

두께가 변하는 직교이방성판의 탄성좌굴해석

장성열* · 정상균** · 윤순중***

Elastic Buckling Analysis of a Simply Supported Orthotropic Plate with Exponentially Variable Thickness

Chang, S. R., Jeong, S. K., and Yoon, S. J.

Key Words: orthotropic, equilibrium approach, tapered plate, buckling coefficient

Abstract

The problem considered is the buckling of a rectangular orthotropic plate, tapered in thickness in a direction parallel to two sides and compressed in that direction. Curves are presented showing the variation of buckling stress coefficient with the special loads. The type of thickness variation is exponential. While this paper is presented how to design for an efficient orthotropic plate taper from physical consideration.

기호설명

- a : 판의 길이
- b : 판의 폭
- E_{11}, E_{22} : 재료의 성질방향 1과 2에 대한 탄성계수
- D_{11}, D_{22} : 재료의 성질방향 1과 2에 대한 휨강성
- G_{12} : 직교이방성판의 전단탄성계수
- N_x : x축에 대한 단위길이당 압축력
- N_{xy} : 단위길이당 전단력
- N_y : y축에 대한 단위길이당 압축력
- w : 판의 면외처짐
- m : x축에 대한 half-sine곡선의 수
- ν_{12}, ν_{21} : 성질방향 1, 2에 대한 포아슨비
- t : 판의 두께
- k : 직교이방성판의 좌굴계수
- k^* : 등방성판의 좌굴계수

1. 서론

부재의 길이방향에 따라 변하는 부재력에 대응하기 위해 강구조에 사용되는 강관의 두께를 변화시킬 수 있다면 이상적인 강구조 부재를 형성할 수 있게 된다. 1983년 프랑스와 독일에서 공동으로 길이에 따라 두께가 변하는 판의 개발에 성공한 이후 현재 유럽과 일본 등에서는 실제로 구조물에 적용되고 있으며 이 밖에도 압축력을 받는 벽체 및 항공기 날개 등에 사용되어 왔다.

두께가 변하는 판의 이용은 강재량 감소에 따른 경량화, 용접부의 감소 등의 효과로 인해 기존의 구조물에 비해 경제성과 시공성 및 구조적 성능의 향상을 얻을 수 있는 장점이 있다.

본 연구에서는 이와 같이 길이방향에 따라 두께가 변하는 판의 좌굴에 대한 이론적, 실험적 연구결과를 토대로 하여 그 사용이 증가되고 있는 복합재료의 좌굴해석에 적용시켰으며, 부재형상과 재료특성으로 인한 장점을 살린 구조용 복합재 부재의 좌굴에 대해서 연구하였다.

길이방향으로 두께가 변하는 직교이방성판의

* 홍익대학교 대학원 토목공학과 석사과정
** 홍익대학교 대학원 토목공학과 박사과정
*** 홍익대학교 토목공학과 부교수

폭비 및 재하되는 하중비에 따른 좌굴계수를 구해 그래프로 제시하였으며, 또한 좌굴계수식을 이용하여 재하되는 하중에 따른 최소한의 중량을 가지는 판의 두께를 산출하는 방법을 제시하였다.

2. 직교이방성판의 좌굴

면내일축압축력을 받으며 다양한 경계조건을 갖는 두께가 일정한 직교이방성판의 좌굴해석은 이미 여러 문헌에 발표된 바 있다⁽¹⁾. 본 절에서는 기존문헌의 결과를 참고하여 네변이 단순지지인 경계조건을 갖고 있고 길이방향으로 두께가 변하는 판에 대해서 에너지법을 적용한 좌굴해석 과정을 설명하였다.

2.1 지수함수를 이용한 좌굴하중 및 휨강성

그림 1은 서로 다른 등분포일축압축력을 받는 직교이방성판을 나타낸 것으로 네변이 단순지지되어 있고 판 전체에 대한 힘의 평형을 만족한다.

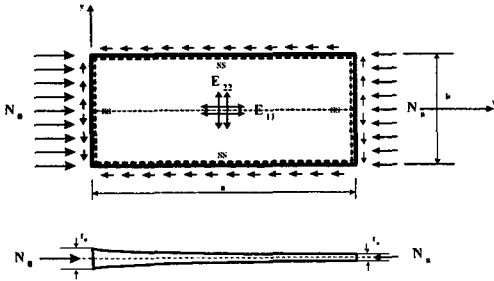


그림 1. 압축력을 받고 두께가 변하는 직교이방성판

해석과정을 단순화하기 위해 재하되는 압축력과 직교이방성판의 폭은 x 축에 대해 대칭으로 하였으며 판의 두께는 x 축 방향으로 지수함수의 형태를 취한다고 가정하였다.

고전적 판이론에 의해 등방성판의 좌굴하중은 식 (1)과 같이 정의된다⁽²⁾. 식 (1)에서 k는 판의 경계조건에 의해 좌우되는 좌굴계수이며 D는 식 (2)와 같이 정의되는 판의 휨강성이다.

$$N_{cr} = \frac{k \pi^2 D}{b^2} \quad (1)$$

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

그림 1과 같은 직교이방성판의 경우에 대해서 식 (1)을 정리하면 다음과 같으며, D_{11x} 와 D_{22x} 는 임의의 거리 x 만큼 떨어진 곳에서의 재료의 성질방향 1과 2에 대한 휨강성이다.

$$N_x = \frac{k \pi^2}{b^2} \sqrt{D_{11x} D_{22x}} \quad (3)$$

N_0 와 N_a 는 각각 판에 작용하는 압축력으로, x 만큼 떨어진 거리의 미지의 좌굴하중 N_x 는 식 (4)와 같이 비례관계를 이용한다.

비례관계를 보다 용이하게 나타낼 수 있는 지수함수를 사용하여 하중관계를 나타내면 다음과 식 (5)와 같다⁽³⁾.

$$N_x = N_0 e^{-\beta \frac{x}{a}} \quad (4)$$

$$\text{여기서 } \beta = \ln \frac{N_0}{N_a}$$

$$\frac{N_x}{N_0} = f\left(\frac{x}{a}\right) = e^{-\beta \frac{x}{a}} \quad (5)$$

휨강성과 두께 역시 압축력의 비례관계를 이용하여 식 (6) 및 식 (7)과 같이 표현할 수 있다⁽³⁾.

$$D_x = D_0 e^{-\beta \frac{x}{a}} \quad (6)$$

$$t_x = t_0 e^{-\frac{\beta}{3} \frac{x}{a}} \quad (7)$$

2.2 에너지법에 의한 직교이방성판의 좌굴

그림 1과 같은 등분포일축압축력을 받는 직교이방성판의 경우 다음 식 (8)과 같은 평형방정식을 만족해야 한다⁽³⁾.

$$\left(\frac{\partial N_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\right) = 0 \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y}\right) = 0$$

$$N_{xy}(y=0) = 0 \quad (9)$$

$$N_y(y = \pm \frac{b}{2}) = 0$$

위 식에서 전단력 N_{xy} 와 수직력 N_y 은 경계조건 식 (9)을 만족해야 하므로 N_x 를 식 (8)에 대입하여 편미분하면 식 (10), (11)과 같다.

$$N_{xy} = N_0 \left(\frac{\beta}{a} \right) y e^{-\beta \frac{x}{a}} \quad (10)$$

$$N_y = -N_0 \left(\frac{\beta}{a} \right)^2 \left(\frac{b^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right) e^{-\beta \frac{x}{a}} \quad (11)$$

그림 1같이 면내 등분포일축압축력을 받는 직교이방성판의 내부에 축적된 변형에너지와 외력이 판에 대해 한 일은 에너지법에 의해 다음과 같이 정의된다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{11}\nu_{21} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (12)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left\{ N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (13)$$

처짐곡선식은 네변이 단순지지되어 있고 x 축 방향으로는 폭(b)에 비해 길이(a)가 상대적으로 크므로 sine 함수로, y 축 방향은 cosine 함수로 식 (14)와 같이 가정할 수 있으며, N_y 와 N_{xy} 는 N_x 에 비해 아주 작은 값이고 형상비(a/b)는 상대적으로 크기 때문에 가정된 처짐식은 타당하다고 할 수 있다.⁽³⁾

$$w = w_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (14)$$

식 (14)를 에너지법의 기본식인 식 (12)와 식 (13)에 대입하고, 변형에너지 U와 외력이 한 일 T는 같으므로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$w_0^2 \frac{ab}{4} \frac{1 - e^{-\beta}}{\beta \left(1 + \left(\frac{\beta}{2\pi m} \right)^2 \right)} \left[D_{110} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2D_{110} \nu_{21} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + D_{220} \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 + 4D_{660} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 + 2D_{660} \left(\frac{\beta}{a} \right)^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]$$

$$= N_0 w_0^2 \frac{ab}{8} \frac{1 - e^{-\beta}}{\beta \left[1 + \left(\frac{\beta}{2\pi m} \right)^2 \right]} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{\beta}{2a} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{a} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) \left(\frac{\beta}{a} \right)^2 \right] \quad (15)$$

여기서 w_0 , D_{110} , D_{220} , D_{660} 은 그림 1에서 $x=0$ 에서의 처짐, 휨강성 및 비틀림강성이다. 식 (15)를 N_0 에 대해 정리하고 양변에 $b^2 / (\pi^2 \sqrt{D_{110} D_{220}})$ 를 곱해주면 직교이방성판의 좌굴계수는 다음과 같다.

$$k = \left[\sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} \left(\frac{mb}{a} \right)^2 + 2 \left\{ \nu_{12} \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} + 2 \frac{G_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\sqrt{E_{11}E_{22}}} \right\} + \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}} \left(\frac{a}{mb} \right)^2 + 2 \frac{G_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\sqrt{E_{11}E_{22}}} \left(\frac{\beta}{m\pi} \right)^2 \right] \times \frac{1}{1 - (\beta/2\pi m)^2 (\pi^2/3 - 1)} \quad (16)$$

직교이방성판의 좌굴계수에 대한 식 (16)은 등방성판의 좌굴계수식과 비교함으로써 검토할 수 있다.

$E = E_{11} = E_{22}$, $\nu = \nu_{12} = \nu_{21}$, $G = G_{12} = E/2(1 + \nu)$ 를 식 (16)에 대입하여 등방성재료에 대한 식으로 유도하면 다음과 같으며 이 식은 참고문헌 3의 등방성판의 좌굴계수(k^*)에 대한 결과와 일치한다.

$$k^* = \left[\left(\frac{mb}{a} \right)^2 + 2 + \left(\frac{a}{mb} \right)^2 + (1 - \nu) \left(\frac{\beta}{m\pi} \right)^2 \right] \times \frac{1}{1 - (\beta/2\pi m)^2 (\pi^2/3 - 1)} \quad (17)$$

따라서 지금까지 유도된 두께가 변하는 직교이방성판의 좌굴계수식은 타당하다고 할 수 있으며, x 축 방향에 대한 좌굴하중으로 나타내면 다음과 같다.

$$N_x = k \cdot \frac{\pi^2 t_x^3 \sqrt{E_{11}E_{22}}}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})b^2} \quad (18)$$

3. 두께결정

그림 1과 같은 두께가 변하는 직교이방성판에 좌굴이 발생한 경우 좌굴하중을 나타내는 식 (19)에서 두께 t_x 는 필요로 하는 최소한의 두께

를 의미한다. 따라서 계산된 t_x 는 판의 단위중량을 최소로 하는 방법이다.

Mechanical Properties		Tapered Plate Parameters		
$E_{11}=2500\text{ksi}$	$N_u=8.35 \text{ lb/in}$	$a/b=1$		
$E_{22}=1000\text{ksi}$	$N_w=3.072 \text{ lb/in}$	$b=9.70 \text{ in.}$		
$\nu_{12}=0.33$	$\beta=1$	$k=3.832$ [그림 4]		
x/b	N_x	t^*	t_x	σ_x
0.0	8.350	1.00E-02	0.216	38.579
0.1	7.555	9.17E-03	0.209	36.091
0.2	6.836	8.30E-03	0.202	33.764
0.3	6.186	7.51E-03	0.196	31.586
0.4	5.597	6.80E-03	0.189	29.549
0.5	5.065	6.15E-03	0.183	27.644
0.6	4.583	5.57E-03	0.177	25.861
0.7	4.147	5.04E-03	0.171	24.193
0.8	3.752	4.56E-03	0.166	22.633
0.9	3.395	4.12E-03	0.160	21.173
1.0	3.072	3.73E-03	0.155	19.808

표 1. 압축력에 대한 효과적인 판두께

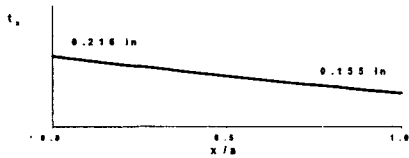


그림 2. 표 1의 결과 그래프

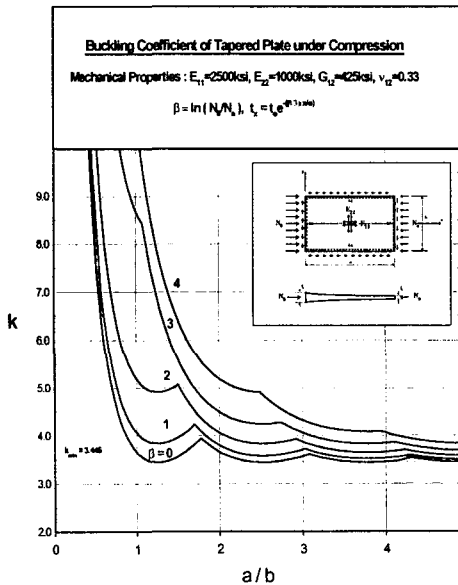


그림 3. 두께가 변하는 직교이방성판의 좌굴계수와 폭과 길이의 비

4. 결론

두께가 변하는 직교이방성판의 좌굴하중을 구할 수 있는 좌굴계수식을 유도하였고 그 결과를 기존문헌의 결과와 비교함으로써 타당성을 수학적으로 검증하였다.

본 연구에서는 하중에 비례하여 휨강성을 부여함으로써 휨강성식으로부터 수학적으로 최소한의 소요두께를 결정하는 방법을 사용하였다. 이렇게 함으로써 직교이방성판의 장점인 단위중량당 강도가 큰 특성을 고려하여 최소의 중량으로 최대의 강도를 낼 수 있는 단면의 치수를 결정할 수 있는 방법을 제시하였다.

판의 형상비(a/b)가 커질수록 최소좌굴계수는 점차 줄어들며 일정값에 수렴하였다.

이 방법은 재료의 성질이 탄성일 경우만 아니라 비탄성의 경우에도 적용이 가능하지만 본 연구에서는 섬유보강 비닐에스터나 폴리에스터 복합재의 역학적 특성을 고려하여 탄성해석만을 수행하였다.

참고문헌

- (1) 윤순종, 채수하 (1996) "직교이방성 판 요소로 구성된 개방단면 압축단주의 좌굴 강도," 대한토목학회 논문집, 11월, pp. 693-703.
- (2) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. (1963) *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Co. Inc., New York.
- (3) Pine, S. and Gerard, G. (1947) "Instability Analysis and Design of an Efficiently Tapered Plate Under Compressive Loading," *Journal Aero. Sci.*, Vol.14, Oct, pp. 594.
- (4) Wittrick, W. H. and Ellen, C. H. (1962) "Buckling of Tapered Rectangular Plates in Compression," *Aeronautical Quarterly*, Vol.13, No.4, Nov, pp. 303.
- (5) Bulson, P. S. (1969) *The stability of flat plates*, Great Britain, pp. 124-129.
- (6) 강구조연구소 (2000) "LP강판의 강교량 적용 기술", 포항종합제철주식회사.

단위환산

$$1 \text{ ksi} = 6.895 \text{ Mpa} = 70.31 \text{ kg} / \text{cm}^2$$

$$1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$$