

열-전기-기계 하중을 받는 스마트 복합재 평판의 고차 지그재그 유한요소의 개발 및 성능 평가

오진호* · 조맹효**

Development and Assessment of Higher Order Zig-zag Theory for smart composite plates under mechanical, thermal, and electric loads

Jinho Oh^{*}, Maenghyo Cho^{**}

KEY WORDS : Finite Element Method, Uncoupled theory, Zig-Zag theory, Piezoelectric(압전 하중)

ABSTRACT

A partially coupled thermo-piezoelectric-mechanical triangular finite element model of composite laminates with surface bonded piezoelectric actuators, subjected to externally applied mechanical load, temperature change load, electric field load is developed. The governing differential equations are obtained by applying the principle of free energy and variational techniques. A higher order zigzag theory displacement field is employed to accurately capture the transverse shear and normal effects in laminated composite plates of arbitrary thickness. Nonconforming shape functions by Specht are employed in the transverse displacement variables. Numerical examples demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed triangular plate element.

1. 서론

피에조층과 복합재료가 서로 부착되어 있는 스마트 구조물은 센싱, 액추에이터, 제어의 관점에 있어서 중요하다. 이러한 복잡한 형상을 갖는 스마트 구조물을 해석하기 위해 본 논문은 유한요소 기법을 도입하였다.

복합재료 거동을 해석하는 기법에는, 가장 기본적인 해석 방법으로 1 차 전단 변형 이론(Mindlin Plate theory[1-2])이 있다. 1 차 전단 변형 이론의 유한 요소는 isoparametric 이므로, 유한요소 모델링 하는데 있어서, 별다른 어려움이 없다. 그러나 판이 얇아짐에 따라 shear locking 문제가 발생하기 때문에, 이를 해결하기 위한 연구들이 많이 수행되어야 한다. 1 차 전단 변형 이론의 장점으로는, 에너지함수에 종속 변수의 1 차 미분값만 나타나므로, C_0 형상함수를 사용할 수 있다. 즉, 스마트 구조물에서, 물리적인 의미가 있는 자유도를 사용하기 때문에, 쉽게 경계조건을 부가할 수 있다. 단점은, 층마다 서로 다른 변형률을 갖는 복합재료의 경우에 있어서는 전단응력 연속조건을

만족 시키지 못한다는 점이다.

그리고, 각층마다 독립적인 변위장을 가정하는 C_0 isoparametric 형상함수를 사용하는 layerwise 이론[6]은 층의 수가 많아질수록 자유도가 증가하기 때문에, 계산량이 많아 지는 단점이 있다. 그러나 C_0 유한요소라는 장점과 구조물에 있어서 정확한 응력을 예측할 수 있다는 장점으로 종종 사용되어진다.

이에 반해 본 논문에서 사용한 subparametric nonconforming 삼각형 요소[3-4]는, 층간 전단응력 연속조건을 만족시킬 수 있고, 스마트 구조물의 윗면과, 아랫면에 무전단응력 상태를 적용시킬 수 있으므로, 자유도를 구속조건 식 만큼 감소시킬 수 있다. 이 요소는 Mindlin 요소와는 달리 처짐의 2 번 미분이 변형에너지에 나타나므로, C_1 연속조건을 만족하는 형상함수를 사용해야 한다. 본 논문의 요소개발에 있어서, 고려한 내용은 구조물이 기계, 열, 전기 하중이 작용하는 환경에 있을 때, 횡 방향 변형이다. 이 효과를 고려하기 위해, 횡 방향 수직변위를 포물선으로 가정[5]하여, 횡 수직변형을 고려하였다. 여기서, 추가적으로 발생된 자유도 η_1, η_2 는 처짐과 같은 형상함수를 이용하였다.

* 서울대학교 기계항공공학부 대학원생

** 서울대학교 기계항공공학부 교수

2. 정식화

2.1 Total Free Energy 와 구성방정식

열, 기계, 전기 하중에 의해 변형되는 구조물의 Free energy 는 다음과 같이 쓰여진다.

$$F(\varepsilon_{ij}, E_i, \theta) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_i \varepsilon_{jk} - \frac{1}{2} b_{ij} E_i E_j - k_{ij} \theta \varepsilon_{ij} - d_i E_i \theta - \frac{1}{2} a_T \theta^2 \quad (1)$$

여기서, C_{ijkl} 과 e_{ijk} 은 탄성계수와 piezoelectric 상수이다. 위의 (1)식으로부터, 다음과 같이 구성 방정식들이 유도 될 수 있다.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k - k_{ij} \theta \quad (2)$$

σ_{ij} 는 응력텐서 구성성분이다.

$\theta = T - T_0$ 는 초기온도 T_0 로 부터 의 온도변화이다. E_i 는 전기장 벡터의 구성성분이다. 선형에 기초를 둔 Piezoelectricity E_i 는 스칼라 포텐셜 함수 ϕ 로서 표현된다.

$$E_i = -\phi_{,i} \quad (i=1,2,3) \quad (3)$$

미소 변위와 변형을 관계식은 다음과 같이 주어진다.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

Piezo 층이 있는 복합재료 적층구조물의 형상은 그림 1 에 도시되어 있다.

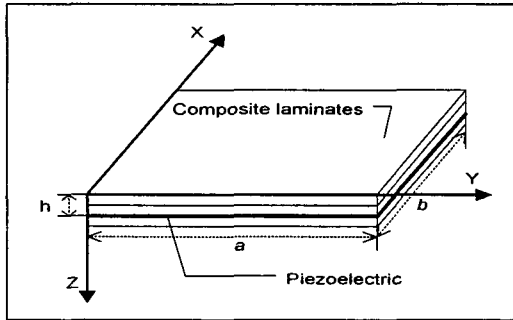


그림 1 Configuration of the adaptive laminated composite plates

2.2 변위장

변위장을 효율적으로 모델링 하기 위해서 고차 지그재그이론을 사용하였다. 면내 변위장은 기계 하중이 작용할 때 두께 방향으로 전체적으로 매끈하게 변하는 3 차의 변위장에 층마다 1 차 지그재그로 변하는 변위장을 중첩하여 변위장을 얻는다. 이때 층마다 지그재그 형상으로 변하는 변위장은 층마다 주 종속 변수를 가지므로 종속 변수의 수는 적층 수에 비례하여 늘어나게 된다.

이를 수식으로 표현하면 아래와 같다.

$$u_\alpha(x_\beta, z) = u_\alpha^0(x_\beta) + \psi_\alpha(x_\beta)z + \xi_\alpha(x_\beta)z^2 + \varphi_\alpha(x_\beta)z^3 + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k(x_\beta)(z-z_k)H(z-z_k) \quad (5)$$

$$u_3(x_\alpha, z) = w(x_\alpha) + r_1(x_\alpha)z + r_2(x_\alpha)z^2 \quad (6)$$

여기서, $H(z-z_k)$ 은 단위 계단함수 이다.

면내 변위장의 개형은 그림 2 에 그려져 있다.

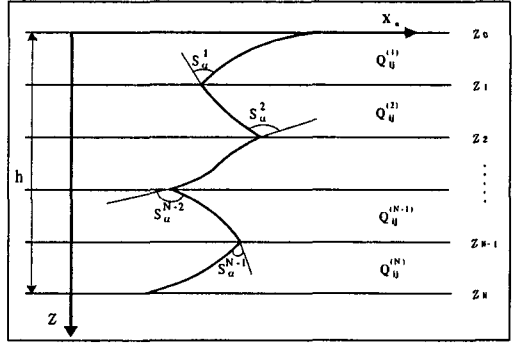


그림 2 General lamination layout and in-plane displacement field configuration

위의 변위장에 상, 하면에서의 횡 전단 구속조건을 대입한다. 즉,

$$\gamma_{\alpha 3} |_{z=0} = \psi_\alpha + w_{,\alpha} = 0$$

$$\gamma_{\alpha 3} |_{z=h} = \psi_\alpha + w_{,\alpha} + 2\xi_\alpha h + 3\varphi_\alpha h^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k + w_{,\alpha} + r_{1,\alpha} h + r_{2,\alpha} h^2 = 0 \quad (7)$$

횡 전단 응력 연속조건을 복합재 층의 경계마다 고려하면, 층 사이의 기울기변화 S_α^k 가 다음과 같이 결정된다.

$$S_\alpha^k = a_{\alpha\gamma}^k \varphi_\gamma + b_{\alpha\gamma}^k r_{2,\gamma} \quad (8)$$

여기서 $a_{\alpha\gamma}^k, b_{\alpha\gamma}^k$ 의 자세한 표현식은 생략한다.

결국, 식(7), (8)을 식(5), (6)에 대입하여, 다음과 같은 변위장을 유도할 수 있다.

$$u_\alpha(x_\beta, z, t) = u_\alpha^0(x_\beta, t) - w_{,\alpha}(x_\beta, t)z$$

$$- \frac{1}{2h} \left\{ 3\varphi_\alpha h^2 + \sum_{k=1}^{N-1} (a_{\alpha\gamma}^k \varphi_\gamma + b_{\alpha\gamma}^k r_{2,\gamma}) + \right.$$

$$\left. r_{1,\alpha}(x_\beta, t)h + r_{2,\alpha}(x_\beta, t)h^2 \right\} z^2 + \varphi_\alpha(x_\beta, t)z^3$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} (a_{\alpha\gamma}^k \varphi_\gamma + b_{\alpha\gamma}^k r_{2,\gamma})(z-z_k)H(z-z_k) \quad (9)$$

$$u_3(x_\alpha, z, t) = w(x_\alpha, t) + r_1(x_\alpha, t)z + r_2(x_\alpha, t)z^2 \quad (9)$$

변위장에서의 변수는 기준면의 변수만으로 정의된다. 주요 변수는 $u_\alpha^0, w, \varphi_\alpha, r_1, r_2$ 이다. 그 결과, 주요변수의 수는 층의 수에 관계없이 7 개로 일정하다. 위의 변위장을 가지고, 가상일

의 원리에 적용하여 변분적으로 일치하는 평형 방정식과 경계 조건을 유도할 수 있다. 여기서, 결과력과 계산과정은 지면 관계상 생략한다.

2.3 유한요소 모델 정식화

본 논문에서 사용한 유한요소는 subparametric nonconforming 삼각형 요소를 사용하였다. 본 논문의 이론을 유한요소로 발전시키기 위해서는 처짐의 두변 미분이 존재하기 때문에, C_1 함수가 필요하다. 처짐과 관계된 자유도 w, r_1, r_2 에는 Specht 가 제안한 C_1 함수를 사용하였다. 삼각형 요소는 임의의 경계조건을 적용하는데 있어서, 단순하고, 편리하기 때문에, 본 논문의 요소 개발에 적합하다.

요소 정식화에 대해 살펴보면, 다음과 같다. 변형에너지는 굽힘, 인장, 전단 에너지로 나눌 수 있다. 굽힘과 인장에 관한 에너지 Π_1 는 다음과 같다.

$$\Pi_1^k = \frac{1}{2} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{36} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} dz$$

$$\Pi_1 = \int_A \sum_{k=1}^N \Pi_1^k dA \quad (10)$$

회전단 에너지는 Π_2 는 다음과 같다.

$$\Pi_2^k = \frac{1}{2} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{54} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} dz$$

$$\Pi_2 = \int_A \sum_{k=1}^N \Pi_2^k dA \quad (11)$$

본 연구의 삼각형 요소에서, 절점 변위 벡터 $\{a\}^e$ 는 $\{u_{xi}^o, u_{yi}^o, \varphi_{xi}, \varphi_{yi}, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, r_{1i}, R_{1xi},$

$R_{1yi}, r_{2i}, R_{2xi}, R_{2yi}\}$ 이다. 여기서, $\theta_x = w_{,y}$

$\theta_y = -w_{,x}$ $R_{1x} = r_{1,y}$ $R_{1y} = -r_{1,x}$ $R_{2x} = r_{2,y}$ $R_{2y} = -r_{2,x}$

이다. 이에 대한 상세한 형상과 좌표축은 그림 3 에 보여진다.

변위는 다음과 같이, 절점 변위와 형상함수에 의해 표현되어 진다.

$$u_x^o = \sum_{i=1}^3 L_i u_{xi}^o \quad u_y^o = \sum_{i=1}^3 L_i u_{yi}^o \quad (12)$$

$$\varphi_x^o = \sum_{i=1}^3 L_i \varphi_{xi}^o \quad \varphi_y^o = \sum_{i=1}^3 L_i \varphi_{yi}^o \quad (13)$$

$$w = \sum_{i=1}^3 \{w_i N_i + \theta_{xi} N_{xi} + \theta_{yi} N_{yi}\} \quad (14)$$

$$r_1 = \sum_{i=1}^3 \{r_{1i} N_i + R_{1xi} N_{xi} + R_{1yi} N_{yi}\} \quad (15)$$

$$r_2 = \sum_{i=1}^3 \{r_{2i} N_i + R_{2xi} N_{xi} + R_{2yi} N_{yi}\} \quad (16)$$

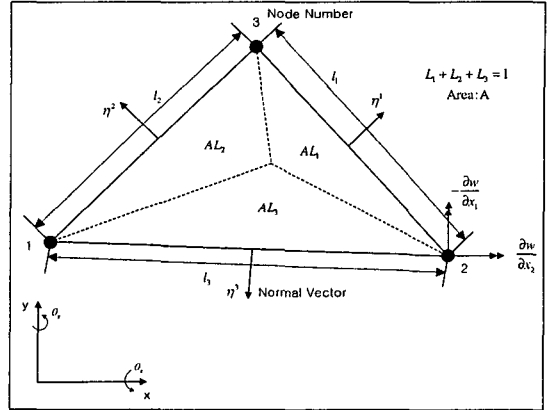


그림 3 Geometry and coordinates for the triangular element

변형률은 절점 변위에 의해 표현된다. 면내 변형률은

$$\{\epsilon_1\} = [B_1] \{a\} \quad (17)$$

여기서, $\{\epsilon_1\}$ 는 4×1 , $[B_1]$ 는 4×39 , $\{a\}$ 는 39×1 이다. 전단 변형률은

$$\{\epsilon_2\} = [B_2] \{a\} \quad (18)$$

여기서, $\{\epsilon_2\}$ 는 2×1 $[B_2]$ 는 2×39 $\{a\}$ 는 39×1 이다. 가상 에너지를 간략화 시키면, 다음과 같다.

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$$

$$= \frac{1}{2} \int_A \{a\}^T \left(\int_0^h [B_1]^T [C_1]^t [B_1] dz \right) \{a\} dA$$

$$+ \frac{1}{2} \int_A \{a\}^T \left(\int_0^h [B_2]^T [C_2]^t [B_2] dz \right) \{a\} dA \quad (19)$$

여기서, $\{a\}$ 는 절점 변위 벡터이고, $[C_1]^t, [C_2]^t$ 는 탄성계수이다. 위의 식에서, 두께방향으로 적분을 수행하면, 요소 강성행렬을 구할 수가 있다.

3. 수치해와 결과

수치결과로는 nonconforming 삼각형 요소를 이용하여, 스마트 구조물에 기계, 열, 전기 하중이 가해졌을 때, 응력을 예측하였다. 아래의 그림들은 비연성된 이론의 결과로써, 두께비가 1:4 인 모델을 해석한 것이다. 균일한 삼각형 mesh (10x10) 를 사용하였고, 효율적으로 계산시간을 감소시키기 위해 1/4 symmetric 경계조건을 추가하였다. 그래프는 두께방향으로의 응력 분포를 도시한 것이다. 재료상수들은 참고문헌[7] 를 참고하였다.

3.1 기계하중하의 응력분포

Sinusoidal 하중을 윗면에 가했을 때의 결과를 그림 4 에 도시하였다. 그림 4 에서 보여지듯이 유

한요소법에 의한 면내응력이 3 차원 탄성해[8]와 비교해서 매우 정확히 얻어지는 것을 알 수 있다.

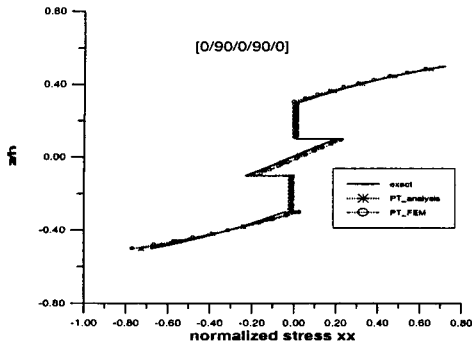


그림 4 기계하중하의 면내응력

3.2 온도하중하의 응력분포

두께 방향으로 선형으로 변하는 온도하중을 가했을 때의 응력을 그림 5 에 도시하였다. 본 유한요소 이론의 결과는 삼차원 탄성해의 결과와 비교할 만큼 정확히 응력을 예측할 수 있다.

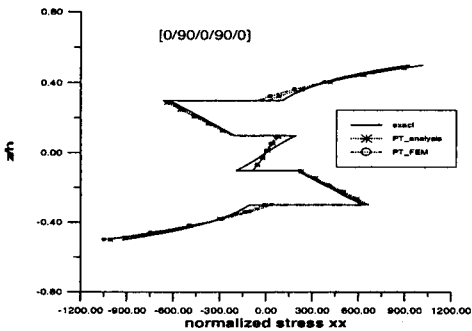


그림 5 온도하중하의 면내응력

3.3 전기하중하의 응력분포

평판의 아래면에 Piezo 층을 부착해서 전기하중을 가했을때의 응력분포를 해석하였다. 예상대로, 그림 6 과 같이 피에조 층에는 응력이 크게 작용하는 것을 알 수가 있다.

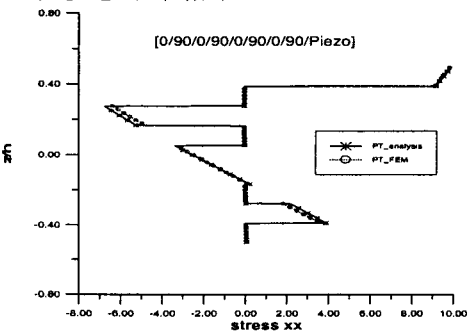


그림 6 전기하중하의 면내응력

4. 결론

본 연구에서는 고차 지그재그 이론의 유한요소를 개발하여, 임의의 경계조건, 하중, 기하학적인 형상에 대해 응력과 변형을 예측할 수 있게 하였다. 특히, 적층수가 많은 적층배열을 가지는 구조물에 대해 본 논문의 유한요소 모델을 이용하면, 3 차원 응력 상태의 해에 상당히 정확하게 접근할 수 있게 되었다. 그러므로, 실제 3 차원 응력 상태를 해석하는 효율적인 방법이라고 할 수 있다. 그리고, 기계, 열, 전기 하중이 작용할 때는, 두께 방향 변형을 무시할 수 없기 때문에, 수직 응력과 수직 변형에 대한 효과를 무시하면, 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 없다는 사실을 확인할 수 있었다. 끝으로, 본 논문은 비연성된 이론이지만, 연성된 이론으로 확장하여 스마트 구조물의 응력과 변형을 보다 정확하게 예측할 수 있도록 하는 것이 앞으로 진행 되어야 할 연구 방향이다.

후 기

이 논문은 2001 년도 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

- (1) Mindlin, R.D. "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motion of Isotropic Elastic Plates," *J. of Appl. Mech.*, vol. 18, pp. 31-38, 1951
- (2) Reissner, E. "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates," *J. of Appl. Mech.*, vol. 12, pp. 69-77, 1945
- (3) Specht, B. "Modified Shape Functions for the Three-Node Plate Bending Element Passing the Patch Test," *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, vol.26, pp.705-715, 1988
- (4) Cho, M. and Parmerter, R. R., 1992, "Efficient Higher Order Plate Theory for Laminated Composites," *Compos Struc.*, Vol. 20, pp. 113-123
- (5) Cho, M. and Oh, J. "Higher order zig-zag theory for fully coupled thermo-electric-mechanical smart composite plates." *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, 42nd SDM Conference*, Seattle, WA, 2001, AIAA Paper Number 2001-1403, pp.1-10. And also submitted to *AIAA Journal*
- (6) Nelson, R. B. and Lorch, D. R., 1974, "A Refined Theory for Laminated Orthotropic Plates," *J. of Appl. Mech.*, Vol. 41, No. 1, pp.177-183.
- (7) Y.Y. Tang and A. K. Noor "Assessment of Computational Models for Thermoelectro elastic Multilayered Plates" *Computer & Structures Vol. 61, No. 5, pp 915-933, 1966*
- (8) Pagano, N. J. "Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending," *J. Comp. Mater.*, Vol. 3, pp. 398-411., 1969