

# 솔리드 요소를 이용한 복합재 샌드위치의 저속충격 해석

박정 • 박훈철 • 윤광준(건국대학교 항공우주공학과)  
• 구남서(경북대학교 기계공학부)

## ANALYSIS OF LOW-VELOCITY IMPACT ON COMPOSITE SANDWICH USING A SOLID ELEMENT

Jung Park, Hoon Cheol Park, Kwang Joon Yoon (Konkuk University) and  
Nam Seo Goo(Kyungbook University)

### ABSTRACT

Low-velocity impact on composite sandwich panel has been investigated. For the study, a finite element program is coded using 18-node assumed strain solid element and Newmark-beta method. Contact force is calculated from a proposed modified contact law. The finite element code is verified by solving typical example. The calculated impact behavior agreed well with experimental result.

### 1. 서론

복합재료의 저속충격에 관한 많은 연구가 진행되어 왔다[1-4]. 샌드위치에 대한 실험적인 연구가 이론적인 연구보다 상대적으로 활발히 진행되고 있는게 사실인데 샌드위치의 이론적인 저속충격 해석이 상대적으로 어렵기 때문에 이에 대한 연구가 보고되기 시작한 것은 최근의 일이다[5-8]. Palazotto[5]는 이를 위해 elastic foundation model을 제안했다. Fat와 Park[6]는 충격이 진행되는 전체과정을 세가지로 나누고 각각에 다른 수학적 모델을 적용했다. 최근에 Anderson과 Medenci[7]는 저속충격하의 복합소재 빔에 삼차원 요소를 사용하는 것을 제안했다.

샌드위치의 이론적인 연구가 어려운 이유는 접촉하중과 압입량의 관계를 명확히 규명하기가 어렵기 때문이다. 수정된 Hertz의 접촉법칙[4] 역시 이를 정확히 예측하지는 못한다. 가능한 한가지 시도는 심재의 물성치가 전체 굽힘 거동에는 그리 많은 영향을 주지 않는다는 생각에서 물성치를 줄이는 방법이 있다. 또 다른 시도는 수정된 Hertz의 접촉법칙의 지수 1.5를 변수화 하는 방법이다. 이를 위해 수정된 Hertz의 접촉법칙에서 두께 방향의 등가 탄성계수를 위해 혼합법칙을 사용했다.

저속충격 해석을 위해 18 절점 가정 변형을 솔리드요소[9]를 사용했고 시간 적분을 위해 Newmark-beta 방법[10]을 사용해 유한요소 해석을 수행했다.

### 2. 정식화

#### 지배 방정식

유한요소 정식화에서 일반적인 동적 거동에 관한 힘의 평형 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{M}$ 은 전체 질량행렬,  $\mathbf{K}$ 는 전체 강성행렬,  $\mathbf{F}$ 는 전체 하중벡터,  $\ddot{\mathbf{q}}$ 는 전체 가속도벡터이고  $\mathbf{q}$ 는 전체 변위벡터를 의미한다. 충격은 매우 짧은 시간에 일어나기 때문에 구조물의 감쇠는 저속충격 해석에서 일반적으로 무시될 수 있다. 유한요소 해석을 위해서 18절점 가정 변형을 솔리드 요소[9]를 사용했는데 이 요소는 잠김현상을 방지하고 샌드위치 구조를 묘사하는데 효과적이다.

#### 시간 적분

식 (1)이 시간에 대한 미분을 가지고 있기 때문에 해석을 위해 시간에 대한 적분을 수행해야 하는데 이를 위해 Newmark-beta 방법을 사용해 감쇠를 무시한 경우 그 표현은 아래와 같다.

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + [(1-\delta)\ddot{\mathbf{q}}_n + \delta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}] \Delta t$$
$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \dot{\mathbf{q}}_n \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{q}}_n + \beta \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \right] \Delta t^2 \quad (2)$$

여기서  $\beta=0.25$ ,  $\delta=0.5$  이고,  $\Delta t$ 는 시간 간격을 의미하며 첨자  $n+1$ 과  $n$ 은 적분 단계를 표시한다. 식(2)는 식(1)에 대입되어 또한 아래와 같이 표시된다.

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{q}_{n+1} = \bar{\mathbf{F}}_{n+1} \quad (3)$$

여기서

$$\bar{\mathbf{K}} = a_0 \mathbf{M} + \mathbf{K}$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{M} (a_0 \mathbf{q}_n + a_1 \dot{\mathbf{q}}_n + a_2 \ddot{\mathbf{q}}_n) \text{이고,}$$

$$a_0 = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}, \quad a_1 = \frac{1}{\beta(\Delta t)}, \quad a_2 = \frac{1-2\beta}{2\beta} \text{이다}$$

#### 수정된 접촉법칙

많은 논문에서 복합소재의 저속충격의 해석에 다음처럼 수정된 Hertz의 접촉 법칙을 사용한다.

$$f = k\alpha^{1.5}, \quad k = \frac{4}{3} \sqrt{R} \left( \frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1}{E_T} \right)^{-1} \quad (4)$$

여기서  $f$ 는 접촉 하중,  $\alpha$ 는 복합소재의 압입량,  $R$ 은 충격체의 반지름,  $\nu$ 와  $E$ 는 각각 충격체의 프아송 비와 탄성계수를 의미한다.  $E_T$ 는 복합소재의 두께방향의 탄성계수이다.

본 논문의 샌드위치 해석시 이  $E_T$ 를 결정하기 위해 아래와 같은 혼합법칙을 사용한다.

$$E_T = \frac{E_f E_c}{\nu_f E_c + \nu_c E_f} \quad (5)$$

여기서  $E_f$ 는 적층판의 두께 방향 섬유 방향의 탄성계수,  $E_c$ 는 심재의 두께 방향 탄성 계수,  $\nu_f$ 는 적층판의 체적비,  $\nu_c$ 는 심재의 체적비를 가리킨다.

복합소재의 저속충격 해석에서 대부분의 연구는 식(4)의 지수항을 1.5로 사용한다. 그러나 식(10)의 Hertz에 의한 유도는 두꺼운 무한 등방성 평판에 등방성 재료인 공이 접촉하는 가정을 통해서이다. 따라서 샌드위치 재료에 대해서는 아래와 같이 지수를 변수화 하여 수정하는 방법이 유효할 수 있다.

$$f = k\alpha^N, \quad k = \frac{4}{3} \sqrt{R} \left( \frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1}{E_T} \right)^{-1} \quad (6)$$

여기서  $E_T$ 는 식(5)에서 산출된 값을 사용했다.

#### 접촉하중과 동적거동의 산출

식(3)에서  $\mathbf{F}_{n+1}$ 는  $n+1$ 단계에서 충격하중 벡터이다. 충격하중 벡터의 계산시 참고문헌 [4]에서 사용한 과정을 사용했다. 여기서 접촉하중 벡터는 아래와 같이 표현된다.

$$\mathbf{F}_{n+1} = f_{n+1} \mathbf{U} \quad (7)$$

여기서  $f_{n+1}$ 는  $n+1$ 단계의 접촉하중의 크기를 말

하고  $\mathbf{U}$ 는 접촉이 가해지는 점에서만 단위 힘을 가지고 그 외의 모든 성분은 영이 되는 단위하중 벡터이다.

$n+1$ 단계에서 전체 변위벡터  $\mathbf{q}_{n+1}$ 는 다음과 같이 두 가지 성분으로 나누어 질 수 있다

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}'_{n+1} + \mathbf{q}''_{n+1} \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{q}'_{n+1}$ 는 충격시 동적효과에 의한 응답이고,

$\mathbf{q}''_{n+1}$ 는 접촉하중에 의한 변위이다. 그러므로 식(3)은 다음과 같이 두 가지 독립된 식으로 표현될 수 있다.

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{q}'_{n+1} = \mathbf{M} (a_0 \mathbf{q}_n + a_1 \dot{\mathbf{q}}_n + a_2 \ddot{\mathbf{q}}_n) \quad (9a)$$

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{q}''_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} = f_{n+1} \mathbf{U} \quad (9b)$$

만약 단위하중 벡터인  $\mathbf{U}$ 에 의한 각 단계의 변위벡터를  $\Delta''$ 로 가정하면 식(9b)로부터 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\bar{\mathbf{K}} \Delta'' = \mathbf{U} \quad (10a)$$

$$\mathbf{q}''_{n+1} = f_{n+1} \Delta'' \quad (10b)$$

식(9b)는 기하학적 선형인 경우에만 성립한다. 따라서 식(8)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}'_{n+1} + f_{n+1} \Delta'' \quad (11)$$

이렇게 해서  $(i+1)$ 단계에서 접촉하중의 크기인  $f_{n+1}$ 을 구해 충격하중에 의한 거동을 구할 수 있게 된다. 본 연구에서는 접촉지역을 한 점으로 가정하였다.  $f_{n+1}$ 을 구하기 위해서는 접촉점에서 충격방향으로의 변위를 고려해야 하는데 이를 위해  $(i+1)$ 단계의 압입량  $\alpha_{n+1}$ 은 아래와 같이 표현된다.

$$\alpha_{n+1} = \delta_{n+1}^S - \delta_{n+1}^C \quad (12)$$

위 식에서  $\delta_{n+1}^C$ 는 샌드위치의 중앙면에서 접촉점의 변위인데 이는 식(10)에서  $\mathbf{q}_{n+1}$ 의 접촉점 성분이다. 따라서 접촉점에서 식(11)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\delta_{n+1}^C = \delta'_{n+1} + f_{n+1} \delta'' \quad (13)$$

여기서  $\delta'_{n+1}$ 는  $\mathbf{q}'_{n+1}$ 의 성분으로서 접촉지점에서 관성력에 의한 수직방향 변위이고  $\delta''$ 는  $\Delta''$ 의 성분으로서 충격지점에서 단위 접촉하중에 의한 수직방향 변위이다.  $\delta_{n+1}^S$ 는  $(n+1)$ 단계에서 충격체의 변위성분인데 이는 다음과 같이 Newton의 제2법칙으로 정의할 수 있다.

$$\delta_{n+1}^S = \delta_n^S + \nu_n \Delta t - \frac{1}{2} (f_{n+1} / m) (\Delta t)^2 \quad (14)$$

여기서  $\nu_n$ 과  $m$ 은  $(n)$ 단계에서 충격체의 속도와

질량을 각각 가리키고 식(13), (14)를 식(12)에 넣으면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\alpha_{n+1} = \delta_n^S + v_n \Delta t - \frac{1}{2}(f_{n+1}/m)(\Delta t)^2 - \delta'_{n+1} - f_{n+1} \delta'' \quad (15)$$

(15)식을 (6)식에 대입하면 결국 우리는 다음과 같은 접촉하중-압입량 관계식을 구할 수 있다.

$$f_{n+1} = k \left[ \delta_n^S + v_n \Delta t - \frac{1}{2}(f_{n+1}/m)(\Delta t)^2 - \delta'_{n+1} - f_{n+1} \delta'' \right]^N \quad (16)$$

위 식은 비선형으로서  $f_{n+1}$  을 구하기 위해서 Newton-Rapson 방법을 사용해야 한다. 충격체의 초기속도는 주어지고 (n+1)단계의 속도  $v_{n+1}$  는 (n)단계의 값으로 구할 수 있으며 (n+1)단계의 접촉하중은 다음 식으로 구할 수 있다.

$$v_{n+1} = v_n - (f_{n+1}/m)\Delta t \quad (17)$$

### 3. 해석 예제

#### 등방성 평판의 충격

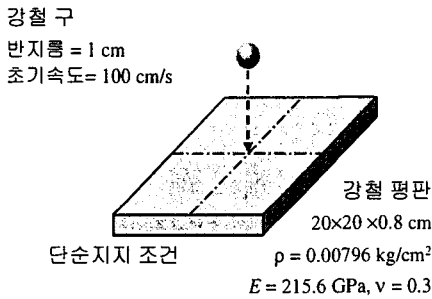


그림 1. 강철 평판의 저속 충격

Karas[11]는 그림 1의 예제에서 해석적인 방법으로 저속충격해석 거동을 구했다. 본 논문에서는 개발 프로그램의 검증에 위해 이 문제의 해석을 수행했다.

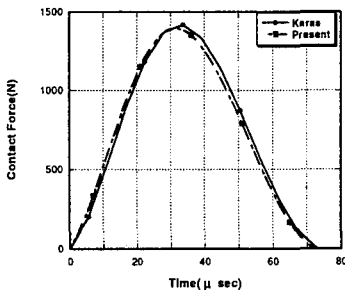


그림 2. 시간에 대한 접촉 하중

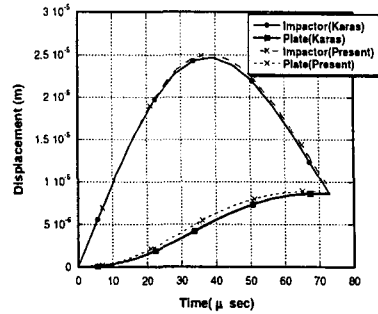


그림 3. 시간에 대한 변위

유한요소해석으로 계산한 접촉하중은 그림 2와 같이 참고 문헌[11]과 비교했을 때 잘 일치하고 충격체의 변위와 평판의 변위 역시 그림3에서 유사한 결과를 볼 수 있다.

#### 샌드위치의 충격 해석

본 논문에서 샌드위치 패널에 저속충격이 가해지는 경우에 대해 두께 방향의 탄성계수(식 (4)의  $E_T$ )를 식(5)의 혼합법칙을 사용해 수정하기로 했다. 또한 충격이 가해지는 동안 심재에 굽힘이나 압축 같은 다른 하중의 영향은 무시할 수 있어 식(5)에서  $E_c$ 의 값을 줄여서 사용하는 방법을 시도했다. 동시에 식(4)의 지수 역시 수정하는 방법을 사용했다.

해석은 참고문헌[12]의 복합소재 샌드위치의 예제를 이용 실험결과와 비교했다. 물성치는 표 1과 같다.

표 1. 물성치

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$G_{12}$	$G_{23}$	$G_{13}$	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\nu_{13}$
면재	142 GPa	9.8 GPa	9.8 GPa	7.1 GPa	7.1 GPa	7.1 GPa	0.3	0.3	0.3
심재	0.352 MPa	0.179 MPa	137.9 MPa	0.441 MPa	24.13 MPa	44.82 MPa	0.3	0	0

예제에서 사용한 심재의 두께는 25.4mm이고 면재의 적층각은 [0/90]으로 두께는 3.25mm를 사용했다. 전체적인 기하학적 형상은 102×102×31.9mm이다. 충격체는 반지름이 12.7mm, 질량이 1.61kg이고 초기속도를 1.2m/s로 해석했다. 접촉법칙에서 심재의 전단탄성 계수는 20%를 사용했고 지수는 1.35로 했다.

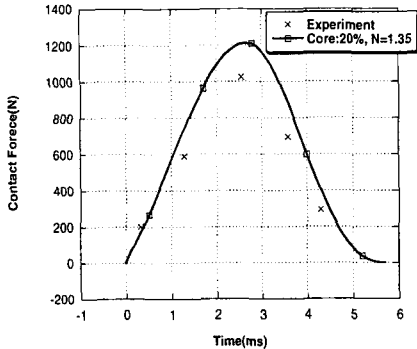


그림 4. 시간에 대한 접촉 하중

해석결과는 그림 4와 같이 참고문헌[12]의 실험과 비교시 유사한 결과를 보임을 알 수 있다.

#### 4. 결론

본 논문에서 저속충격을 받는 복합재 샌드위치의 거동을 규명하기 위해 유한요소 코드를 개발했다. 코드의 정확성은 고전적인 저속충격 문제를 푸는 것으로 검증했다. 이 코드를 사용하여 저속충격하의 샌드위치의 접촉하중을 구하는 해석을 시도하여, 복합재 샌드위치를 위한 수정된 접촉법칙을 제시하였다. 두께 방향의 등가 탄성계수는 혼합법칙을 사용하여 계산하고 지수를 변경하면 샌드위치의 저속충격 해석이 가능함을 알 수 있었다. 그러나, 범용한 경우에 해석이 가능한 혼합법칙과 지수의 관계를 명확히 할 필요성이 제기되어 이에 관한 연구를 진행중이다.

#### 후 기

본 과제는 국방과학연구소에서 지원 받아 수행되었습니다.

#### 참고문헌

[1] A. Aggour and C.T. Sun, Finite element analysis of a laminated composite plate subjected to circularly distributed central impact loading , *Computers and Structures*, Vol.28, No.6, 1988, pp.729-736.  
 [2] H.T. Wu and F. Chang, Transient dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact , *Computers and Structures*, Vol.31, No.3, 1989, pp.453-466.  
 [3] C.T. Sun and W.J. Liou, Investigation of laminated composite plated under impact dynamic loading using a three-dimensional hybrid stress finite element method , *Computers and Structures*, Vol.33, No.3,

1989, pp.879-884.  
 [4] C.L. Liao and J.S. Tsai, Dynamic analysis of laminated composite plates subjected to transverse impact using a partial mixed 3-D finite element , *Computers and Structures*, Vol.53, No.1, 1994, pp.53-61.  
 [5] A.N. Palazotto, E.J. Herup and L.N.B. Gummadi, Finite element analysis of low-velocity impact on composite sandwich plates , *Composite structures*, Vol.49, 2000, pp.209-227.  
 [6] M.S.H. Fatt and K.S. Park, Dynamic model for low-velocity impact damage of composite sandwich panels-Park A: Deformation , *Composite structures*, Vol.52, 2001, pp.335-351.  
 [7] T. Anderson and E. Madenci, Experimental investigation of low-velocity impact characteristics of sandwich composites , *Composite structures*, Vol.50, 2000, pp.239-247.  
 [8] L. Torre and J.M. Kenny, Impact testing and simulation of composite sandwich structures for civil transportation, *Composite structures*, Vol.50, 2000, pp.257-267.  
 [9] Y.H. Kim and S.W. Lee, "A Solid Element Formulation for Large Deflection Analysis of Composite Shell Structures," *Computers and Structures*, Vol.30, pp.269-274, 1988.  
 [10] N.M. Newmark, A method of computation for structural dynamics , *Journal of Mech. Div., ASCE*, Vol. 85, 1959, pp.67-94  
 [11] K. Karas, Platten unter seitlichem stob , *Ingeieur Archiv*, Vol.10, 1939, pp.237-250.  
 [12] T.A. Anderson and E. Madenci, A simplified dynamic low-velocity impact model for sandwich composites based on three-dimensional quasi-static analyses, *42st AIAA/ASME/ ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Seattle, WA, USA, April 16-19, 2001