타내는 계수이고, $m = 3, 4, 5, \dots$ 이다. 또한, λ 는 다음 식 (3)과 같으며, 본 연구에서는 $y=0$ 인 위치에서 λ 가 $1/5, 2/5, 1/2, 3/5, 4/5$ 인 5개의 점을 고려하였다.

$$\lambda = \left(\frac{x-a_1}{a}\right) \quad (3)$$

2.3 좌굴해석식의 유도

그림 1과 같은 직교이방성판에서 선점의 미소 요소에 대한 지배미분방정식은 다음과 같다⁽⁴⁾.

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

식 (4)에서 D_{11}, D_{22}, D_{66} 는 식 (5-1), (5-2), (5-3)과 같이 정의되며, 직교이방성재료이므로 식 (5-4)와 같은 관계가 성립된다.

$$D_{11} = \frac{E_{11} t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_{22} = \frac{E_{22} t^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})},$$

$$D_{66} = \frac{G_{12} t^3}{12}, \quad D_{12} = \nu_{12} D_{22} = \nu_{21} D_{11} \quad (5-1, 2, 3, 4)$$

그리고, N_x 는 x 축에 수직인 단면에, N_y 는 $y=0$ 인 단면에 발생하는 면내 압축력으로서, 그림 2와 같은 자유물체도에서 평형방정식을 사용하면 그 분포와 크기를 각각 식 (6-1), (6-2)와 같이 나타낼 수 있다.

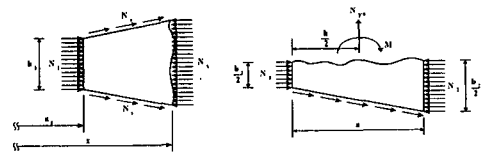


그림 2. 판의 자유물체도

$$N_x = \left[r_1 \left\{ 1 - \frac{(x-h_1)}{h} \right\} N_1 + r_2 \frac{(x-h_1)}{h} N_2 \right] \frac{\tan \theta}{(2x/h)} \quad (6-1)$$

$$N_y = - (r_2 N_2 - r_1 N_1) \frac{\tan \theta}{2} - \frac{3}{2} r_1 r_2 (N_2 - N_1) \left\{ \frac{1}{2} - \frac{(x-h_1)}{h} \right\} \quad (6-2)$$

식 (4)에 식 (1), (3), (5-1, 2, 3, 4), 그리고 식 (6-1, 2)를 대입하여 c_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)에 대해 정리하고, 이를 행렬식의 형태로 나타내면 식 (7)과 같은 등변사다리꼴 직교이방성판의 좌굴해석식을 얻을 수 있다.

$$(A + kB)c = 0 \quad (7)$$

식 (7)에서, k 는 판의 좌굴계수로서 판의 평균 폭인 $b_0 (= (b_1 + b_2) / 2)$ 를 사용하면 식 (8)과 같다.

$$k = \frac{N_2 b_0^2}{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}} \quad (8)$$

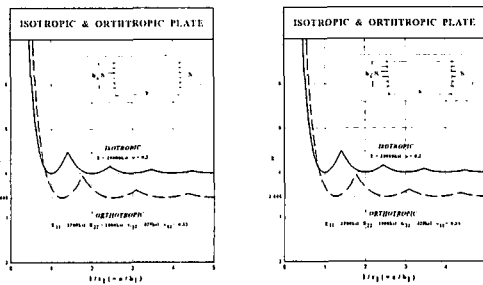
3. 유한요소해석

본 연구에서는 범용 구조해석 프로그램 중의 하나인 GTSTRUDL⁽⁵⁾을 사용하였다. 해석에 사용된 요소는 SBHQ6(Stretching and Bending Hybrid Quadrilateral)와 SBHT6(Stretching and Bending Hybrid Triangular)이다. 유한요소 해석은 r_1 이 1과 1/2, θ 는 실제로 사용되는 폭 변화의 범위인 11.31° ($\tan \theta = 1/5$)⁽⁶⁾까지 수행하였다.

4. 해석결과

4.1 선점법의 결과 검증

본 연구에서 얻은 좌굴해석식의 이론적 타당성을 검증하기 위해 N_1/N_2 에 1을, θ 에 0° 를 대입하여 등방성 및 직교이방성 직사각형판의 좌굴 해석을 수행하였으며, 그 결과는 기존문헌^{(1),(7)}의 결과와 잘 일치함을 알 수 있었다(그림 3 참조).



(a) 선점법에 의한 결과 (b) 정밀해법에 의한 결과

그림 3. Collocation법 및 정밀해법에 의한 직사각형판의 좌굴해석 결과의 비교

4.2 선점법에 의한 좌굴해석 결과

N_1/N_2 와 θ , 그리고 r_1 을 변화시켜가며 각 경우의 등변사다리꼴 직교이방성판의 좌굴계수(k)를 구해 그래프로 제시하였다(그림 4, 5 참조).

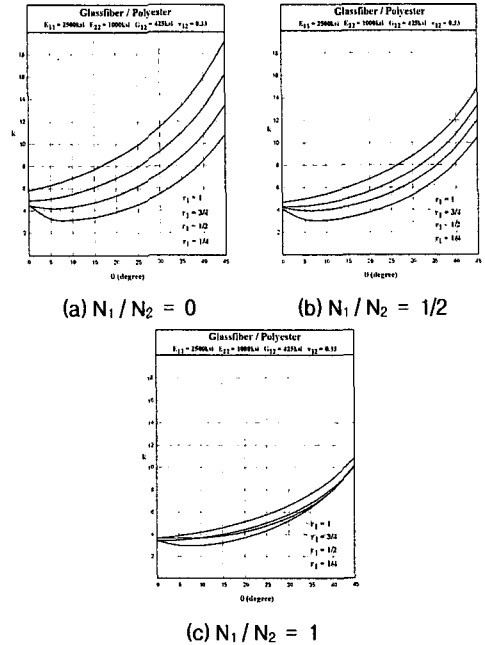


그림 4. θ 와 r_1 에 따른 등변사다리꼴 직교이방성판의 좌굴계수

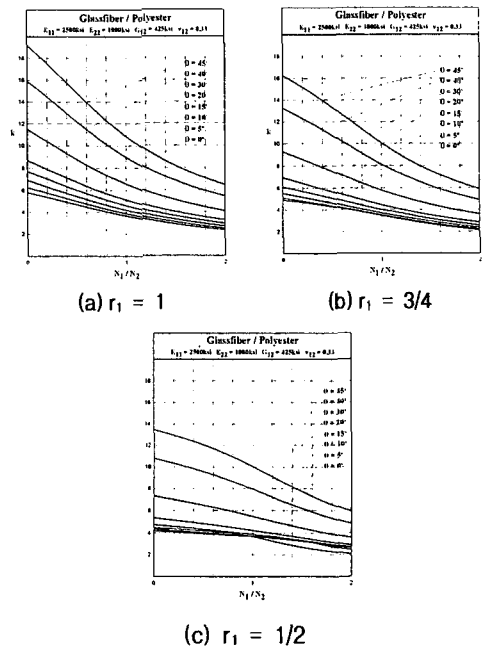


그림 5. N_1/N_2 와 θ 에 따른 등변사다리꼴 직교이방성판의 좌굴계수

4.3 선점법과 F.E.M.의 결과 비교

r_1 이 1과 1/2이고 θ 가 0° , 5.71° , 11.31° 인 경우에 대해 유한요소해석을 수행하고 그 결과를 선점법에 의한 결과와 비교하여 그래프로 제시하였다(그림 6, 7, 8 참조).

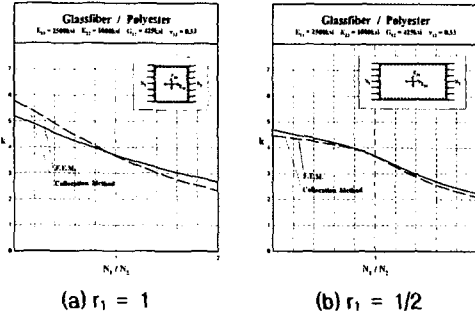


그림 6. θ 가 0° ($\tan \theta = 0$)일 때의 결과 비교

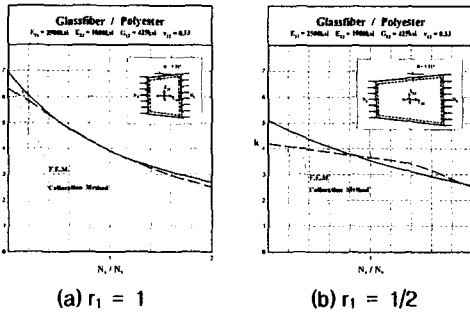


그림 7. θ 가 5.71° ($\tan \theta = 1/10$)일 때의 결과 비교

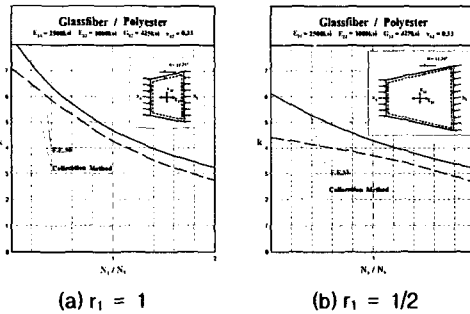


그림 8. θ 가 11.31° ($\tan \theta = 2/10$)일 때의 결과 비교

5. 결론

본 연구로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

1. 네 변이 단순지지된 등변사다리꼴 직교이방성판의 좌굴해석식을 선점법을 사용하여 유도하였다.
2. 유도된 좌굴해석식을 사용하여 등방성 및 직교이방성 직사각형판의 좌굴해석을 수행

한 결과 기존문헌의 결과와 일치하였다(그림 3 참조). 따라서, 유도된 식은 이론적으로 타당하다고 판단된다.

3. 임의의 N_1/N_2 에 대해 r_1 을 변화시켜가며 θ 에 대한 k 값을 구한 결과, θ 가 증가할수록 k 값이 증가함을 알 수 있었다. 또한, θ 가 일정할 경우, r_1 이 증가할수록 k 값이 증가함을 알 수 있었다(그림 4 참조).
4. 임의의 r_1 에 대해 θ 를 변화시켜가며 N_1/N_2 에 대한 k 값을 구한 결과, N_1/N_2 가 증가할수록 k 값이 감소함을 알 수 있었다(그림 5 참조).
5. 유한요소해석결과와 선점법에 의한 결과는 비슷한 경향을 나타내었다. 그러나 N_1 과 N_2 의 차이가 많은 경우와 θ 가 큰 경우에 오차가 크게 발생하였다. 이것은 사용한 유한요소종류, 경계조건에 대한 모델링의 차에서 생기는 것으로 판단된다.

참고문헌

1. 윤순중, 문환두, 이원복 (1995) "직교이방성 박판부재의 국부좌굴 관련 설계기준에 관한 연구," 대한토목학회 논문집, 제15권, 제3호, pp. 533-544.
2. Gerald, C. F. and Wheatley, P. O. (1999) *Applied Numerical Analysis*, 6th ed., Addison-Wesley, Menlo Park, California.
3. Klein, B. (1956) "Buckling of Simply Supported Plates Tapered in Planform," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 23, No. 2, pp. 207-213.
4. Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S. (1963) *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York.
5. GTSTRUDL (1999) *GTSTRUDL User's Manual*, Latest Revision, GTICS Systems Laboratory, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia.
6. 건설교통부 (2000) *도로교설계기준*, 사단법인 한국도로교통협회.
7. Salmon, C. G. and Johnson, J. E. (1996) *Steel Structures Design and Behavior*, 4th ed., HarperCollins, New York.

단위 환산

$$1 \text{ ksi} = 6.895 \text{ Mpa} = 70.31 \text{ kg/cm}^2$$

$$1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$$