

물성치의 불확실성을 고려한 층간강도의 최적화

조맹효*·이승윤**

Optimization of interlaminar strength with uncertainty of material properties

Maenghyo Cho, Seung Yun Rhee

Key Words: Interlaminar strength , Extended Kantorovich method , Genetic algorithm , Uncertainty , Convex Modeling

Abstract

The layup optimization by genetic algorithm (GA) for the interlaminar strength of laminated composites with free edge is presented. For the calculation of interlaminar stresses of composite laminates with free edges, extended Kantorovich method is applied. In the formulation of GA, repair strategy is adopted for the satisfaction of given constraints. In order to consider the bounded uncertainty of material properties, convex modeling is used. Results of GA optimization with scattered properties are compared with those of optimization with nominal properties. The GA combined with convex modeling can work as a practical tool for maximum interlaminar strength design of laminated composite structures, since uncertainties are always encountered in composite materials and the optimal results can be changed.

1. 서 론

자유단이 있는 복합재료 적층평판의 경우, 각 층 간의 물성치의 불연속으로 인해 자유단 근처에서 극심한 응력 집중이 발생하게 된다. 자유단에서 발생하는 층간응력은 층간분리를 야기시키고, 면내방향으로의 파손이 일어날 경우의 파괴 하중보다 작은 하중에서도 파괴를 유발하게 된다. 따라서 강도해석 및 설계 시에는 자유단 근처에서의 층간응력을 해석하는 것이 중요하다. 본 연구에서는 M.Cho[1,2]의 확장된 Kantorovich method에 의한 해석 기법을 이용하여 시간비용을 적게 들이고도 정확히 층간응력을 계산한다.

복합재료의 적층평판의 적층배열은, 제조상의 문제로 인해 그 섬유배열각이 대개의 경우 0° ,

90° , $\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 60^\circ$ 로 제한되기 때문에, 이산적인 변수로 취급된다. 유전자 알고리즘(Genetic Algorithm, GA)은 이러한 이산적인 배열 문제를 다루는 데 있어 적합하다[3,4]. 유전자 알고리즘은 초기에 임의의 염색체들로 구성된 해집합(population)을 선택, 교배, 돌연변이(selection, crossover and mutation)의 주요한 세 과정을 반복적으로 거쳐 최적해를 확률적으로 탐색한다.

한편, 복합재료 적층 구조물에서 물성치는 생산 공정상의 결함, 물성치 측정상의 오차, 사용 환경 등의 원인으로 어느 정도의 불확실성 또는 편차를 보이게 마련이다. 따라서, 그 편차를 고려함으로써 설계의 안전성과 신뢰성을 얻을 수 있게 될 것이다.

본 논문에서는 각 방향의 변형률에 허용치가 주어진 경우, 유전자 알고리즘을 사용하여 자유단이 있는 적층평판의 층간강도를 최대로 하는 적층배열을 결정하는 것을 연구 목표로 한다. 이때 물성치들의 불확실성을 고려하여 최적화를 수행하고 최적해가 바뀌는지, 그리고 어느 물성치가 층간강도에 큰 영향을 미치는지를 알아본다.

* 서울대 기계공학부

** 서울대 기계공학부

2. 강도 해석

2.1 Extended Kantorovich Method

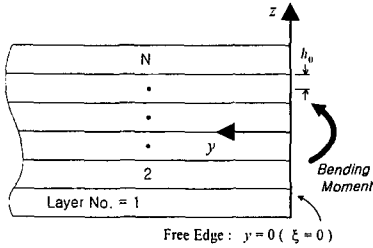


Fig.1. Composite Laminate with Free Edge

자유단이 있는, 각 층의 두께가 일정한 복합재료 적층평판의 개형이 Fig.1에 주어졌다. 선형 탄성을 가정하면 각 층에서 다음과 같은 구성방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta T \quad (1)$$

주어진 적층평판에 대해, 자유단과 아래면·윗면에서의 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \sigma_2 = \sigma_4 = \sigma_6 = 0 & \quad \text{at } y=0, b \\ \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0 & \quad \text{at } z = \pm h/2 \end{aligned} \quad (2)$$

평형방정식을 자동적으로 만족시키기 위해 Lekhnitskii 응력함수를 도입한다. 이 응력함수들은 면내방향과 두께방향 함수로 나뉘어져 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \sigma_2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = \sigma_3, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} = -\sigma_4, \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi} = -\sigma_5, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta} = \sigma_6 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, η 와 ξ 는 각각 x, y 좌표를 무차원화시킨 좌표이다.

여기서, 인장·굽힘 변형에 대해서는,

$$F = \sum_{i=1}^n f_i(\xi) g_i(\eta), \quad \Psi = \sum_{i=1}^n p_i(\xi) g'_i(\eta) \quad (4)$$

면내방향 함수들은 초기에 가정된 두께방향 함수들의 기저 집합으로부터 결정되고, 반드시 아래면·윗면에서의 traction-free 조건을 만족시켜야 한다. 초기에 두께방향 함수 $g_i(\eta)$ 는 각각 양 끝이 고정된 보와 단순지지 보의 고유모드로 가정한다.

지배방정식은 보측 가상일의 원리를 이용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V u_i \delta \sigma_{ij} dx dy dz \\ &= \int_S u_i \delta \sigma_{ij} dA - \int_V \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \delta \sigma_{ij} dx dy dz \end{aligned} \quad (5)$$

경계조건을 이용하면, 다음 식을 구할 수 있다.

$$\int_S (\Delta u \delta \sigma_x + \Delta v \delta \sigma_y + \Delta w \delta \sigma_z) dy dz = \int_S \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dy dz \quad (6)$$

식(3)을 식(6)에 대입하면, 응력들이 f_i 와 g_i 로 표현된다. f_i 와 g_i 에 대한 Euler 방정식은 식(6)에

서 구할 수 있고, 따라서 초기에 가정된 기저함수 집합으로 면내방향 함수들을 구할 수 있다.

두 번째 과정에서는, 식(6)으로 주어지는 원래의 보측 가상일에 Kantorovich 방법을 다시 적용한다. 첫 번째 과정에서 구한 f_i 와 g_i 를 대입하면, 개선된 두께방향 함수들이 구해진다. 세 번째 과정은 첫 번째 과정과 비슷하다.

2.2 Quadratic Delamination Criterion

본 연구에서는 주어진 면내방향의 강도 조건에 대해 층간강도를 최대화하는 적층 배열을 찾고자 한다. 변형률의 허용치에 대한 구속 조건은 아래 식 (7)과 같이 주어진다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} < -4.751 \times 10^{-4}, \quad \epsilon_{xx} > 7.137 \times 10^{-4} \\ \epsilon_{xx} < -3.248 \times 10^{-3}, \quad \epsilon_{yy} > 1.138 \times 10^{-3} \\ |\epsilon_{xy}| < 2.311 \times 10^{-3} \end{aligned} \quad (7)$$

층간응력들에 대해서는 Whitmer와 Nuismer[5]가 제안한 최대 평균응력을 이용하여 Brewer와 Lagace[6]가 제시한 Quadratic Delamination 척도를 사용한다. 평균응력은 아래 식(8)로 계산하고, Quadratic Delamination 척도는 식(9)로 표현된다.

$$\bar{\sigma}_j = \frac{1}{h_0} \int_0^{h_0} \sigma_j d\xi \quad (j=3,4,5) \quad (8)$$

$$(\bar{\sigma}_3/Y_1)^2 + (\bar{\sigma}_5/S)^2 < 1 \quad (9)$$

3. 컨벡스 모델링

컨벡스 모델링은, 불확실성을 보이는 양을 다루기 위해 확률 분포를 가정하는 확률적인 접근법과 달리, 분포 범위에 대한 정보만을 필요로 하는 방법이다. 물성치의 분포 범위로부터 그 편차가 존재하는 컨벡스 집합을 만들고 목적함수를 이들 편차에 대해 선형화하게 된다. 따라서 목적함수의 최대값은 편차로 이루어지는 컨벡스 집합의 경계에 존재하게 되므로 계산량을 줄이며 물성치의 불확실성을 고려할 수 있다. 컨벡스 모델링 기법을 도입하는 과정은 다음과 같으며 적용에는 참고문헌[7~10]에서 찾아볼 수 있다.

3.1 Formulation of Convex Modeling

첫 단계로 목적함수를 불확실성을 갖는 물성치의 편차에 대해 선형화시켜야 한다. 여기서는 $E_L, E_T, \nu_{LT}, G_{LT}$ 가 공칭값을 중심으로 일정 범위 내에 분포한다고 가정한다. 최적화를 위한 목적함수 F 는 적층평판을 파괴하지 않는 최대 층간강도이며, 이를 δ_i 의 일차항까지 고려하여 테일러 전개를 하면 다음과 같다.

$$F|_{E_i+\delta_i} = F|_{E_i} + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial F}{\partial E_i} \right|_{E_i} \cdot \delta_i = F|_{E_i} + (f)^T (\delta) \quad (10)$$

$$(E_1 = E_L, E_2 = E_T, E_3 = \nu_{LT}, E_4 = G_{LT})$$

여기서, E_i^0 는 각 물성치의 공칭값이고, 목적함수의 일차도함수와 편차는 다음과 같다.

$$(f)^T = \left[\frac{\partial F}{\partial E_1} \Big|_{E_1}, \frac{\partial F}{\partial E_2} \Big|_{E_2}, \frac{\partial F}{\partial E_3} \Big|_{E_3}, \frac{\partial F}{\partial E_4} \Big|_{E_4} \right] \quad (11)$$

$$\{\delta\}^T = [\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4]$$

δ_i 가 컨벡스 집합을 구성한다고 하면, 식(10)의 선형성으로부터 최대값은 컨벡스 집합의 경계에 있게 된다. 타원체로 구성된 컨벡스 집합은 다음과 같이 구해진다.

$$Z(e) = \left\{ \delta : \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_i^2}{e_i^2} \leq 1 \right\} \quad (12)$$

변분법을 이용하여 다음의 Lagrangian을 최소화하면 식(14)와 같이 e_i 를 구할 수 있다.

$$L = C e_1 e_2 e_3 e_4 + \lambda \left(\frac{\Delta_1^2}{e_1^2} + \frac{\Delta_2^2}{e_2^2} + \frac{\Delta_3^2}{e_3^2} + \frac{\Delta_4^2}{e_4^2} - 1 \right) \quad (13)$$

$$e_i = \sqrt{n \Delta_i} \quad (14)$$

이상의 과정으로 물성치의 편차가 존재하는 컨벡스 집합이 유도되었다. 따라서 불확실성을 보이는 물성치가 δ_i 의 편차를 가질 때 목적함수를 최대화하는 문제는 다음 형태로 나타낼 수 있다.

$$F_{\max} = \text{Max} \{ F|_{E_i} + (f)^T \{\delta\} \}, \{\delta\} \in Z(e) \quad (15)$$

최대값 F_{\max} 를 구하기 위해 변분법을 사용하면 최대값을 갖는 $\{\delta\}$ 는 다음과 같다.

$$\{\delta\} = \pm \frac{1}{\sqrt{(f)^T \{\epsilon\}^{-1} \{f\}}} \{\epsilon\}^{-1} \{f\} \quad (16)$$

따라서 물성치의 불확실성을 고려한 층간강도의 최대값 F_{\max} 는 다음과 같다.

$$F_{\max} = F|_{E_i} \pm \sqrt{(f)^T \{\epsilon\}^{-1} \{f\}} \quad (17)$$

여기서, F_{\max} 를 보수적으로 평가하기 위해 음의 부호를 채택한다.

$$F_{\max} = F|_{E_i} - \sqrt{\sum_{i=1}^4 \left(2\Delta_i \cdot \frac{\partial F}{\partial E_i} \Big|_{E_i} \right)^2} \quad (18)$$

4. 유전자 알고리즘

섬유배열각이 $0^\circ, 90^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ$ 로 제한되기 때문에 해집합(population)을 구성하는 각각의 염색체(chromosome)는 0, 1, 2, 3, 4로 이루어진다. 0은 0° , 4는 90° 로, 1, 2, 3은 그 위치에 따라 각각 $\pm 30^\circ, \pm 45^\circ, \pm 60^\circ$ 로 decoding된다.

[홀수번째 : +, 짝수번째 : -]

최적화에 있어서 구속조건은 두 가지가 적용된다. 적층배열은 balanced symmetric 적층으로 하며, matrix의 균열(cracking)을 방지하기 위해 연속으로 같은 섬유배열각을 가진 lamina를 4장 이상 연속으로 적층하지 않는다. 이러한 구속조건을 고려하기 위해 본 연구에서는 'recessive-gene repairing'을 적용한다. 즉, 임의로 만들어진 해집합을 구속조건을 만족하도록 고치는 것이다. 균형을 이루게 하기 위해 1의 개수가 홀수인 경우, 그 중 가장 안쪽의 1을 0이나 2로, 혹은 가장 안쪽의 0이나 2를 1로 바꾸어준다. 1의 개수가 짝수면 자동적으로 균형을 이루게 된다. 2, 3의 경우도 마찬가지로 한다. 4장 연속에 관한 구속조건은, 4장 연속된 0이나 4 중 가장 안쪽을 4나

0으로 바꾸어주면 된다. 이러한 repairing 기법은 A. Todoroki와 R.T. Haftka의 연구[11]에서 그 신뢰성이 검증되었다.

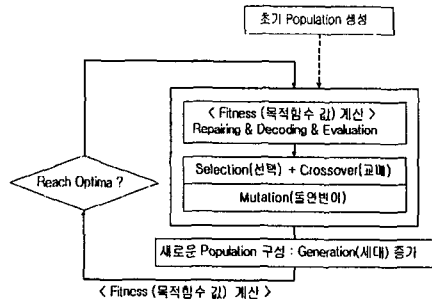


Fig.2. Flowchart of GA

5. 수치 결과

본 연구에서는 적층판의 층의 수를 16장으로 고정하였다. Table.1.에 인장과 굽힘의 경우에 대한 최적해와 층간강도가 나타나 있다. 불확실성의 편차는 각각 1%에서 5%까지 변화시켜 보았다. 인장의 경우에는, 편차가 4%, 5%일 때의 최적해가 바뀌고, 굽힘의 경우는 모든 편차에서 같은 최적해가 나왔다. 새로운 최적해와 이전의 최적해의 층간강도를 각 편차에 대해 나타낸 것이 Figs.3~4에 나타나 있다. 편차가 없을 때의 최적해가 불확실성을 고려함에 따라 그 순위가 바뀔 수 있다.

Table.1. Optimum Layouts and their Fitnesses

Cases	Optimum Layouts	Fitnesses
for Extension (deviation : 4%)		
at nominal values	[60/-60/60/0/0/-60/60/-60]s	9.36×10^6
with uncertainty	[60/-60/0/60/0/-60/60/-60]s	6.79×10^6
for Bending (deviation : 3%)		
at nominal values	[60/0/0/0/-60/0/0/90]s	1.243
with uncertainty	[60/0/0/0/-60/60/0/-60]s	0.842

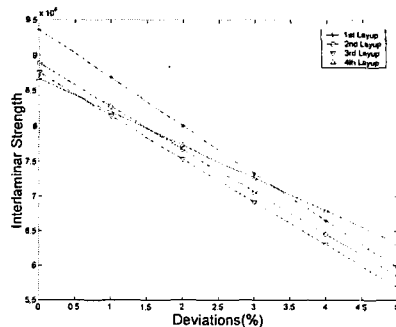


Fig.3. Changes of interlaminar strength of four best layouts (for Extension)

6. 결론

복합재료 적층평판의 층간강도를 최대화하는 적층배열을 찾기 위해 Repairing 기법을 이용한 GA를 사용하였다. 유한요소해석에 비해 아주 적은 시간비용을 들여 층간응력을 계산했고 이로써 층간강도를 고려한 최적화가 가능했다. 또한 범위가 주어진 물성치의 불확실성을 컨벡스 모델링을 통하여 고려하였고, 민감도의 크기에 따라 최적해가 바뀔을 알 수 있었다. 본 최적화 기법은 물성치에 불확실성이 있기 마련인 실제 문제에서, 불확실성을 고려한 강도에 대한 정보를 제공할 수 있다. 본 방법은 층간강도가 중요한 설계요인이 되는 실제적인 최적화 문제에 효과적으로 적용될 수 있을 것으로 판단된다. 물성치에 대한 불확실성 뿐만 아니라 두께에 대한 불확실성도 함께 고려한 연구가 진행 중에 있다.

후 기

이 연구는 기계분야 BK21의 지원을 받아서 수행되었고 이에 감사를 드립니다.

참고문헌

- [1] Cho, M., Yoon, J., Free-edge interlaminar stress analysis in composite laminates by the extended Kantorovich method, *AIAA Journal*, Vol.37, No.5, 1999, pp.656-660.
- [2] Cho, M., Kim, H.S., Iterative free-edge stress analysis of composite laminates under extension, bending, twisting, and thermal loadings, *Int J Solids and Struct*, Vol.37, 2000, pp.435-459.
- [3] R. Riche, R.T. Haftka "Optimization of laminate stacking sequence for buckling load maximization by genetic algorithm", *AIAA Journal*, Vol.31, No.5, 1993, pp.951-956.
- [4] B. Liu, R.T. Haftka, M.A. Akgün, A. Todoroki, "Permutation genetic algorithm for stacking sequence design of composite laminates", *Comput Methods Appl Mech Engrg*, Vol.186, 2000, pp.357-372.
- [5] Whitney, J.M., Nuismer, R.J., Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations, *J Compos Mater*, 1974, Vol.8, pp.253-265.
- [6] Brewer, J.C., Lagace, P.A., Quadratic Stress Criterion for Initiation of Delamination, *Journal of Composite Materials*, Vol.22, 1988, pp.1141-1155.
- [7] Y. Ben-Haim, I. Elishakoff, "Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics" Elsevier, Amsterdam, 1990, 1994, pp.1401-1405.
- [8] I. Elishakoff, P. Colombi, "Combination of probabilistic and convex models of uncertainty when scarce knowledge is present on acoustic excitation parameters", *Comput Methods Appl Mech Engrg*, Vol.104, 1993, pp.187-209.
- [9] I. Elishakoff, R.T. Haftka, J. Fang, "Structural design under bounded uncertainty- optimization with anti-optimization", *Comput Struct*, Vol.53, 1994, pp.1401-1405.
- [10] 김태욱, 신호철, "불확실한 물성치를 갖는 복합재료 적층평판의 파괴 예측", *대한기계학회논문집 A권*, 제24권 제1호, 2000, pp.259-268.
- [11] Todoroki, A., Haftka, R.T., Stacking sequence optimization by a genetic algorithm with a new recessive gene like repair strategy, *Composite Part B*, Vol.29, No.3, 1998, pp.277-285.

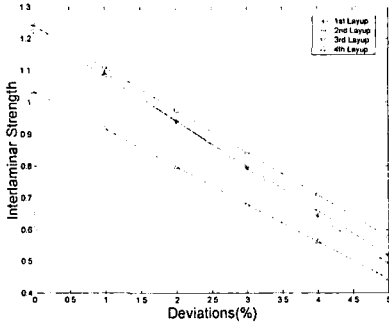


Fig.4. Changes of interlaminar strength of four best layups (for Bending)

Table.2. Sensitivities of Objective Function

Properties	old optimum	new optimum
E_L	+2.358	+2.347
E_T	+4.298	+3.315
ν_{LT}	+0.201	+2.460
G_{LT}	-5.682	-4.678

물성치의 불확실성을 고려하지 않은 경우의 최적해와 고려한 경우의 새로운 최적해에 대한 층간강도의 민감도가 Table.2에 정리되어 있다. G_{LT} 가 가장 큰 영향을 미치고, 다음으로 E_T 의 영향이 큼을 알 수 있다. Figs.3~4와 Table.2에서 알 수 있듯이, 새로운 최적해가 공칭값에서의 최적해보다 편차의 증가에 따른 층간강도의 감소율이 적음을 알 수 있고, 이로 인해 컨벡스 모델링에 의한 층간강도가 이전의 최적해보다 크게 나타났다. 이는 새로운 최적해의 물성치에 대한 민감도가 상대적으로 작기 때문이다.

Table.3에 정리된 GA 파라미터들을 이용하여 굽힘의 경우에 대해 최적화를 수행하였다. N_{op} 를 전역 최적해에 도달한 횟수, N_{it} 를 최적화 수행 횟수라고 하면, 신뢰도 R 은 다음같이 정의된다.

$$R = 100 \times \frac{N_{op}}{N_{it}} \quad (19)$$

모든 population size에 대해 100%의 신뢰도를 보였다. 가장 큰 population size인 24일 때 가장 빨리 최적해에 도달했고, 최적해에 도달하는 평균 세대 수는, 물성치의 불확실성을 고려하지 않은 경우와 고려한 경우 각각, 20.0세대와 27.9세대였다.

Table.3. GA parameters

Parameters	Values
Generation Upper Limit	150
Iteration Number	30
Population Size (PopSize)	15~24
Probability of crossover (Pcr)	0.9
Probability of mutation (Pmu)	0.1